

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.С. СИТДИКОВ

СОВРЕМЕННЫЕ МОДЕЛИ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЯДЕР

Монография

КАЗАНЬ – 2017

УДК 539.1.01
ББК 22.383
С 41

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Научно-исследовательского института ядерной физики имени Д.В. Скобельцына Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова *Варламов В.В.*;

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории теоретической физики им. академика Н.Н. Боголюбова Объединенного Института Ядерных Исследований (г. Дубна) *Адамьян Г.Г.*

Ситдигов А.С.

С41 Современные модели вращающихся ядер: монография / А.С. Ситдигов. — Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2017. — 270 с.

ISBN 978-5-89873-489-3

В книге систематически изложены вопросы самосогласования среднего поля ядра с возбуждениями коллективного типа при умеренных и больших частотах вращения. На новом уровне описаны различные ядерные процессы вблизи ираст-линии. Развита квазиклассические методы описания вращения на основе теории периодических орбит.

Для научных работников, занимающихся теорией атомного ядра, а также аспирантов и студентов старших курсов физических специальностей.

ISBN 978-5-89873-489-3

©Ситдигов А.С.

©Казанский государственный
энергетический ун-т, 2017

Содержание

Введение	8
1 феноменологическая модель кориолисова смешивания по- лос	12
§1.1 Модель кориолисова смешивания высокоспиновых полос .	12
§1.1.1 Модель	13
§1.1.2 Радиационные переходы	17
§1.1.3 Определение ВУМ модельным методом	20
§1.2 Энергетические и радиационные особенности ядер с $N=90$	23
§1.2.1 Энергетические особенности	24
§1.2.2 Радиационные особенности	31
§1.3 Энергетические и радиационные особенности ядер с $A \sim 130$	35
§1.3.1 Энергетические особенности изотопов бария	36
§1.3.2 Особенности радиационных переходов	43
2 феноменологическая модель расщепления по четности при вращении	54
§2.1 Спектры ядер с октупольной деформацией	54
§2.1.1 Комбинированная модель для описания ядер с рас- щеплением по четности и выстраиванием углового момента	56
§2.1.2 Численные расчеты	59
§2.1.3 Численные результаты для легких изотопов радия .	65
§2.2 Двухквaziчастичная структура высокоспиновых состояний отрицательной четности	71
§2.2.1 Ротационная модель высокоспиновых состояний от- рицательной четности	72
§2.2.2 Численные расчеты	74
§2.2.3 Влияние выстраивания углового момента на радиа- ционнне свойства ядра	77
§2.3 Влияние октупольных корреляций на состояния отрица- тельной четности в низкоспиновой области	78

§2.3.1	Ротационная модель с учетом октупольных корреляций	79
§2.3.2	Численные результаты	81
3	микроскопическая модель приближения хаотических фаз при быстром вращении	96
§3.1	Основные положения	96
§3.1.1	Основные положения МПВ	97
§3.1.2	Явление бэкбендинга	102
§3.2	Самосогласованное описание коллективных возбуждений во вращающихся ядрах	105
§3.2.1	Формализм ХФБ	105
§3.2.2	Уравнения ПХФ	112
§3.2.3	Момент инерции Тоулесса-Валатина	123
§3.3	Сравнение с экспериментальными данными	125
4	микроскопический подход к описанию высокоспиновых экзотических возбуждений	151
§4.1	Неаксиальные октупольные корреляции в быстровращающихся ядрах с $A \sim 160$	151
§4.1.1	Модель	152
§4.1.2	Вероятности электромагнитных переходов	156
§4.1.3	Метод силовых функций	160
§4.2	Сравнение с экспериментом	162
§4.3	Нейтрон-протонные корреляции в ядрах	170
§4.3.1	Модель	173
§4.3.2	Ядра с $A \sim 70$	180
§4.3.3	Ядра с $A \sim 160$	182
5	квазиклассическая модель при статистически равновесном вращении	212
§5.1	Квазиклассическая теория оболочечной структуры ядер	212
§5.2	Локальная составляющая момента инерции	214
§5.2.1	Момент инерции как отклик на принудительное вращение	214
§5.2.2	Квазиклассическое траекторное разложение Гуцвиллера	216
§5.2.3	Гладкая составляющая момента инерции	219
§5.3	Оболочечные поправки к моменту инерции при коллективном вращении	223

§5.3.1	Оболочечные поправки к плотности уровней через оболочечные поправки к энергии и свободной энергии	226
§5.3.2	Пример гармонического осциллятора	228
§5.3.3	Оболочечные поправки к моменту инерции	232
§5.4	Сравнение с квантовомеханическими результатами	234

Предисловие автора

Высокоспиновые состояния представляют интенсивно развивающуюся область теории по изучению структуры атомного ядра, поскольку за последнее время благодаря прогрессу ускорительной техники тяжелых ионов, стало возможным заселение состояний с очень высокими угловыми моментами. Серьезный интерес привлекают при этом эволюция формы ядра с ростом углового момента, и в частности, появление неаксиальных октупольных деформаций при быстром и сверхбыстром вращении, влияние вращения на среднее поле, роль оболочечных флуктуаций. В связи с этим, настоящая монография посвящена теоретическому описанию ядерного вращения с помощью феноменологических, микроскопических и квазиклассических моделей вплоть до самых высоких экспериментально наблюдаемых спинов. Однако несмотря на уникальность вращения в теории атомного ядра и конечных ферми-систем, которое способно оказывать сильное влияние на квазичастичные и коллективные моды возбуждений, эта тема освещалась в монографиях по ядерной физике в узкой форме лишь в виде отдельных глав в связи с характером книги. Поэтому назрела необходимость издания отдельной монографии, посвященной систематическому описанию ядерного вращения.

В связи с этим автор ставил перед собой задачу более детального изложения теории ядерного вращения. Поэтому в монографии впервые систематически изложены вопросы самосогласования среднего поля ядра с возбуждениями коллективного типа при умеренных и больших частотах вращения и на качественно новом уровне описаны различные ядерные процессы вблизи ираст-линии. Также развиты квазиклассические методы описания вращения на основе мощной теории периодических орбит, без использования ограничений клас-

сической теории возмущений Крэга.

С целью облегчения изучения и достижения минимальной зависимости от других источников, в приложениях к каждой главе приведен соответствующий вспомогательный материал.

Монография не содержит полной библиографии по высокоспиновой ядерной физике и ссылки приведены на наиболее важные, с точки зрения автора, статьи и книги. Также в некоторых случаях даны ссылки на работы, которые позволяют более детально ознакомиться с излагаемым в монографии материалом.

Для изучения монографии в полном объеме, необходимо иметь помимо математических знаний из области анализа, теории функций комплексного переменного, теории операторов в гильбертовых пространствах и дифференциальных уравнений в частных производных, также хорошее знакомство с основами квантовой механики, электродинамики, статистической физики и общим курсом ядерной физики.

Автор благодарен своим друзьям и товарищам по работе Р.Х. Сафарову, Я. Квасилу, Р.Г. Назмитдинову, А.Г. Магнеру, А.А. Хамзину и А.С. Никитину, которые принимали участие в развитии некоторых разделов теории, вошедших в книгу.

Введение

Благодаря как быстрому прогрессу техники ускорения тяжелых ионов, который привел к обнаружению новых явлений при быстром ядерном вращении, так и определенным успехам теоретических методов описания, интерес к исследованию вращательных состояний ядер постоянно возрастает. При этом, весьма интересным является изучение ядерной структуры вблизи *yrast* линии, поскольку здесь наблюдается множество своеобразных мод, в которых проявляются яркие физические эффекты. К наиболее значимым можно отнести открытие супердеформированных состояний [1,2], обнаружение новых ротационных полос, характеризующихся усиленными радиационными переходами магнитного типа, в частности, обусловленными анизотропными нуклонными токами и имеющими определенную четность [3-5], появление киральных полос [6, 7], а также вобблинг мод [6, 7-9].

Весьма актуальными стали также исследования экзотических мод, связанных с возникновением неаксиальных октупольных деформаций при высоких спинах в ядрах определенных областей [10-12] и возможности конкуренции изоскалярного $\mathcal{T} = 0$ и изовекторного $\mathcal{T} = 1$ спаривания в ядрах с $N \approx Z$ [13-15].

Все эти явления, вместе с ранее обнаруженными и в то же время не потерявшими по сей день свою значимость и актуальность эффектами типа бэкбендинга, связанного с аномалиями в моменте инерции, высокоспиновых изомерных состояний (*yrast*-ловушек) и др. [22], представляют весьма ценную информацию о структурных особенностях ядра.

Несмотря на то, что упомянутые коллективные моды в целом представляют весьма сложные и разнообразные возбуждения, требующие детального анализа экспериментальных данных с одновременным развитием и расширением тео-

ретической базы, при их разностороннем описании были достигнуты определенные успехи. С практической точки зрения большое внимание при этом уделяется развитию различных самосогласованных методов, основанных на приближении среднего поля, при разумном предположении, что вблизи *yrast* области ядро можно рассматривать как конечную ферми-систему при нулевой температуре [6], несмотря на большую вращательную энергию возбуждения. Другими словами, хотя и элементарные ветви возбуждения ядерного вещества при таких условиях могут существенно видоизменяться из-за больших внутренних возмущений, обусловленных центробежными и кориолисовыми силами, можно считать, что приближение среднего поля остается достаточно надежным и обоснованным при указанных выше экстремальных условиях. В первую очередь это связано с тем, что при таких условиях, создаваемых быстрым или сверхбыстрым вращением, огромная доля энергии возбуждения идет на генерирование углового момента ядра.

Этот факт позволяет развивать модели, первоначально предложенные для описания низкоспиновой части спектра ядра, т.е. когда внутренние степени свободы отделяются от вращательных, на случай неадиабатического вращения, когда движение отдельных нуклонов подвержено сильным возмущениям со стороны кориолисовых сил. Одной из таких успешно эксплуатируемых ранее моделей была обобщенная модель О.Бора и В.Моттельсона, на основе которой в адиабатическом приближении были описаны также и вероятности переходов вдоль ротационных полос. Модификация нами этой модели с учетом выстраивания при высоких спинах моментов пары нуклонов, находящихся вблизи поверхности Ферми, позволило успешно находить многие высокоспиновые характеристики быстровращающихся ядер, а также выявить особенности поведения энергии вращательных состояний и ра-

диационных переходов вдоль основной и выстроенных полос.

Важное место при изучении структуры ядра, вплоть до высоких наблюдаемых спинов, занимает также и модель принудительного вращения Инглиса (МПВ), комбинация которой с различными микроскопическими подходами типа приближения Хартри-Фока-Боголюбова (ХФБ), хаотических фаз (ПХФ) и др. не только успешно эксплуатируется, но и открывает перспективы для изучения новых явлений при высоких спинах [16]. К тому же, к настоящему времени созданы весьма благоприятные условия для расширения области применимости таких методов благодаря значительному прогрессу вычислительной техники. В связи с этим, развитие нами квазисамосогласованного подхода для описания коллективных состояний ядер вокруг *yrast* линии путем восстановления нарушенных симметрий среднего поля позволило на основе комбинирования приближений МПВ+ХФБ с модифицированным потенциалом Нильссона и привлечением ПХФ, описать многие свойства вибрационных и квазичастичных степеней свободы. В частности, на основе квазисамосогласованного учета влияния остаточных взаимодействий мультипольного характера на квазичастичные возбуждения, были получены хорошие согласия момента инерции Тоулесса-Валатина, вычисляемого на основе ПХФ, с динамическим моментом инерции, объяснено возникновение при высоких спинах неаксиальных октупольных мод и др.

Все же, несмотря на все достигнутые успехи, многочастичная проблема конечных Ферми-систем так и не решена до сих пор как из-за принципиальных теоретических, так и вычислительных трудностей. В связи с этим мы развиваем и квазиклассические подходы, позволяющие для определенного круга задач существенно упростить описание коллективной динамики многих частиц [17,18]. Эти подходы, основанные на методе оболочечных поправок Струтинского (см. §5.1), позво-

ляют многие физические величины, такие как энергия, плотность одночастичных уровней, момент инерции и др. разделить на гладкую (усредненную) и флуктуирующую (оболочечную) части. В рамках расширения этой квазиклассической теории на континуальные симметрии и явления бифуркации, в монографии получена осциллирующая часть момента инерции с помощью мощной теории периодических орбит, не опирающейся на классическую теорию возмущений, а поэтому работающая тем лучше, чем больше число частиц в ядре при заданном его угловом моменте, а гладкая компонента простым образом была получена на основе расширенного приближения Томаса-Ферми.

Глава 1

феноменологическая модель кориолисова смешивания полос

§1.1 Модель кориолисова смешивания высокоспиновых полос

С ростом углового момента, когда центробежные и кориолисовы силы становятся большими, вращение оказывает заметное влияние на внутренние степени свободы [19,20]. Силы Кориолиса разрушают связь пары нуклонов с деформированным остовом и выстраивают угловые моменты нуклонов вдоль оси вращения. Особо сильному воздействию сил Кориолиса подвержены нуклоны на орбиталях с большим значением j вблизи поверхности Ферми, и разрушение связи одной из пар нуклонов в большинстве случаев оказывается достаточным, чтобы объяснить экспериментально наблюдаемое при определенном спине резкое возрастание момента инерции и уменьшение частоты вращения ядра (явление обратного загиба, или бэкбендинг).

Эффекты, вызванные кориолисовым взаимодействием, удобно изучать в терминах выстроенного углового момента (ВУМ), прямого способа измерения которого, к сожалению, не существует. Предложенная в [21] сравнительно простая феноменологическая модель кориолисова смешивания высокоспиновых состояний описывает энергии уровней положительной четности четно-четных деформированных ядер, позволяя в то же

время определить ВУМ модельным методом.

§1.1.1 Модель

Модель исходит из ротационного гамильтониана Бора [22]

$$\hat{H} = \hat{H} + \hat{H}(\hat{R}^2), \quad (1.1.1)$$

состоящего из гамильтониана внутренних возбуждений \hat{H} и $\hat{H}(\hat{R}^2)$ – вращательной части, зависящей от коллективного углового момента $\mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{j}$ (\mathbf{I} и \mathbf{j} – операторы полного углового момента и углового момента, связанного с внутренними степенями свободы). В предположении плавного изменения свойств остова в зависимости от \mathbf{R} , кориолисово смешивание можно аппроксимировать в окрестности \mathbf{I} многочленом Тейлора (ограничимся лишь первыми двумя членами разложения) [23]:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{rot}(\hat{R}^2) \approx H_{rot}(I(I+1)) - \\ - \frac{dH(I(I+1))}{d(I(I+1))} (2\mathbf{I}\mathbf{j} - \mathbf{j}^2) \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Первый член представляет здесь оператор $\hat{H}_{rot}(\hat{I}^2)$. Для фиксированных значений полного углового момента, которыми мы интересуемся, его можно заменить функцией $H(I(I+1))$. Таким же образом можно поступить и с множителем при скобке во втором члене. Слагаемое, содержащее \mathbf{j}^2 , относится гамильтониану внутреннего движения, а член с $\hat{\mathbf{I}}\mathbf{j}$ учитывает связь между вращением и внутренними движениями в ядре. Используя выражения для матричных элементов от D -функций, матричный элемент в последнем члене можно записать в виде

$$(\hat{\mathbf{I}}\mathbf{j})_K^I = \sqrt{I(I+1)}(j_x)_K \chi(I, K),$$

где

$$\hat{j}_x = \frac{1}{2} (\hat{j}_+ + \hat{j}_-) -$$

проекция углового момента на ось o и

$$\chi(I, 1) = \left[1 - \frac{K + 1}{I(I + 1)} \right]^{1/2}.$$

Таким образом, в приближении больших спинов, т.е. при $I \gg 1$, $\chi(I, K) \approx 1$, гамильтониан будет иметь вид

$$\hat{H} = \hat{H}_{in} + \hat{H}_{rot}(I^2) - \omega_{rot} \hat{j}_x, \quad (1.1.3)$$

где угловая скорость вращения остова ω_{rot} определяется как

$$\omega_{rot} = \frac{dE(\tilde{I})}{d\tilde{I}} \quad \tilde{I} = \sqrt{(I + 1)I}.$$

Здесь $\hat{H}_{rot}(I^2)$ описывает вращение остова ядра, а $-\omega_{rot} \hat{j}_x$ учитывает кориолисово взаимодействие.

Итак, задача сводится к решению уравнения Шредингера с гамильтонианом (1.1.3), при котором будем использовать в качестве базиса конечное число функций невозмущенных полос. Вращение остова аппроксимируем параметризацией Харриса [24]

$$E_{rot}^I(\omega_{rot}) = \frac{1}{2} J_0 \omega_{rot}^2 + \frac{3}{4} J_1 \omega_{rot}^4, \quad (1.1.4)$$

$$\tilde{I} = J_0 \omega_{rot} + J_1 \omega_{rot}^3, \quad \left(\tilde{I} \equiv \sqrt{I(I + 1)} \right), \quad (1.1.5)$$

в которой для описания ядер редкоземельной области достаточно учесть первых двух членов, с двумя инерциальными характеристиками J_0 и J_1 , соответственно называемыми моментом инерции ядра и параметром неадиабатичности.

Рассмотрим решение уравнения Шредингера для Кориолисова смешивания основной (gr), β , γ вибрационных и выстроенных sn полос ($n = 1, 2, \dots$). Волновую функцию при этом

разложим по базисным функциям соответствующих полос

$$\Psi(IMKn) = \sum_i a_i^I \varphi_i(IMKn). \quad (1.1.6)$$

Здесь

$$\varphi_{gr}(IMK = 0) = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} D_{M0}^I |0 \rangle, \quad (1.1.7)$$

волновая функция gr полосы,

$$\varphi_{\beta}(IMK = 0) = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} D_{M0}^I \chi(\beta) |0 \rangle, \quad (1.1.8)$$

β - полосы,

$$\varphi_{\gamma}(IMK = 2) = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} D_{MK}^I \chi(\gamma) |0 \rangle, \quad (1.1.9)$$

γ полосы,

$$\begin{aligned} \varphi_s(IMK j_0 n) = \\ = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} \sum_K d_{Kj_0}^j(\pi/2) D_{MK}^I \chi_K^j |0 \rangle, \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

выстроенных sn полос, где D_{MK}^I – D -функция Вигнера, описывающая вращение ядра с полным моментом I и проекциями M и K , соответственно в лабораторной и внутренней системах координат, функция $d_{Kj_0}^j(\pi/2) = D_{Kj_0}^j(0, \pi/2, 0)$ осуществляет поворот на $\pi/2$ вокруг оси oy , $\chi(\beta)$, $\chi(\gamma)$ – волновые функции соответствующих вибрационных состояний и χ_K^j – волновая функция внутреннего состояния ядра с угловым моментом j и проекцией K во внутренней системе координат. Для выстроенных полос среднее значение внутреннего выстроенного углового момента (ВУМ) равно

$$j_{0n} = \langle IMj_0 sn | \hat{j}_x | IMj_0 sn \rangle. \quad (1.1.11)$$

Для ротационных полос, где выстраивание не проявляется, ВУМ равен нулю.

При решении задачи кориолисова смешивания предполагаем известными решения для невозмущенных полос:

$$\hat{H}_0 \varphi_{gr}(I) = E_{rot} \varphi_{gr}(I) \quad (1.1.12)$$

$$\hat{H}_0 \varphi_{\beta}(I) = (E_{\beta} + E_{rot}) \varphi_{\beta}(I) \quad (1.1.13)$$

$$\hat{H}_0 \varphi_{\gamma}(I) = (E_{\gamma} + E_{rot}) \varphi_{\gamma}(I) \quad (1.1.14)$$

На основании (1.1.10) решение для невозмущенных sn полос имеет вид

$$\hat{H}_0 \varphi_{sn}(I) = (E_{sn} + E_{rot} - \omega j_{sn}) \varphi_{sn}(I), \quad (1.1.15)$$

где E_{β} , E_{γ} , E_{sn} – головные энергии соответствующих полос, а E_{rot} определяется параметризацией Харриса (1.1.4).

Решение будем искать выбирая волновую функцию в виде разложения (1.1.6). Подставляя ее в уравнение $\hat{H}\Psi = E\Psi$ с гамильтонианом (1.1.3), получим (для определенности возьмем две выстроенные полосы $s1$ и $s2$)

$$(\hat{H} + \hat{H}_{rot} - \omega \hat{j}_x) \sum_i a_i^I \varphi_i(I) = E \sum_i a_i^I \varphi_i. \quad (1.1.16)$$

Эта система уравнений имеет решение, если определитель,

$$\begin{vmatrix} E_{rot} - E & 0 & 0 & -\omega j_{grs1} & -\omega j_{grs2} \\ 0 & E_{\beta} + E_{rot} - E & 0 & -\omega j_{\beta s1} & -\omega j_{\beta s2} \\ 0 & 0 & E_{\gamma} + E_{rot} - E & -\omega j_{\gamma s1} & -\omega j_{\gamma s2} \\ -\omega j_{grs1} & -\omega j_{\beta s1} & -\omega j_{\gamma s1} & E_{s1} + E_{rot} - \omega j_{s1} - E & -\omega j_{s1s2} \\ -\omega j_{grs2} & -\omega j_{\beta s2} & -\omega j_{\gamma s2} & -\omega j_{s1s2} & E_{s2} + E_{rot} - \omega j_{s2} - E \end{vmatrix}$$

составленный из коэффициентов при неизвестных a_i^I , равен нулю. Диагонализация дает решение

$$E_{\nu}^I = E_{rot}(I) + \epsilon^{\nu}(\omega_{rot}(I)) \quad (1.1.17)$$

с собственными значениями гамильтониана $\hat{H}_0 = \hat{H} - \omega_{rot} \hat{j}_x$. Выражение для $\epsilon^{\nu}(\omega_{rot})$ довольно громоздкое, который в слу-

чае двух полос имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \epsilon^\pm(\omega_{rot}(I)) = & \frac{1}{2}E_0 - \frac{1}{2}\omega_{rot}j_0 \pm \\ & \pm \frac{1}{2}\sqrt{(E_0 - \omega_{rot}j_0)^2 + 4\omega_{rot}^2j_{12}^2}. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Данные уравнения решаются численно методом диагонализации с помощью стандартных программ. Инерциальные параметры J_0 и J_1 , головные энергии E_γ , E_β , E_{0sn} , выстроенные угловые моменты j_{0sn} ($n = 1, 2$) и матричные элементы $j_{nn'}$ обычно подбираются методом наименьших квадратов. Угловая частота вращения остова определяется из кубического уравнения (1.1.5) также численно, например, методом деления пополам.

§1.1.2 Радиационные переходы

Изучение радиационных переходов между высокоспиновыми состояниями дает богатую информацию об изменениях внутренней структуры ядра при быстром вращении, так как матричные элементы электромагнитных переходов, связывающих волновые функции начального и конечного состояний, чувствительны к тонким деталям структуры состояний.

Адиабатический подход к вероятностям перехода обобщенной модели основан на факторизации функции $D_{KM}^I(\varpi)$ (где D_{KM}^I – D -функция Вигнера), учитывающей вращение в терминах коллективных координат, трех углов Эйлера ϖ , определяющих ориентацию деформированного потенциала в пространстве и функции $|\zeta(K)\rangle$, зависящей от остальных "внутренних" координат. Эффекты, вызванные быстрым вращением, могут существенно изменить приведенные вероятности переходов, рассчитанных в адиабатическом приближении [25]. Следовательно, такие эффекты приводят к отклонениям от правил Алаги [26], или от правил ветвления. В наиболее полном виде они получены на основании модели частица плюс

ротатор [27], учитывающей связь ротационных полос, осуществляемой силами Кориолиса в [28]. В дальнейшем эта модель была развита в ряде работ с применениями к нечетным ядрам, ссылками на некоторые из них можно ознакомиться в [29].

Также были предприняты многократные попытки применить модель частица-ротатор к четно-четным ядрам для расчета неадиабатических эффектов, проявляемых в энергиях и вероятностях перехода на основании прямой связи с силами Кориолиса [30]. Однако согласованных результатов не получалось, что вынудило вводить дополнительные члены [31].

Рассмотрим в рамках этой модели электрические квадрупольные переходы между уровнями вращательной *yrast*-полосы. Приведенную вероятность электромагнитного $E2$ -перехода можно представить в виде

$$\mathcal{B}(E2; In_i \rightarrow I - 2n_f) =$$

$$\left| \sum a_{nn_i}^I a_{n'n_f}^{I-2} \left\langle I - 2K'n' \left| \hat{M}(E2) \right| IKn \right\rangle \right|^2 \quad (1.1.19)$$

где $|n_i \rangle$, $|n_f \rangle$ – волновые функции начального и конечного состояний, $\hat{M}(E2)$ – оператор электрического квадрупольного перехода. При переходе во внутреннюю систему координат этот оператор преобразуются с помощью D -функций Вигнера:

$$\hat{M}'(E2, \mu) = \sum_{\nu} \hat{M}(E2, \nu) D_{\mu\nu}^2(\omega). \quad (1.1.20)$$

Параметризуем его во внутренней системе следующим образом

$$\hat{M}(E2, \nu) = q\delta_{\nu 0} + q'(\hat{b}_{\nu}^{+} + (-1)^{\nu}\hat{b}_{-\nu}), \quad (1.1.21)$$

где $\hat{b}_{\nu}^{+}(\hat{b}_{-\nu})$ – оператор рождения (уничтожения) фонона с $\nu = (\lambda\nu)$. Параметр q связан со статическим квадрупольным моментом ядра соотношением $q = Q_{20}\sqrt{5/16\pi}$. Также из

свойств симметрии оператора (1.1.21) относительно обращения времени следует, что $q'_\nu = -q'_{-\nu}$. Кроме того, для уменьшения числа подгоночных параметров, воспользуемся одним усредненным значением q' , полагая $q'_\nu = q'$.

Рассмотрим электрические квадрупольные переходы между уровнями *yrast*-полосы. Волновая функция (1.1.7) является собственной функцией исходного ротационно инвариантного гамильтониана (1.1.1). Вычисленные с ее помощью матричные элементы *E2*-переходов внутри *gr* полосы имеют вид

$$\left\langle I - 2K gr \left| \hat{M}(E2) \right| IK gr \right\rangle = q C_{IK20}^{I-2K} / 2. \quad (1.1.22)$$

Аналогичные вычисления для переходов внутри β ($K = 0$), γ ($= 2$) и выстроенных (*s*) полос дают следующие выражения, пропорциональные q :

$$\left\langle I - 2K \beta \left| \hat{M}(E2) \right| IK \beta \right\rangle = q C_{I020}^{I-20}; \quad (1.1.23)$$

$$\left\langle I - 2K \gamma \left| \hat{M}(E2) \right| IK \gamma \right\rangle = \sqrt{2} q C_{I220}^{I-22}; \quad (1.1.24)$$

$$\left\langle I - 2j j_0 s \left| \hat{M}(E2) \right| I j j_0 s \right\rangle = q \sum_K C_{IK20}^{I-2K} \left| C_{I-j_0 0 j K}^{IK} \right|^2, \quad (1.1.25)$$

где j, j_0 , – (ВУМ) и его проекции на ось вращения в обеих системах, $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM}$ - коэффициенты Клебша-Гордана [32].

Переходы между уровнями разных полос имеют гораздо малую интенсивность и пропорциональны q' :

$$\left\langle I - 2K' = 0 \beta \left| \hat{M}(E2) \right| IK gr \right\rangle = q' C_{I020}^{I-20} - \quad (1.1.26)$$

для переходов между *gr* и β вибрационным состояниями;

$$\left\langle I - 2K' = 2 \gamma \left| \hat{M}(E2) \right| IK gr \right\rangle = \sqrt{2} q' C_{IK2-2}^{I-22} - \quad (1.1.27)$$

между *gr* и γ ,

$$\left\langle I - 2K' = 0 gr \left| \hat{M}(E2) \right| I j j_0 s \right\rangle =$$

$$\sum_K q' C_{IK2-K}^{I-20} C_{I-j_0jK}^{IK} \quad (1.1.28)$$

из уровней s полосы в gr ,

$$\left\langle I - 2K = 2\gamma \left| \hat{M}(E2) \right| I j j_0 s \right\rangle = q\sqrt{2} C_{IK20}^{I-2K} C_{I-j_0jK}^{IK} \quad (1.1.29)$$

и также в γ вибрационную полосу.

Для упрощения выражения (1.1.25), и двух последних (1.1.28)-(1.1.29), мы воспользовались известным асимптотическим представлением $d_{j_0K}^j(\pi/2) \approx C_{I-j_0jK}^{IK}$, а также тем условием, что $q > q'_\nu$. Как следует из этих выражений, матричные элементы $E2$ -переходов в выстроенной полосе и из нее отличны от нуля только при спине $I > j_0$. Кроме того, в них входят угловые моменты j пары нуклонов нейтронной и протонной подоболочек, участвующих в выстраивании углового момента и значение выстроенного углового момента j_0 , которое получается из условия наилучшего согласия расчетных энергий уровней с экспериментальными.

§1.1.3 Определение ВУМ модельным методом

Считается общепризнанным, что причиной обратного загиба момента инерции, упомянутого в §1.1, в ядрах редкоземельной области и для ядер с $\mathcal{A} \sim 130$, является эффект ротационного выстраивания углового момента пары нуклонов вблизи поверхности Ферми. Для того чтобы оценить его значение j_x , нужно знать зависимость полного углового момента состояния I от частоты вращения ядра ω . В [33] предложен метод его нахождения по экспериментальным данным $E(I)$ энергий ротационных полос на основе зависимости $I(\omega)$ спина I уровня от угловой частоты вращения ядра ω , определяемой из уравнения механики

$$\omega(I) = dE(I)/dI \approx [E(I+1) - E(I-1)]/2, \quad (1.1.30)$$

с помощью аппроксимации производной от дискретной величины $E(I)$ конечной разностью энергий соседних уровней полосы. Обращая эту функцию устанавливают зависимость $I(\omega_{eff})$, которая для ротационной полосы с выстраиванием отличается от аналогичной функции $I_{ref}(\omega)$ «инертной» полосы без выстраивания, называемой реперной (reference) полосой. Здесь ω_{eff} – так называемая эффективная угловая скорость вращения, определяется с помощью соотношения

$$\omega_{eff} = \frac{E^{I+1} - E^{I-1}}{2}. \quad (1.1.31)$$

Разность функций

$$i(\omega_{eff}) = I(\omega_{eff}) - I_{ref}(\omega_{eff}) \quad (1.1.32)$$

при определенных значениях ω_{eff} дает значение ВУМ. Но при таком определении сталкиваются с некоторыми затруднениями, одно из которых связано с выбором реперной полосы. Обычно за такую полосу принимают нижнюю часть основной *gr* полосы и экстраполируют ее в область высоких спинов, где происходит пересечение полос. Однако неадиабатические эффекты, вызываемые силами Кориолиса, могут привести к ощутимым отклонениям даже в низкоспиновой части спектра, тем самым оставляя некоторый произвол – не представляется возможным воспроизвести однозначным образом их результаты.

Данная модель кориолисова смешивания высокоспиновых полос позволяет найти экспериментальное значение ВУМ без обращения к процедуре экстраполяции. В рамках модели также было показано, что используя параметризацию Харриса (1.1.4), (1.1.5) можно воспроизвести энергетические спектры до высоких наблюдаемых спинов. Модельный метод нахождения ВУМ был нами применен к описанию нижайших аномалий в *yrast* и *yrare*(n) ($n = 1, 2, \dots$) полосах четно-четных

ядер редкоземельной и $\mathcal{A} \sim 130$ областей независимо от того, наблюдаются ли экспериментально sn полосы или нет.

Обозначим $\langle IMgr | j_x | IMj_0s \rangle = j_{12}$ — м.э. взаимодействия Кориолиса между gr и s полосами. Из-за большого различия внутренней структуры этих полос следует, что $|j_{12}| \ll j_0$. Задача кориолисова смешивания gr и s полос приводит к решению $E_\nu^I = E_{rot}(I) + \epsilon^\pm(\omega_{rot}(I))$, дифференцирование которого по I позволяет определить ВУМ как производную

$$i(\omega_{rot}) = -\frac{d\epsilon(\omega_{rot})}{d\omega_{rot}}, \quad (1.1.33)$$

вычисляя которую учитывая (1.1.18), получаем соотношение

$$i(\omega_{rot}) = \frac{1}{2} \left[j_0 + \frac{(\omega_{rot}j_0 - E_0)j_0 + 4\omega_{rot}j_{12}^2}{\sqrt{(\omega_{rot}j_0 - E_0)^2 + 4\omega_{rot}^2j_{12}^2}} \right]. \quad (1.1.34)$$

В точке пересечения полос $\omega = E_0/j_0$, ВУМ равен

$$i(\omega) = (j_0 + 2j_{12})/2,$$

а при $\omega_{rot} > \omega$ достигает своего максимального значения: $i(\omega_{rot} > \omega) \approx j_0$.

Особой наглядности процессов выстраивания можно достичь, если откладывать на графике $\epsilon_n^I(\omega_{rot}) = E_n^I - E_{rot}^I(\omega_{rot})$ значения энергии уровней с вычетом энергии вращения остова в зависимости от угловой скорости ω_{rot} . Тогда в плоскости $\epsilon(\omega_{rot})$ невозмущенные полосы $E_{0n} - \omega_{rot}j_{0n}$ имеют вид наклонных прямых, которые из-за кориолисова взаимодействия переходят в плавные кривые. В качестве независимой переменной берется угловая скорость вращения остова, которая обладает монотонной зависимостью от спина I в отличие от эффективной угловой скорости вращения ядра (1.1.31), нерегулярности которой обусловлены выстраиванием углового момента. Выстроенный угловой момент, определяемый на этом графике наклоном (1.1.34) характеризует внутреннюю структуру состояния.

§1.2 Энергетические и радиационные особенности ядер с $N=90$

К настоящему времени скопилось большое количество спектроскопической информации в области *yrast* состояний ядер с $N=88-98$ редкоземельной области. Особенности ядер, связанные с высокоспиновыми состояниями, удобно изучать в терминах выстраивания слабосвязанных с деформированным остовом нуклонов с большим значением j около поверхности Ферми. Наиболее интересными объектами с этой точки зрения являются ядра, расположенные вблизи границ областей сплошной деформации, т.е. ядра начала редкоземельной области.

При изучении высокоспиновых состояний существуют подходы, которые так или иначе фиксируют некоторые скачкообразные изменения определенных характеристик ядер при быстром вращении. Например в [34,35] природа $N \sim 90$ переходной области была изучена на графике зависимости энергии Ферми λ от числа нейтронов N . Скачкообразное изменение λ для данного элемента ассоциируется с изменением плотности энергии Ферми, который происходит благодаря изменению квадрупольного поля (т.е. деформации) ядра. На этом графике такое изменение аналогично бэкбендингу на графике зависимости спина I от угловой частоты вращения ω . Последнее случается благодаря изменениям связи между нуклонными парами, в первую очередь, имеющими большое значение j , индуцируемым вращением ядра и последующим их выстраиванием, образуя выстроенную s -полосу, пересекающуюся с ротационными полосами. Такое пересечение между различными полосами оказывается функцией изменения энергии Ферми, а по величине взаимодействия между ними можно определить бэкбендинг.

Но общепринято для изучения высокоспиновых характе-

ристик ядер проводить анализ спектроскопической информации в терминах рауссианов [36-38;39], основанных на модели принудительного вращения, последовательно учитывающей связь коллективных и одночастичных характеристик вращающегося ядра. При этом изучаются ротационные полосы, используя диаграммы одночастичных уровней, энергии которых рассматриваются в зависимости от угловой скорости вращения ядра ω , как независимой переменной, что дает определенные преимущества при описании выстраивания внутреннего углового момента. Такой подход применяется в [39] для систематизации экспериментальных данных о ядрах редкоземельных элементов. Но при реализации его сталкиваются с некоторыми трудностями - определение выстроенного углового момента, основанное на методике экстраполяции [33], дает неоднозначные результаты и волновые функции модели не являются собственными функциями полного углового момента. Да и при рассмотрении ядер в окрестности $N = 90$, отличающихся сильной зависимостью деформации и момента инерции от скорости вращения ядра, вынуждены значительно перенормировать экспериментальное значение параметра неадиабатичности вращения. Подобные недостатки устранены в модифицированном подходе к задаче кориолисова смешивания высокоспиновых состояний, и здесь дается единое описание энергетических и радиационных особенностей высокоспиновых состояний ядер редкоземельной области с $N = 90$ и $A \sim 130$ в рамках этой модели.

§1.2.1 Энергетические особенности

При теоретическом описании этих ядер сложилась общая схема расчета энергии ротационных полос с выстраиванием углового момента. Связано это с тем, что мы рассматриваем экспериментальные энергии только двух ротационных полос

с высокими спинами – *yraст* и *yrare*-полос и для их теоретического описания обычно бывает достаточным ограничиться базисом состояний из нескольких полос (основной (*gr*), вибрационных (β , γ) и выстроенных (*sn*)).

При этом особенности поведения энергии ротационных полос и процессы, связанные с выстраиванием углового момента, более наглядно представляются на предложенной нами диаграмме $\epsilon^I(\omega_{rot}) = E^I - E_{rot}(\omega_{rot})$, на которой энергии вращательных уровней E^I за вычетом энергии вращения остова $E_{rot}(\omega_{rot})$, параметризуемых по Харрису (1.1.4), рассматриваются в зависимости от угловой скорости вращения остова ω_{rot} , которая меняется монотонно в отличие от эффективной скорости вращения ядра (1.1.31). Здесь выделяются отрезки горизонтальных прямых, $\epsilon_{gr}^I(\omega_{rot}) = 0$ и $\epsilon_{vib}^I(\omega_{rot}) = E_{vib}^I$, соответствующие основной, β - и γ -вибрационным полосам, а также отрезки наклонных прямых $\epsilon_s^I(\omega_{rot}) = E_{0s}^I - \omega_{rot}j_{0s}$, описывающие выстроенные полосы с головной энергией E_{0s}^I и выстроенным угловым моментом $j_{0s} = -\frac{d\epsilon_s^I}{d\omega_{rot}}$, определяемым наклоном прямой [44].

В рамках данной модели были проведены расчеты энергетического спектра ядер ^{154}Gd , ^{156}Dy , ^{158}Er и ^{160}Yb . Ниже мы на основе данной схемы, для каждого ядра в отдельности описываем поведение энергии уровней с ростом частоты вращения остова ω_{rot} .

^{154}Gd

Энергетический спектр этого ядра изучен в [40-42]. В спектре ядра ^{154}Gd наблюдается длинная ротационная полоса на β вибрационном состоянии, вызывающая бэкбендинг в *yraст*-полосе, которая прослежена до спина $I^\pi = 24^+$, а основная полоса идентифицирована до спина $I^\pi = 26^+$. Особенность β -полосы в этом ядре состоит в том, что ее уровень $(18^+) = 4.0168$ МэВ очень близко расположен уровню $(18^+) = 4.088$

МэВ основной полосы, т.е. состоит из равных компонентов gr и s полос. Поэтому авторы работы [43] рассматривают второй из-них как уровень gr -полосы, а авторы оригинальных работ – относят к s -полосе. Но если требовать условие, чтобы энергии переходов с каждой из полос были плавными, то это может подтвердить правильность выводов авторов оригинальных работ. Выстроенной $s1$ -полосой, начиная с этого спина, становится β -полоса, которая вызывает бэкбендинг в полосе основного состояния. $Yrare$ -полоса, состоящая из β -полосы до спина $I=16$, пересекается с $s1$ -полосой при $I^\pi = 10^+ - 12^+$, которая пересекается с gr -полосой при $I^\pi = 18^+$. Здесь отсутствует вторая выстроенная $s2$ -полоса, которая возможно, связана с тем, что в этом ядре достигается заполнение протонами полумагической подболочки с $Z=64$.

Из расчетов по такой схеме видно, что в продолжении $s1$ полосы выше $I^\pi > 24^+$ имеется аномалия, т.е. она изменяет наклон и приобретает характер антивыстроенной $a1$ полосы с отрицательными значениями головной энергии $E_{0an} < 0$ и выстроенного момента $j_{0an} < 0$. Но вообще, включение антивыстроенных полос в базис состояний, приводит к появлению лишних решений, которые оказываются ниже $yrast$ -линии. Для устранения их предлагается комбинировать эти полосы с s -полосой, вводя кориолисово взаимодействие между ними j_{as} . Такая комбинированная полоса имеет в рассматриваемой модели энергию

$$E_{sa}^I = \frac{1}{2} \left[E_s + E_a + \sqrt{(E_s - E_a)^2 + 4\omega_{rot}^2 j_{as}^2} \right],$$

с $E_s = E_{0s} - \omega_{rot} j_{0s}$ и $E_a = E_{0a} - \omega_{rot} j_{0a}$. Тогда выбирая лишь одно решение, включаем их в число базисных состояний, с помощью которых возможно описать состояния положительной четности до самых высших наблюдаемых спинов, решая задачу кориолисова смешивания ротационных полос.

Но специфичность данного ядра проявляется при описании спектра основной gr полосы после ее пересечения с $s1$ -полосой: из-за магического характера его протонной подоболочки, gr -полоса вместо того, чтобы приобрести после пересечения полос природу $s2$ полосы, проявляет характеристики $a2$ полосы. Поэтому мы вынуждены ее комбинировать непосредственно с gr полосой и рассматривать как ее продолжение, проявляющееся после пересечения с $s1$ полосой. Для описания бэкбендинга можно успешно воспользоваться идеей пересечения полос, которая на $\epsilon(\omega_{rot})$ -диаграмме означает, что график при так называемой частоте пересечения ω_{cn} , благодаря взаимодействию полос, приобретает наклон, а по величине матричного элемента взаимодействия можно судить о форме бэкбендинга, т.е. малое значение которого говорит о резком проявлении бэкбендинга. В данном ядре пересечение gr -полосы с выстроенной $s1$ -полосой происходит при частоте $\omega_{c1} = 0.34$ МэВ, а м.э. взаимодействия $j_{gr s1}$ оказался равным 0.12, который говорит о том, что в данном ядре бэкбендинг проявляется довольно хорошо.

^{156}Dy

Энергии высокоспиновых состояний положительной четности в рамках этой модели для этого ядра были рассчитаны нами в [44], энергетический спектр которого можно считать хорошо изученным [45,42]. В спектре ^{156}Dy идентифицированы уровни основной ротационной полосы до спина $I^\pi = 36^+$ и β -полосы вплоть до $I^\pi = 42^+$. Здесь также имеются близко расположенные уровни $E(16^+) = 3.499$ МэВ и $E(16^+) = 3.552$ МэВ, но в отличие от предыдущего ядра, их структура сильно различается: первый относится к gr -полосе, а второй – s -полосе. Наши расчеты показывают, что пересечение gr и $s1$ полос происходит при $I^\pi = 16^+$, а β и $s1$ полос – более рано – при $I = 8^+ - 10^+$. В этом ядре $grast$ -полоса состоит из gr -полосы до спина $I^\pi = 16^+$, затем с уровня 18^+ – из $s1$ -полосы

с выстроенным угловым моментом $j_{s1} = 10.8\hbar$, которая приобретает антивывстроенный характер при $I^\pi = 24^+ - 26^+$. *Yrare*-полоса состоит из β -вибрационного состояния до уровня $I^\pi = 8^+$, потом до $I^\pi = 16^+$ из выстроенного $s1$ -состояния с $j_{s1} = 10.8\hbar$ далее до спина $I^\pi = 24^+ - 26^+$ из $s2$ -состояния с $j_{s2} = 2.92\hbar$ и наконец, до $I^\pi = 36^+$ – из $a2$ -полосы.

В отличие от предыдущего ядра здесь имеется выстраивание также и в основной полосе, начинающееся при $I^\pi \geq 16^+$ с характеристиками $s2$ -полосы. В то же время еще высказывается близость его протонной подболочки к магической: выстраивание начинается сразу же после пересечения полос с небольшим значением выстроенного момента $j_{s2} \approx 3\hbar$. При значениях $I^\pi = 24^+ - 26^+$ выстраивание в этой полосе переходит на антивывстраивание, поэтому как и в случае ^{154}Gd , вводим комбинированную $s2a2$ -полосу. Расчеты показывают, что *gr* полоса почти не взаимодействует с этой полосой, поэтому ее можно рассматривать как продолжение *gr* полосы, которая включается после ее пересечения с $s1$ полосой. Из результатов расчетов видно, что это ядро еще отличается и малостью взаимодействия между комбинированными $s1a1$ и $s2a2$ полосами, сказывающееся также на значении j_{grs1} , малостью которого обусловлен резкий бэкбендинг в основной полосе.

^{158}Er

Энергетический спектр этого ядра также хорошо изучен [42]. В ядре ^{158}Er основная полоса доходит до уровня со спином $I^\pi = 30^+$, а выстроенная полоса, начиная со спина $I^\pi = 12^+$, простирается даже до $I^\pi = 46^+$, γ -полоса обрывается на уровне $I^\pi = 10^+$, которую мы рассматриваем как начало *yrare*-полосы.

В поведении *yrast*-полосы ядра ^{158}Er в области спинов до $I^\pi = 42^+$ наблюдается выстраивание углового момента дважды: первое выстраивание с $j_{s1} = 12.42\hbar$ происходит при спи-

нах $I^\pi = 12^+ - 14^+$ и второе с $j_{s2} = 8.2\hbar$ – при $I^\pi = 26^+ - 28^+$. В *yrare* – 1-полосе первое выстраивание происходит при спинах $I^\pi = 8^+$ из-за пересечения γ и *s1*-полос и второе при спинах $I^\pi = 14^+ - 16^+$ при пересечении с *s2*-полосой. Второе выстраивание в *yrast*-полосе и первое в *yrare1* происходят, не проявляя резкого бэкбендинга из-за значительных величин м.э. взаимодействия Кориолиса.

Структура *yrare*-полосы довольно сложная и с возрастанием спина уровня она имеет следующую последовательность компонентов: γ -вибрационных состояний до спина $I^\pi = 8^+$, затем из выстроенных *s1*-состояний, и после пересечения *gr* и *s1*-полос из выстроенных *s2*-состояний с $j_{s2} = 8.2\hbar$. Пересечение *s1*-полосы с γ -вибрационной происходит при спине $I^\pi = 8^+ - 10^+$, а *gr*-полосой – при $I^\pi = 12^+ - 14^+$.

Процесс антивыстраивания в *yrast*-полосе, также происходит два раза: первое – *a1* – при спине $I^\pi = 24^+ - 26^+$, являющееся общей и для *yrare*-полосы, выстраивание в которой начинается несколько позже, при $I^\pi = 26^+ - 28^+$, а второе – в области более высоких спинов, при $I^\pi > 32^+$. Таким образом, роль кориолисовых сил сильно возрастает при увеличении j пары нуклонов и область наблюдаемых спинов оказывается достаточной для проявления повторных выстраиваний внутри одной полосы. Это в свою очередь, приводит также и к сильному взаимодействию между *s1a1* и *s2a2*-полосами, в результате чего в отличие от предыдущих ядер, *a2*-полоса оказывается расположенным ниже *a1*-полосы. Итак, получаем следующие комбинированные полосы: *s1a1*, где *s1* является *yrast*-полосой, а *a1* – *yrare*-полосой и *s2a2*, являющаяся продолжением *gr*-полосы в области после пересечения ее с *s1*-полосой.

^{160}Yb

Для этого ядра спектроскопические данные взяты из [42].

Структура низкоспиновой части спектра оказалась сравнительно сложной: кроме *yrast*-полосы здесь имеются две полосы положительной четности, начинающиеся с уровня с $I^\pi = 0^+$ и энергиями 1.085 МэВ и 1.2218 МэВ. Их можно рассматривать в качестве начал некоторых новых полос, но они прослежены лишь до уровня $I^\pi = 2^+$. Мы выбрали γ -полосу, которая доходит лишь до спина $I^\pi = 4^+$, и включили в *yrare*-полосу, как ее начало. Продолжением *yrare*-полосы мы считаем полосу, начинающуюся с уровня $I^\pi = 12^+$ и энергией =3.1391 МэВ, основанную над *yrast*-полосой. При этом уровень $E(12^+) = 2.9621$ МэВ после проявления бэкбендинга в *yrast*-полосе, служит началом выстроенной полосы, которая продолжается до $I^\pi = 40^+$. Расчеты хорошо воспроизводят *yrast*-полосу, но в то же время структура волновой функции *yrare*-полосы довольно сложная: она состоит из γ -полосы при $I^\pi = 2^+ - 4^+$, при $I^\pi = 14^+ - 18^+$ из *s2*-полосы, при $I^\pi = 10^+$ – из *s1*-полосы и при $I^\pi = 12^+$ – *gr*-полосы. В *yrast*-полосе ядра ^{160}Yb происходит выстраивание углового момента с $j_{s1} = 15.4$ при спинах $I^\pi = 10^+ - 12^+$. Такое большое его значение приводит к появлению длинной выстроенной *s1*-полосы. Но исследование *yrare*-полосы оказалось затрудненной из-за отсутствия экспериментальных уровней при спинах $I^\pi = 6^+ - 10^+$. Нерегулярности в расчетных значениях энергий начинаются при спинах $I^\pi = 8^+ - 10^+$, что можно рассматривать как тенденцию к выстраиванию в *yrare*-полосе с характеристиками *s1* полосы. После пересечения *gr*-полосы с *s1*-полосой формируется *s2*-полоса, заканчивающаяся при $I^\pi = 18^+$, которая является самым высоким наблюдаемым спином *yrare*-полосы. Из-за больших значений $j_{\gamma s2}$ бэкбендинг в *yrare*-полосе почти не проявляется.

Необходимо отметить, что здесь предсказываем расчетные значения указанных уровней, неопределенных экспериментально.

Значение м.э. $j_{grs1} = 0.0001$ говорит об очень резком бэкбендинге в основной полосе. Еще отметим, что при представлении бэкбендинга в виде зависимости $I(\omega_{ef})$ угловая скорость вращения вблизи точки пересечения полос уменьшается, которое означает, что часть углового момента преобразовывается во внутренние степени свободы, приводя к замедлению вращения ядра как целого. Такие резкие изменения свойств ядра с возрастанием спина соответствуют переходу к другой полосе. Энергии уровней выстроенной полосы с ростом спина постепенно становятся меньше энергий соответствующих уровней полосы основного состояния. В нашем же случае, как мы видели, эти полосы можно рассматривать в виде одной комбинированной полосы, с помощью которой описывается поведение энергии уровней до самых высоких спинов.

§1.2.2 Радиационные особенности

Известно, что четно-четные ядра с $N = 90$ характеризуются увеличением при высоких спинах приведенных вероятностей $\mathcal{B}(E2)$ -переходов вдоль основной полосы, по сравнению с ядрами, у которых отсутствуют ротационные полосы [46,47]. Такое усиление тесно связано с изменениями параметров квадрупольного и спаривательного полей. Измерение времен жизни изотопов Dy с $N = 90 - 94$ указывают на уменьшение $\mathcal{B}(E2)$ в выстроенной s -полосе, по сравнению с gr -полосой, указывая при этом на потерю коллективности [48]. В ядрах $N \approx 90$ выстроенными s -полосами являются двухквазичастичные состояния, состоящие из выстроенных $i_{13/2}$ нейтронов, но в то же время остается невыясненным ответ на вопрос о том, каким образом влияют на форму этих ядер возбуждения тех или иных квазичастиц.

В работе [49] получены переходные квадрупольные момен-

ты Q_t для gr полос (посредством измерения величин $\mathcal{B}(E2)$ [50]) для ядер с $N = 90$ и изображены в зависимости от частоты вращения остова ω_{rot} . При более низких значениях ω_{rot} величина Q_t достигает максимума для ^{154}Gd и ^{156}Dy , которые лежат посередине замкнутой протонной оболочки с $Z = 50$ и $Z = 82$. При более высоких значениях частоты вращения наблюдается монотонное изменение Q_t вследствие плавного увеличения продольной деформации. Однако для ядра ^{156}Dy при спине $I^\pi = 6^+$ наблюдается резкий спад величины Q_t , который нельзя отнести к ошибкам эксперимента, т.к. экспериментальные неопределенности оказались намного меньшими [51]. Причину такого резкого спада следует отнести к подбираемым параметрам, хотя не ясно, почему аналогичное явление не наблюдается для других изотонов.

В рамках феноменологической модели приведенные вероятности $E2$ -переходов для данных ядер были вычислены используя собственные функции решения уравнения Шредингера с гамильтонианом (1.1.3) между уровнями $yrast$ -полосы. Значения параметров матричных элементов $\mathcal{B}(E2)$ -переходов q и q'_ν были найдены из условия согласования расчетных значений $\mathcal{B}(E2)$ с экспериментальными [52] для переходов $2_{gr}^+ \rightarrow 0_{gr}^+$, $2_\beta^+ \rightarrow 0_{gr}^+$ и $2_\gamma^+ \rightarrow 0_{gr}^+$. Мы воспользовались для всех ядер лишь усредненными значениями параметров q'_0 и q'_2 положив $q' \equiv q'_\nu$, с целью сокращения их числа.

Данная модель воспроизводит наблюдаемый на эксперименте резкий спад $\mathcal{B}(E2)$ при пересечении gr и s -полос, но в то же время она не в состоянии описать общее поведение $\mathcal{B}(E2)$ без изменения квадрупольного момента ядра при его вращении. Поэтому необходимо привлечь дополнительные предположения для описания изменения параметров β и γ -деформаций при вращении ядра. С этой целью воспользуемся выражением переходного квадрупольного момента Q_t , определяемого из $E2$ -переходов между уровнями ротацион-

ной полосы [53]

$$Q_t(I \rightarrow I - 2) = \sqrt{\frac{12}{5\pi}} Z e R_0^2 \beta \cos(30^\circ + \gamma) \quad (1.2.1)$$

и допустим зависимость параметров деформации от угловой скорости вращения остова в простейшей форме:

$$\beta(I \rightarrow I - 2) = \beta_{20}(1 + b\omega^2(I)), \quad (1.2.2)$$

$$\gamma(I \rightarrow I - 2) = g\omega^2(I), \quad (1.2.3)$$

где

$$\omega^2(I) = \frac{\omega_{rot}^2(I) + \omega_{rot}^2(I - 2)}{2},$$

b и g – подгоночные параметры. При такой параметризации деформации формы ядра удобно представить на графике величину (см. [44])

$$\sqrt{R(E2)} = \sqrt{\frac{\mathcal{B}(E2; I \rightarrow I - 2)}{\mathcal{B}_{rot}(E2; I \rightarrow I - 2)}},$$

выражающую отклонение приведенной вероятности $\mathcal{B}(E2; I \rightarrow I - 2)$ от адиабатического приближения $\mathcal{B}_{rot}(E2; I \rightarrow I - 2)$, в зависимости от квадрата среднего значения угловой скорости вращения остова ω^2 . Так как величина $\sqrt{R(E2)}$ пропорциональна $\beta(I) \cos(60^\circ + \gamma(I))$, то экспериментальные значения ее не дают возможности определить одновременное изменение параметров $\beta(I)$ и $\gamma(I)$. Поэтому предположим, что форма ядра в состояниях gr полосы остается аксиально-симметричной ($g = 0$), но изменяется лишь продольная деформация $\beta(I)$ под действием центробежных сил.

В случае ядра ^{156}Dy $\sqrt{R(E2)}$ в области спинов до пересечения полос близка к линейной. Такое поведение $\sqrt{R(E2)}$ между уровнями основной ротационной полосы можно описать при значении параметра $b = 4.0$. В дальнейшем будем

считать таким же значение параметра $b = 4.0$ для всех ротационных полос.

Из расчетов следует, что область спинов после пересечения полос, соответствующая $E2$ -переходам между уровнями выстроенной полосы, имеет характер ниспадающей ветви гармонической функции [44], которую можно описать появлением положительного знака γ -неаксиальности в выстроенном состоянии. Из условия наилучшего согласия расчетных значений $\sqrt{R(E2)}$ с экспериментальными данными для этой области спинов найдено значение параметра $g_s = 4.0$.

Поведение величины $\sqrt{R(E2)}$ находится в соответствии с поведением $\epsilon^I(\omega_{rot})$ для *yrast* полосы. Линейный рост $\sqrt{R(E2)}$ до $I^\pi = 12^+$ соответствует переходам вдоль *yrast* полосы, после этого происходит пересечение полос. Необходимо отметить, что использование оптимальных значений параметров, найденных при расчете энергии уровней, приводит к пересечению *gr* и *s* полос при спинах $18^+ \rightarrow 16^+$, а данные по радиационным переходам указывают, что такое пересечение происходит при $16^+ \rightarrow 14^+$. Для согласования этого расхождения мы вынуждены были несколько изменить оптимальные значения параметров: $j_{0s1} = 10.7\hbar$, и $E_{0s1} = 3.40$ МэВ. В этой области спинов значение $\mathcal{B}(E2)$ резко падает из-за большого различия структуры волновой функции начального и конечного состояний. Затем следуют $E2$ -переходы вдоль *s* полосы, значения которых испытывают подъем и плавное уменьшение с ростом γ -неаксиальности выстроенных состояний.

Однако экспериментальные значения $E2$ -переходов между уровнями со спинами $I^\pi > 24^+$ имеют большие погрешности, что не позволяет выявить с хорошей достоверностью поведение $\mathcal{B}(E2)$ с ростом спина.

§1.3 Энергетические и радиационные особенности ядер с $A \sim 130$

В данном параграфе мы распространили описанную модель на четные изотопы $^{124,126,128,130}\text{Ba}$ для описания явления расщепления основной ротационной полосы и выявления влияния выстраивания углового момента на радиационные переходы в области расщепления. Нашей целью здесь является обсуждение энергетических и радиационных особенностей этих ядер в рамках данной модели.

В 60-х г. были высказаны мнения о существовании некоторой новой области деформации. В ранних работах наличие деформации доказывалось только по небольшой энергии возбуждения первых уровней 2^+ [54]. К тому времени были известны лишь несколько ядер из этой новой области, в число которых входили и четно-четные изотопы $^{124-130}\text{Ba}$.

К настоящему времени количество ядер, в которых измерены энергии уровней полос основных состояний довольно много и интересы исследователей переносятся на исследование состояний, структура которых определяется взаимосвязью различных степеней свободы ядра: коллективных и одночастичных, ротационных и вибрационных, а также квадрупольных и октупольных. Как и в случае переходных ядер из редкоземельной области, и в этом случае переходные ядра из новой области деформации являются интересными объектами для теоретического исследования, поскольку в них сложным образом переплетаются одночастичные движения, коллективные колебания и вращения и т.д. Интерес к ядрам в области $A \approx 130$ стимулирован также предсказанием деформации в середине оболочки $N = 50 - 82$. Однако различные микроскопические расчеты для середины этой области показали, что ситуация здесь далеко не такая ясная, как в случае классически деформированных ядер, поэтому в таких случа-

ях более рационально использовать феноменологические модели: благодаря небольшому числу параметров они позволяют хорошо аппелировать эксперименту.

Исследование ядер при высоких спинах основано на хорошо известных моделях, описывающих вращение ядер при низких спинах. Последовательность уровней в ротационной полосе и их энергии существенно зависят от момента инерции ядра J , который, в свою очередь, зависит от движения независимых частиц в ядре. Связь между ротационным описанием ядер и движением независимых частиц введена в МПВ, основные положения которой изложены в гл.3. Модель оболочек с принудительным вращением успешно применяется для анализа высокоспиновых состояний переходных ядер. В работе [55] исследовалась структура полос в ^{134}Ce , где обнаружены две полосы, которые можно идентифицировать как s -полосы и обсуждается их структура. Аналогичный расчет также был проведен для ^{130}Xe в работе [56]. В работе [57] была предложена простая модель для описания бэкбендинга в основных, β и γ -полосах, основанная на модели переменного момента инерции [58] с учетом взаимодействия полос в виде, предложенном в [59]. Рассчитанные на основе данной простой модели энергии возбужденных состояний $yrast$ и $yrare$ -полос сравниваются с экспериментом и расчетами в рамках модели две квазичастицы плюс ротатор для изотопов бария. Видно, что простая модель описывает экспериментальные данные не хуже, а для ^{126}Ba даже лучше, чем полумикроскопические расчеты [60-63].

§1.3.1 Энергетические особенности изотопов бария

Мы ограничились рассмотрением в спектрах изотопов бария уровнями gr -основной, γ -вибрационной и sn ($n = 1, 2$)-выстроенных ротационных полос. Тогда задача сводится к

решению уравнения Шредингера $\hat{H}\Psi_\nu^I = E_\nu^I\Psi_\nu^I$ с гамильтонианом (1.1.3), которое будем искать в виде разложения $\Psi_{\nu n}^I = \sum a_{n\nu}^I |IMKn\rangle = a_1^I |IMK\nu\rangle + a_2^I |IMjj_0sn\rangle$, где ν представляет собой gr и γ -вибрационные состояния, а $n = 1, 2$ – выстроенные s -состояния. Поскольку кориолисовым взаимодействием между γ и gr полосами и между $s1$ и $s2$ полосами можно пренебречь, то выражение для энергии расщепления gr -полосы на две ветви можно представить в аналитической форме

$$E_n^I = E_{rot}^I(\omega_{rot}) + \frac{1}{2}(\epsilon_n^I - \sqrt{(\epsilon_n^I)^2 + 4\omega_{rot}^2 j_{grsn}^2}), \quad (1.3.1)$$

где $j_{grsn} = \langle IMKgr | \hat{j}_x | IMjj_0sn \rangle$ – матричные элементы кориолисова взаимодействия gr и sn ($n = 1, 2, \dots$) полос и $\epsilon_n^I = E_{sn} - \omega_{rot}j_{sn}$ – собственные значения гамильтониана $H' = \hat{H}_{in} - \omega_{rot}j_x$, т.е. энергии уровней за вычетом энергии вращения остова. Аналогичное выражение имеем и для энергии взаимодействия γ и sn ($n = 1, 2, \dots$)-ротационных полос.

Выражение (1.3.1) описывает энергии уровней комбинированных ротационных $gr + s1$, $gr + s2$ и $\gamma + s3$ полос до самых высоких спинов при соответствующем подборе оптимальных значений подгоночных параметров.

В рамках феноменологической модели кориолисова смешивания высокоспиновых состояний [44] получено в [64] простое описание энергии вращательных уровней ядра ^{126}Ba , в спектре которого наблюдается расщепление основной ротационной полосы на две сильнозаселяемые ветви, связанные с одновременным выстраиванием углового момента пары нейтронов и пары протонов из сферической $h_{11/2}$ подболочки. В этом ядре нейтроны лежат выше середины указанной подболочки, а протоны находятся в начале, но процесс выстраивания происходит почти одновременно так, что gr -полоса, расщеп-

ляясь на две выстроенные $s1$ и $s2$ -полосы, образует соответствующую "вилку"полос.

Нами изучены в рамках феноменологической модели кориолисова смешивания высокоспиновых состояний четные изотопы $^{124-130}\text{Ba}$. Для описания энергии уровней были использованы оптимальные значения подгоночных параметров (по критерию χ^2). Ими являются инерциальные характеристики вращающегося остова J_0 и J_1 , которые определены на основе параметризации Харриса (1.1.4) с использованием экспериментальных значений энергии уровней gr -полосы до $I^\pi \leq 10^+$; головные энергии E_{sn} и выстроенные угловые моменты j_{0n} sn -состояний ($n = 1, 2$), а также матричные элементы кориолисова взаимодействия ротационных полос $j_{gr s1}$, значения которых приведены в работе [65].

Необходимо отметить, что выстроенный угловой момент двух ветвей расщепления основной полосы для большинства ядер почти совпадает [65].

Как следует из (1.1.25), матричные элементы $E2$ -переходов в выстроенной полосе отличны от нуля только при спине $I > j_0$. В эти выражения входят угловые моменты j, j_0 пары нуклонов нейтронной и протонной $h_{11/2}$ -подоболочки, участвующих в выстраивании углового момента, для которых значение полного углового момента пары $j = 10\hbar$, а значения выстроенных моментов j_0 для sn -полос получены для каждого ядра в отдельности из условия наилучшего согласия расчетных энергий уровней с экспериментальными. С целью выявления влияния выстраивания углового момента на радиационные переходы было проведено сравнение отношений переходов $\mathcal{B}(E2; I sn \rightarrow I - 2sn')/\mathcal{B}(E2; I sn \rightarrow I - 2sn)$.

Ниже обсуждаются результаты численных расчетов для каждого ядра.

^{124}Ba .

Энергетический спектр ядра хорошо изучен, мы воспользо-

вались данными из [42]. Высокоспиновые уровни *yrast*-полосы идентифицированы до $I^\pi = 20^+$, а γ -полосы до $I^\pi = 8^+$ которая, к сожалению, при этом обрывается. Выше уровня $E(10^+) = 2686$ КэВ *gr*-основной полосы происходит ветвление на две полосы положительной четности, основаниями которых являются уровни с $E(12^+) = 3434$ КэВ и $E(12^+) = 3690$ КэВ, продолжения которых мы рассматриваем как *yrast* и *yrare*-полосы соответственно. В такую схему мы не включали уровни с $E(8^+) = 2646$ КэВ и $E(10^+) = 3096$ КэВ, не укладывающиеся в наши расчеты [65]. Частота перехода с $E(12^+) = 3690$ КэВ на уровень $E(10^+) = 3096$ КэВ примерно вдвое меньше по сравнению с переходом с того же уровня на уровень $E(10^+) = 2686$ КэВ, поэтому волновая функция этой части спектра *yrare*-полосы имеет сложную структуру.

По нашим расчетам пересечение *gr*-полосы с *s1*-полосой происходит в районе спинов $I^\pi = 10^+ - 12^+$, а с *s2*-полосой – при $I^\pi = 12^+ - 14^+$, соответствующие частоты пересечений которых равны $\omega_{c1} = 0.43$ МэВ и $\omega_{c2} = 0.47$ МэВ. В [66] приводятся аналогичные данные, вычисленные в рамках МПВ. По их же расчетам, пересечение *gr* и *s1* полос происходит при $\omega_{c1} = 0.37$ МэВ, заметно различающееся от нашего, а значения выстроенных моментов почти совпадают: $7\hbar$ (по МПВ) и $6.9\hbar$.

Как уже было сказано, обрыв γ полосы при спине $I^\pi = 8^+$ не позволяет судить о выстраивании в этой полосе и это обстоятельство в свою очередь приводит также к некоторым неоднозначностям при вычислении матричного элемента $j_{\gamma s3}$.

Из приведенных в таблице значений инерциальных параметров J_0 и J_1 мы видим, что в этом ядре они имеют наибольшие значения. Это говорит о том, что с уменьшением числа валентных нейтронов деформация ядра увеличивается, а значение выстроенного момента j_{s2} , связанного с выстраиванием нейтронов из указанной подболочки, уменьшается. Малость

значений матричных элементов j_{grs1} и j_{grs2} указывает на резкое проявление бекбендинга.

¹²⁶Ba.

Энергетический спектр этого ядра считается наиболее хорошо изученным, мы проводили вычисления используя данные из [42]. Четные уровни *yrast* полосы определены вплоть до $I^\pi = 36^+$, *yrare*-полосы до $I^\pi = 22^+$, а γ -вибрационной до $I^\pi = 18^+$. Выше уровня основной ротационной полосы с $E(10^+) = 2943$ КэВ расположены два уровня $E(12^+) = 3748$ КэВ и $E(12^+) = 3889$ КэВ, первый из которых можно отнести к продолжению *yrast*, а второй – к началу *yrare* – 1 полос. Переходы с обоих уровней на уровень $I^\pi = 10^+$ очень интенсивные, а между ними таких переходов нет, вероятно, здесь происходит пересечение полос. Последовательность уровней γ -вибрационной полосы до $I^\pi = 10^+$ и энергией 3261 КэВ составляют *yrare* – 1-полосу, а начиная с уровня $I^\pi = 12^+$ и =4122 КэВ мы включили его в рассмотрение как новую *yrare* – 2 полосу вплоть до $E(18^+) = 6531$ КэВ.

Результаты расчетов показывают, что пересечение основной ротационной полосы с *s1* полосой происходит в области $I^\pi = 10^+ - 12^+$, а с *s2*-полосой при $12^+ - 14^+$, которым соответствуют значения частот пересечений $\omega_{c1} = 0.47$ МэВ и $\omega_{c2} = 0.50$ МэВ, т.е. по сравнению с предыдущим ядром она увеличивается. Приведенные в работе [67] значения, вычисленные в рамках МПВ, составляют 0.34 МэВ и 0.44 МэВ соответственно. Выстроенный угловой момент j_{s2} для *s2*-полосы оказался в этом ядре равным моменту j_{s1} для *s1*-полосы. Спектроскопические данные позволяют судить о выстраивании и в γ полосе, которое происходит при спине $I^\pi = 8^+$ и имеет значение $j_{s3} = 8.67\hbar$. Близкие значения выстроенных моментов всех трех полос могут указать на их близкую внутреннюю структуру. Матричные элементы кориолисова взаимодействия данных ротационных полос указывают на слабое

проявление бэкбендинга в γ -полосе из-за его большого значения.

Инерциальные параметры этого ядра имеют меньшие значения по сравнению с ^{124}Ba : момент инерции J_0 изменяется незначительно, но параметр неадиабатичности J_1 уменьшается резко. Такое уменьшение сказывается на свойствах этого ядра – точность расчетов улучшается по сравнению с прежним ядром.

^{128}Ba .

Высокоспиновые уровни идентифицированы в этом ядре до $I^\pi = 18^+$ для *yrast*-полосы и до $I^\pi = 14^+$ для γ -вибрационной полосы [42]. Основная *gr*-полоса при спине $I^\pi = 10^+$ с энергией $E=3082.3$ КэВ разветвляется на три полосы, начинающиеся с $E(10^+) = 3522$ КэВ, $E(12^+) = 4112$ КэВ и $E(12^+) = 3988$ КэВ и с которых имеются очень интенсивные $E2$ -переходы на данный уровень. Авторы [68] предлагают рассмотреть уровень $E(12^+) = 4112$ КэВ как продолжение *gr*-полосы, но включение его в нашу схему приводит к большим расхождениям расчетных энергий по сравнению с экспериментальными, поэтому мы были вынуждены его исключить из рассмотрения. Уровень $E(10^+) = 3522$ КэВ в принципе представляет начало новой *yrare*-полосы, но он также плохо воспроизводится, поэтому мы принимаем за начало *yrare1*-полосы уровень $E(12^+) = 4018$ КэВ. В области спинов $12^+ - 14^+$ имеются сильные $E2$ -переходы между двумя ветвями расщепления с 14^+ *yrast*-полосы на 12^+ *yrare*-полосу и наоборот, т.е. происходит пересечение полос.

Выстроенные моменты этих ядер несколько различаются, но при этом соблюдается монотонное изменение j_{s2} от ядра к ядру: $j_{s1} < j_{s2}$ для ^{124}Ba , $j_{s1} \approx j_{s2}$ для ^{126}Ba , $j_{s2} > j_{s1}$ в этом ядре и далее в следующем. В работе [69] выполнены аналогичные расчеты в рамках МПВ в деформированном потенциале Саксона-Вудса, результаты вычислений которых

представлены на диаграммах раусианов. Их результаты указывают на пересечение gr и $s1$ -полос при частоте $\omega_{c1} = 0.37$ МэВ, а для $s2$ -полосы, обусловленной нейтронным выстраиванием, на интервале от 0.25 МэВ до 0.39 МэВ. Выстраивание в γ -полосе начинается как и в предыдущем ядре, со спина $I^\pi = 8^+$, также проявляя слабый бэкбендинг.

Инерциальный параметр J_0 незначительно отличается от таковой у ядра ^{126}Ba , а параметр неадиабатичности J_1 уменьшается, отражая увеличение жесткости ядра и стабильности среднего поля.

^{130}Ba

В этом ядре мы воспользовались данными также из [42]. Уровни gr -полосы определены до $I^\pi = 18^+$, а γ -вибрационной – до $I^\pi = 10^+$. Спектр этого ядра несколько напоминает ^{128}Ba : при спине $I^\pi = 10^+$ с энергией $E=3260$ КэВ имеет место расщепление gr -полосы на две полосы, между которыми находится уровень $E(12^+) = 4222$ КэВ, который скорее всего следует рассматривать как продолжение gr -полосы аналогично с предыдущим ядром. Особенностью спектра этого ядра является наличие выше уровня $E(10^+) = 3260$ КэВ еще двух уровней с такими же спинами и энергиями 3422.6 КэВ и 3789.4 КэВ. Первые два из них имеют близкие энергии и они сильно смешаны благодаря интенсивным переходам между ними. Модель приемлемо воспроизводит результаты при рассмотрении $E(12^+) = 4222$ КэВ как уровень gr -полосы, а $E(14^+) = 4885$ МэВ – как $s2$ -полосы.

Несмотря на соблюдение некоторых общих правил в поведении подгоночных параметров, наблюдаем отклонение в поведении инерциальных параметров: момент инерции J_0 резко падает, а параметр неадиабатичности вращения J_1 наоборот резко возрастает. Поэтому это ядро принадлежит, скорее всего, к переходному типу.

Сравнительно скудная информация о высокоспиновых со-

стояниях и о временах жизни уровней для этой области не позволяет рассматривать, к сожалению, дальнейшее поведение уровней с ростом частоты вращения.

§1.3.2 Особенности радиационных переходов

Абсолютная вероятность радиационного перехода, связанная с временем жизни уровня ядра, чрезвычайно чувствительна к деталям внутриядерного движения. Обусловлено это тем, что она через квадрат м.э. перехода зависит от совокупности физических факторов, определяющих свойства начального и конечного состояний, а именно: от их квантовых характеристик и физической природы, а также от типа и энергии излучения. В то время статические моменты определяются свойствами лишь одного уровня и их зависимость от параметров, характеризующих этот уровень, более монотонна, чем в случае вероятностей электромагнитных переходов.

С экспериментальной точки зрения наиболее полно изучено ядро ^{126}Ba и имеющиеся экспериментальные данные по радиационным переходам [42] позволяют обсудить поведение приведенной вероятности $\mathcal{B}(E2; I \rightarrow I - 2)$ внутри *yrast*-полосы и отношения интенсивности $E2$ -переходов из γ -полосы к интенсивности переходов внутри ее

$$\frac{\mathcal{B}(E2; I\gamma \rightarrow I - 2gr)}{\mathcal{B}(E2; I\gamma \rightarrow I - 2\gamma)}$$

в зависимости от спина I .

Расчеты выполнены с помощью собственных функций (1.1.6-1.1.10) решения уравнения Шредингера с гамильтонианом 1.1.3. Значение параметра q , фигурирующего в выражении для оператора электрического квадрупольного перехода, найдено путем согласования расчетных значений $\mathcal{B}(E2)$ с экспериментальными для перехода $2_{gr}^+ \rightarrow 0_{gr}^+$, а значение q' найдено из

отношения

$$\frac{\mathcal{B}(E2; 4\gamma \rightarrow 2gr)}{\mathcal{B}(E2; 4\gamma \rightarrow 2\gamma)}.$$

Найденные величины оказались равными соответственно 1.366 и 0.088. Здесь для сокращения числа параметров воспользовались одним усредненным значением $q' \equiv q'_\nu$.

С целью выявления влияния на радиационные переходы лишь одного фактора – выстраивания углового момента, мы не учитывали изменения параметров деформации формы ядра с увеличением скорости вращения. Такое допущение лежит в основе многих феноменологических моделей, в которых предполагается, что центробежное растяжение ядра уравновешивается некоторыми центростремительными силами. В нашем случае, следуя выводам авторов [63], такое приближение оправдано тем, что возбуждения нейтронной и протонной пар на $h_{11/2}$ -подоболочке взаимно компенсируют их поляризационное действие на остов, хотя ядро ^{126}Ba является мягким относительно деформаций. Заметим для сравнения, что в ядрах редкоземельной области такое приближение не было оправдано и для воспроизведения приемлемого хода поведения $\mathcal{B}(E2)$ переходов необходимо было допустить зависимость деформации от угловой скорости ω^2 . Также замечено, что значение $\mathcal{B}(E2)$ вдоль выстроенной полосы значительно меньше его значения в gr -полосе [64]. Это связано с появлением в матричном элементе для амплитуды перехода дополнительного множителя – коэффициента Клебша-Гордана, который меньше единицы. Авторы [66] также указывают на уменьшение экспериментального значения $\mathcal{B}(E2)$ между $10^+ - 8^+$ состояниями, что связывают с различием природы между таким замедлением и бэкбендингом.

В рамках модели были вычислены также аналогичные отношения вероятностей $E2$ -переходов между состояниями ветвей расщепления двух полос к переходам внутри одной из них

в области пересечения

$$\frac{\mathcal{B}(E2; 14^+ s1 \rightarrow 12^+ s2)}{\mathcal{B}(E2; 14^+ s1) \rightarrow 12^+ s1}$$

и

$$\frac{\mathcal{B}(E2; 14^+ s2 \rightarrow 12^+ s1)}{\mathcal{B}(E2; 14^+ s2 \rightarrow 12^+ s2)}.$$

Значения квадрупольного момента Q_0 для $E2$ переходов внутри $s1$ или $s2$ -полос брались равными, как и для переходов внутри gr -полосы. Значение параметра q' нормировалось из первого отношения вероятностей $E2$ -переходов и с этим его значением рассчитывали второе отношение, которое оказалось равным 0.17, как и первое отношение. С помощью экспериментальных данных для интенсивностей I_γ находим значения 0.13(4) и 0.19(6), совпадающие в пределах погрешностей. Такой вывод можно объяснить тем, что значения выстроенных моментов одинаковы.

Аналогичные известные экспериментальные значения отношений ветвлений для ^{128}Ba равны соответственно 0.84(5) и 0.50(7), а по расчетам они оказались равными 0.84 и 0.19. Такое различие указывает на различные значения выстроенных моментов.

Таким образом, хотя модель кориолисова смешивания высокоспиновых полос и воспроизводит наблюдаемый на эксперименте резкий спад $\mathcal{B}(E2)$ в области пересечения полос, но остается не выясненным до конца вопрос о замедлении процесса выстраивания по сравнению с таким спадом.

ПРИЛОЖЕНИЕ П1 СИММЕТРИИ ДЕФОРМАЦИИ И ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ

Вследствие сложности описания динамики системы многих квантовых частиц, чрезвычайно важное значение при исследовании атомных ядер приобретают свойства симметрии

ядерных состояний. В ядерной физике они вытекают из инвариантности взаимодействий относительно преобразований различных координатных систем, приводящих к определенным законам сохранения. Инвариантность квантовой системы относительно большинства преобразований носит универсальный характер и только некоторые симметрии оказались неполными.

Известно, что атомное ядро, как квантовая система, инвариантно относительно преобразований пространственных и временных сдвигов, пространственного отражения и вращения. Отсюда следует, что ядерное состояние характеризуется энергией E , импульсом P , четностью $\pi = \pm 1$ и полным угловым моментом I в единицах \hbar . Существование вращательной степени свободы обусловлено нарушением ротационной инвариантности системы, т.е. вращательным спектром обладают ядра, форма которых отличается от сферической. Энергия медленно вращающейся системы в первом приближении равна энергии E_α внутреннего состояния $\Phi_\alpha(q)$, а вращательное движение дает дополнительную энергию, зависящую от вращательного углового момента I . Следовательно, гамильтониан, описывающий такое движение системы, можно разделить на соответствующие внутреннюю и вращательную части

$$\hat{H} = \hat{H}_{in}(q, p) + \hat{H}_{rot}(J_\omega). \quad (\text{П1.1})$$

Внутреннее движение системы описывается координатами q и p , которые определены в системе координат, связанной с телом, и поэтому инвариантны относительно вращений в лабораторной системе координат. Гамильтониан, соответствующий вращению, является функцией угловых моментов J_ω . Собственные состояния гамильтониана (П1.1) имеют вид произведений:

$$\Psi_{\alpha, I} = \Phi_\alpha(q)\varphi_{\alpha, I}(\omega). \quad (\text{П1.2})$$

Каждому внутреннему состоянию α в спектре системы соответствует последовательность вращательных уровней, характеризующихся набором I квантовых чисел углового момента. Ориентация ядра в пространстве задается углами Эйлера $\varpi = (\theta, \phi, \varphi)$, поэтому для определения состояния движения необходимо задавать три квантовых числа. Два из них – это угловой момент I и его проекция на $M = I_z$ на фиксированную ось, а третье можно получить, рассмотрев компоненты I во внутренней системе координат, ориентированной в направлении ω . Внутренние компоненты I_1, I_2, I_3 коммутируют с внешними I_x, I_y, I_z , поскольку они не зависят от ориентации внешней системы. Поэтому в качестве коммутирующего набора угловых моментов мы можем выбрать $I^2, I_z = M, I_3 = K$. Этим значениям квантовых чисел соответствует вращательная волновая функция вида

$$\varphi_{IKM}(\varpi) = \left(\frac{2I + 1}{8\pi^2} \right)^{1/2} D_{MK}^I(\varpi). \quad (\text{П1.3})$$

Функции Вигнера D_{MK}^I , как известно, представляют собой матрицы поворота, осуществляющие неприводимые представления трехмерной группы вращений, так что результат (П1.3) можно получить путем перехода от фиксированной системы координат к повернутой системе, совпадающей с внутренней.

Из инвариантности внутреннего гамильтониана относительно поворотов вокруг оси симметрии следует, что проекция момента I_3 на ось симметрии есть интеграл движения. Таким образом, квантовое число K характеризует внутренний угловой момент и имеет фиксированное значение для вращательной полосы, соответствующей данному внутреннему состоянию. Сказанное выше можно выразить равенством

$$I_3 = K = J_3, \quad (\text{П1.4})$$

где J_3 – соответствующая компонента внутреннего углового момента. Из условия (П1.4) следует, что момент вращения \vec{R} для аксиально-симметричного ядра перпендикулярен оси симметрии.

Большинство ядер имеют форму с аксиально-симметричную форму с зеркальной симметрией относительно плоскости, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной оси симметрии ядра. Зеркальная симметрия относительно плоскости, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной к оси симметрии ядра, обеспечивает инвариантность внутреннего гамильтониана относительно поворота на угол π вокруг одной из осей, перпендикулярной оси симметрии. Такой поворот обеспечивается оператором поворота, например, поворот вокруг оси 2 будет осуществляться оператором $R_2(\pi)$. R -инвариантность системы означает, что поворот R не должен приводить к коллективному вращению. Учесть эти условия можно, потребовав, чтобы оператор R_e , осуществляющий поворот в пространстве внешних переменных, совпадал с оператором R_i , осуществляющим этот же поворот в пространстве внутренних переменных:

$$R_e = R_i. \quad (\text{П1.5})$$

Внутренние состояния с $K = 0$ характеризуются собственными значениями r оператора R_i :

$$R_i \Phi_{r,K=0}(q) = r \Phi_{r,K=0}(q), \quad r = \pm 1. \quad (\text{П1.6})$$

Собственные значения оператора R_i равны ± 1 , так как в системах с целочисловым угловым моментом $R^2 = R_{IM}(2\pi) = 1$. Действие оператора R_e на вращательную волновую функцию (П1.3) сводится к инверсии оси симметрии $\theta \rightarrow \pi - \theta$; $\phi \rightarrow \phi + \pi$, откуда получаем

$$R_e D_{MK=0}^I(\theta, \phi) = (-1)^I D_{MK=0}^I(\theta, \phi). \quad (\text{П1.7})$$

Поэтому условие $R_e = R_i$ означает, что

$$(-1)^I = r, \quad (\text{П1.8})$$

так что вращательный спектр системы содержит состояния либо только с четными, либо только с нечетными значениями I :

$$\begin{aligned} \Psi_{r,IMK=0} &= (2\pi)^{-1/2} \Phi_{r,K=0}(q) D_{MK=0}^I(\theta, \phi) \\ I &= 0, 2, 4, \dots, \quad r = +1, \\ I &= 1, 3, 5, \dots, \quad r = -1. \end{aligned} \quad (\text{П1.9})$$

Ограничение $R_e = r$ наполовину сокращает область независимых углов поворота, тем самым устраняя из вращательного спектра состояния с другими значениями I .

Вследствие R -инвариантности состояния с $K \neq 0$ двукратно вырождены. Мы будем считать K положительным, а повернутые состояния, отвечающие отрицательным собственным значениям J_z , обозначать через \bar{K} :

$$\Phi_{\bar{K}}(q) \equiv R_i^{-1} \Phi_K(q). \quad (\text{П1.10})$$

Благодаря вырождению внутренних состояний, обусловленному инвариантностью относительно поворотов R , волновая функция при $K \neq 0$ не просто равна произведению вида (П1.2), а представляет собой суперпозицию двух таких произведений

$$\begin{aligned} \Psi_{IKM}(\varpi) &= \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2}} \times \\ &\times [\Phi_K(q) D_{MK}^I(\varpi) (-1)^{I+K} \Phi_{\bar{K}}(q) D_{M,-K}^I(\varpi)] \end{aligned} \quad (\text{П1.11})$$

Преобразуем гамильтониан (П1.1). Выпишем явное выражение H , которое для жесткого ротатора имеет простой вид

$$\hat{H} = (R_{x'}^2 + R_{y'}^2)/(2\mathfrak{S}) + R_{z'}^2/(2\mathfrak{S}_{z'}), \quad (\text{П1.12})$$

где $R_{x'}, R_{y'}, R_{z'}$ – компоненты углового момента вращения ядра \vec{R} на оси координат, связанные с ядром (внутренняя система), а $\mathfrak{S}_{x'}, \mathfrak{S}_{y'}, \mathfrak{S}_{z'}$ – компоненты момента инерции \mathfrak{S} в той же системе координат. Вследствие аксиальной симметрии, моменты инерции удовлетворяют соотношениям $\mathfrak{S}_{x'} = \mathfrak{S}_{y'} = \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}_{z'} = 0$ (т.к. вращательный момент перпендикулярен оси симметрии).

Полный момент ядра \vec{I} складывается из внутреннего \vec{J} момента и вращательного момента \vec{R}

$$\vec{I} = \vec{J} + \vec{R}. \quad (\text{П1.13})$$

Используя циклические компоненты угловых моментов, получим окончательно

$$\begin{aligned} \hat{H} &= (\hat{I}^2 + \hat{J}^2 - 2\hat{I}\hat{J})/(2\mathfrak{S}) = \\ &= I(I+1)/(2\mathfrak{S}) - (I_+J_- + I_-J_+)/ (2\mathfrak{S}) + \\ &\quad (J(J+1) - 2K^2)/(2\mathfrak{S}). \end{aligned} \quad (\text{П1.14})$$

Третье слагаемое характеризует движение внутренних степеней свободы ядра, поэтому его можно включить в \hat{H}_{in} . Тогда гамильтониан (П1.1) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_{in} + \hat{T}_{rot} + \hat{H}_{cor}, \\ T_{rot} &= I(I+1)/(2\mathfrak{S}), \quad H_{cor} = -(I_+J_- + I_-J_+)/ (2\mathfrak{S}). \end{aligned} \quad (\text{П1.15})$$

Член \hat{H}_{cor} описывает связь внутреннего и ротационного движений и его называют взаимодействием Кориолиса. Учет \hat{H}_{cor} приводит к смешиванию состояний с различными K . Если разность между внутренними энергиями для различных вращательных полос велика по сравнению с эффективным значением энергии связи $(IJ)/\mathfrak{S}$, то смешиванием состояний с различными значениями K можно пренебречь. В этом случае уровни энергии в отдельной вращательной полосе определяются выражением

$$E_K(I) = E + \frac{1}{2\mathfrak{I}}I(I + 1), \quad (\text{П1.16})$$

где E – внутренняя энергия, не зависящая от I . Энергии ротационных состояний в виде (П1.16) достаточно хорошо описываются при малых спинах. Но для правильного описания энергии более высоких ротационных состояний необходимо учитывать кориолисово взаимодействие по теории возмущений и изменение формы ядра, следовательно, и момента инерции. Это приводит к появлению в ротационной энергии членов разложения по степеням $I(I + 1)$:

$$E_I = AI(I + 1) + BI^2(I + 1)^2 + CI^3(I + 1)^3. \quad (\text{П1.17})$$

Эта формула (П1.17) была предложена Бором и Моттelsonом [22] и описывала достаточно хорошо известные в то время вращательные энергии ядра. Но с прогрессом экспериментальной техники ускорения тяжелых ионов и применением высокочувствительных полупроводниковых детекторов стало возможным изучение состояний с очень высокими спинами. Естественно, формула Бора-Моттельсона уже не могла удовлетворительно описать такие состояния из-за плохой сходимости разложения по степеням углового момента I . Поэтому было предложено Харрисом [24] разложение вращательной энергии по степеням угловой скорости вращения ядра ω :

$$\begin{aligned} E_I &= \frac{1}{2}J_0\omega^2 + \frac{3}{4}J_1\omega^4 \\ \tilde{I} &= J_0\omega + J_1\omega^3, \quad \tilde{I} \equiv \sqrt{I(I + 1)} \end{aligned} \quad (\text{П1.18})$$

Эта формула с достаточной точностью описывает вращательные энергии состояний умеренно высоких спинов. Не уступает ей по точности описания вращательной энергии и обратное (П1.17) разложение

$$I(I + 1) = aE_I + bE_I^2, \quad (\text{П1.19})$$

Решение этого квадратного уравнения относительно E_I приводит к выражению вида

$$E_I = \frac{J_0}{C} \left(\sqrt{1 + \frac{C}{J_0^2} I(I+1)} - 1 \right), \quad (\text{П1.20})$$

$$J_0 = a/2, \quad C = b$$

Эта формула (П1.20) была получена независимо Сафаровым Р.Х. [70] и Липасом [30]. Она отличается от (П1.18) еще и тем, что ее можно применить и к ядрам, переходным между сферическими и деформированными. Для описания энергетического спектра переходных ядер была предложена модель переменного момента инерции [58], в которой допускается зависимость момента инерции \mathfrak{I} от спина I по двухпараметрической формуле

$$E_I = \frac{I(I+1)}{2\mathfrak{I}} + V(\mathfrak{I}), \quad V(\mathfrak{I}) = C(\mathfrak{I} - \mathfrak{I}_0)^2, \quad (\text{П1.21})$$

а энергия вращения ядра определяется из условия $\frac{\partial E_I}{\partial \mathfrak{I}} = 0$. Еще лучшие результаты для переходных ядер, близких к сферическим, но худшие для умеренно высоких спинов, дает другая двухпараметрическая формула Эйжири [71]

$$E_I = I\omega + \frac{I(I+1)}{2\mathfrak{I}}. \quad (\text{П1.22})$$

При увеличении углового момента вращательное движение может приводить к изменению внутренней структуры, имеющему характер фазового перехода с довольно резким изменением вида вращательного спектра. Для исследования зависимости энергии состояний с увеличением спина I вводят понятие *yrast*-состояний для обозначения состояния, наименьшего по энергии с данным значением момента I . Тогда *yrast*-линия – это кривая на плоскости *полный момент – энергия*, показывающая нижнюю границу возможных ядерных состояний. При малых спинах четно-четного деформированного яд-

ра понятия *yraст*-линии и основной ротационной полосы совпадают. Но в области более высоких спинов наблюдается аномальное поведение *yraст*-линии. В этой области спинов график зависимости углового момента I или момента инерции \mathfrak{S} от угловой скорости вращения ядра ω имеет S -образный вид (бэкбендинг). Поэтому эту область невозможно описать вышеприведенными двухпараметрическими формулами. Явление бэкбендинга было истолковано Стефенсом и Саймоном [72] как выстраивание угловых моментов двух нуклонов вблизи поверхности Ферми с большим j и $K = 0$. Кориолисово взаимодействие смешивает состояния по K и выстраивает угловой момент двух нуклонов j вдоль оси вращения ядра так, что выстроенные состояния описываются волновой функцией

$$\Psi_s(IMj_0) = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} \sum_K d_{Kj_0}^j(\pi/2) D_{MK}^I \chi_K^j |0 \rangle, \quad (\text{П1.23})$$

где $d_{Kj_0}^j(\pi/2) = D_{Kj_0}^j(0, \pi/2, 0)$ осуществляет поворот на $\pi/2$ вокруг оси oy , χ_K^j – волновая функция внутреннего состояния ядра с угловым моментом j и проекцией K во внутренней системе координат, $j_0 = \langle IMj_0 | \hat{j}_x | IMj_0 \rangle$ – проекция j на ось вращения ядра, значением которой определяется выстроенный угловой момент. Явление бэкбендинга получило объяснение на основе пересечения основной полосы с ротационной полосой выстроенного состояния.

Глава 2

феноменологическая модель расщепления по четности при вращении

§2.1 Спектры ядер с октупольной деформацией

К настоящему времени накоплена богатая экспериментальная информация, подтверждающая реальность существования ядер со стабильной октупольной деформацией [42, 73-76]. За более полным библиографическим списком можно обратиться, например, к обзорным работам [35, 76]. Отклонение равновесной формы ядра по мере увеличения числа нуклонов во внешней незаполненной оболочке от сферической, можно объяснить поляризационным действием нуклонов в незаполненной оболочке. Ядра, обладающие октупольной деформацией, имеют грушевидную форму, которая асимметрична относительно плоскости, перпендикулярной оси симметрии. Форму поверхности таких ядер можно описать выражением (П2.А1), учитывая члены с $\lambda = 3$, включительно. В таких ядрах нарушаются R и P симметрии, но сохраняется $R * P$ симметрия (подробное разъяснение этих симметрий приведено в приложении П1), поскольку эта операция представляет собой отражение в плоскости, проходящей через ось симметрии. Вследствие нарушения R -симметрии, потенциал, описывающий одномерные октупольные движения, должен содержать

два минимума, соответствующие разным знакам октупольной деформации ϵ_3 , и следовательно, быть симметричным относительно $\epsilon_3 = 0$, что отвечает эквивалентности деформаций противоположных знаков.

Инвариантность относительно отражения в плоскости, проходящей через ось симметрии, удобно выразить с помощью операции

$$\hat{Z} = \hat{P} * \hat{R}^{-1}. \quad (2.1.1)$$

Внутренние состояния четно-четного ядра ($K = 0$) являются собственными состояниями оператора \hat{Z} . Обозначая волновую функцию внутреннего состояния через $\Phi_{s,K=0}(q)$, где K – внутренний угловой момент, можно записать

$$\hat{Z}\Phi_{s,K=0}(q) = s\Phi_{s,K=0}(q), \quad (2.1.2)$$

где $s = \pm 1$ – собственные значения оператора \hat{Z} . Из (2.1.1) получаем

$$\hat{P} = \hat{Z} * \hat{R} \quad (2.1.3)$$

Оператор четности действует на внутренние переменные посредством \hat{Z} , а на вращательные – посредством \hat{R} . Из (П1.8) и (2.1.3) следует, что

$$\pi = s(-1)^I. \quad (2.1.4)$$

Таким образом, энергетический спектр с $K = 0$ (ротационная полоса) содержит состояния

$$\begin{aligned} I^\pi = 0^+, 1^-, 2^+, \dots & \quad s = 1, \\ I^\pi = 0^-, 1^+, 2^-, \dots & \quad s = -1. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

В случае барьера конечной высоты между двумя минимумами (что соответствует физически реальной ситуации), изменение знака деформации может происходить путем туннелирования через барьер. Туннелирование приводит к инвер-

сии направления оси симметрии и, следовательно, состояния системы существуют в виде двух модификаций: $\psi_{+\epsilon}$ и $\psi_{-\epsilon}$. Соответствующая волновая функция $\psi_{+\epsilon}$ описывает движение в яме с положительной деформацией, а волновая функция $\psi_{-\epsilon}$ – движение в яме с отрицательной деформацией. Из этих двух наборов можно построить собственные состояния, представляющие собой симметричную и антисимметричную комбинации функций $\psi_{+\epsilon}$ и $\psi_{-\epsilon}$:

$$\begin{aligned}\Psi_+ &= 1/2(\psi_{+\epsilon} + \psi_{-\epsilon}), \\ \Psi_- &= 1/2(\psi_{+\epsilon} - \psi_{-\epsilon}).\end{aligned}\tag{2.1.6}$$

Таким образом, спектр системы будет состоять из дублетов по четности, причем состояния с отрицательной четностью будут лежать выше по энергии по отношению к состояниям с положительной четностью. Это обстоятельство известно как явление расщепления ротационной полосы по четности, главной причиной которого является туннельный эффект с его зависимостью от высоты потенциального барьера между двумя его минимумами.

§2.1.1 Комбинированная модель для описания ядер с расщеплением по четности и выстраиванием углового момента

Из сказанного выше в §2.1 можно сделать вывод, что характерная экспериментальная черта присутствия октупольной деформации – это появление чередующихся по четности полос. По мере же уменьшения потенциального барьера спектр ядерных возбуждений должен стремиться к спектру октупольных вибраций. Анализ зависимости энергии расщепления по четности ΔE от высоты потенциального барьера в квазиклассическом приближении в рамках одномерной модели октупольных колебаний, был сделан в работах [77,78], где было установлено, что энергия расщепления убывает по экспоненциальному закону. Краткое описание этих исследований

мы привели в (П2.В), а целью настоящего пункта является развитие комбинированной модели для изучения поведения энергии расщепления в зависимости от угловой скорости вращения остова ядра ω_{rot} вплоть до самых высоких спинов, где энергия расщепления отличается от экспоненциальной закономерности.

Известно, что ядра с химическим потенциалом, расположенным между двумя одночастичными орбиталями с $\Delta l = 3$ и $\Delta j = 3$, характеризуются сильными октупольными корреляциями нуклонов, которые могут привести к соответствующей аксиально-симметричной деформации ядра. Из требования симметризации ядерных состояний относительно знаков октупольной деформации следует такая форма потенциальной энергии, которая имеет два симметричных минимума, разделенных барьером, высота которого зависит от углового момента вращения ядра. В квантовых системах происходит туннелирование между состояниями разного знака деформации, частотой которого определяется энергетический интервал между уровнями дублета по четности. Такая задача решена авторами [78-80] в квазиклассическом приближении, и получена формула для энергии расщепления по четности

$$E_d^I = \Delta E_0 \exp\left(\frac{-AI(I+1)}{1 + BE_{rot}^I}\right), \quad (2.1.7)$$

где ΔE_0 – энергия расщепления при спине $I = 0$, параметр A связан с моментом инерции, B – описывает изменение последнего из-за увеличения энергии вращения E_{rot}^I .

Расчеты с использованием формулы (2.1.7) показывают, что энергия расщепления по четности экспоненциально убывает со спином, и хорошо согласуются с экспериментальными данными до определенных угловых моментов, где начинает проявляться линейная зависимость энергии расщепления от угловой скорости вращения, что свойственно состоя-

ниям с выстраиванием углового момента. А последние экспериментальные данные по легким изотопам из актинидной области показывают, что энергия расщепления по четности может убывать с угловым моментом даже до отрицательного значения, которое экспоненциальная функция не в состоянии описать. Обнаружено существенное различие в поведении энергии расщепления по четности в тяжелых и легких изотопах актинидов. В тяжелых изотопах актинидов, например, в $^{230,232}\text{Th}$, наблюдается только убывание энергии расщепления вплоть до самых высоких спинов, а в легких изотопах, таких как в $^{220,222}\text{Ra}$, при достижении определенной частоты вращения наблюдается быстрый рост энергии расщепления, так что возникает инверсия четности в уровнях ротационной полосы с чередующей четностью.

Для описания таких состояний отрицательной четности до самых высоких спинов, наблюдаемых экспериментально, ниже развивается простая феноменологическая модель. Она исходит из гамильтониана модели Бора-Моттельсона [22], который при $I \geq j_0$ приводится к виду [23]:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{in}} + \hat{H}_{\text{rot}}(I^2) - \omega_{\text{rot}}\hat{j}_x, \quad (2.1.8)$$

где \hat{H}_{in} описывает внутренние возбуждения, $-\omega_{\text{rot}}\hat{j}_x$ – кориолисово взаимодействие, j_x – проекция внутреннего углового момента на ось ox , а $\hat{H}_{\text{rot}}(\hat{I}^2)$ – вращение остова, собственные значения которого E_{rot}^I параметризуются по Харрису (1.1.4).

Решение уравнения Шредингера

$$\hat{H}\Psi_n^I = E_n^I\Psi_n^I \quad (2.1.9)$$

с гамильтонианом (2.1.8) ищем в виде разложения по базису состояний отрицательной четности:

$$\Psi_n^I = a_d^I\varphi_d^I + a_s^I\varphi_s^I, \quad (2.1.10)$$

имеющих природу вибрационных (фононных) d и выстроенных s двухчастичных состояний. Здесь d и s -состояния описываются бозонными операторами $\varphi_d^I = \hat{b}_d^+ |I \rangle$ и $\varphi_s^I = \hat{b}_s^+ |I \rangle$, где $|I \rangle$ – состояния вращающегося остова.

Будем считать, что для этих состояний известны решения

$$\hat{H}\varphi_d^I = (E_{\text{rot}}^I + E_d^I)\varphi_d^I, \quad (2.1.11)$$

$$\hat{H}_0\varphi_s^I = (E_{\text{rot}}^I + E_s^I)\varphi_s^I, \quad (2.1.12)$$

где энергия расщепления по четности E_d^I определяется выражением (2.1.7), а собственная энергия выстроенного состояния за вычетом энергии вращения остова равна

$$E_s^I = E_0 - \omega_{\text{rot}}j_0, \quad (2.1.13)$$

где E_0 – головная энергия выстроенной полосы, а j_0 – выстроенный угловой момент.

При включении взаимодействия Кориолиса происходит смешивание состояний и энергия возмущенного состояния описывается выражением

$$E^I = E_{\text{rot}}^I + \epsilon_{\text{rot}}^I, \quad (2.1.14)$$

где

$$\epsilon_{\text{rot}}^I = \frac{1}{2} \left(E_d^I + E_s^I \pm \sqrt{(E_d^I - E_s^I)^2 + 4\omega_{\text{rot}}^2 j_{\text{ds}}^2} \right), \quad (2.1.15)$$

здесь j_{ds} – матричный элемент взаимодействия Кориолиса между d и s -состояниями. Для сравнения с экспериментом в формуле (2.1.15) выбираем только нижнее по энергии решение.

§2.1.2 Численные расчеты

Чтобы исследовать угловую зависимость энергии расщепления по четности, необходимо провести численные расчеты

этой величины и сравнить их с экспериментальными данными конкретных ядер. Но задача определения энергии расщепления сталкивается с трудностью, связанной с неоднозначной параметризацией средней энергии уровней ротационной полосы с чередующейся четностью.

Авторами [79,80] изучался вопрос об экспериментальной проверке угловой зависимости энергии расщепления на большом круге ядер: деформированных, сферических и переходных. Для этого они были вынуждены использовать модифицированные формулы Липаса [30] и Эйжири [71], которые содержат подгоночные параметры, физический смысл некоторых из них не ясен и необходимость включения их не всегда очевидна. Поэтому во избежание обсуждения этой проблемы мы ограничимся рассмотрением только деформированных ядер, энергии ротационных уровней которых с большой точностью описываются формулами Харриса (1.1.4), (1.1.5). В этом случае экспериментальные значения энергии расщепления, для их сравнения с теоретическим выражением (2.1.7), можно определить на основе выражения

$$E_d^I = E_{\text{exp}}^I - E_{\text{rot}}^I, \quad (2.1.16)$$

где E_{exp}^I – экспериментальные энергии ротационных уровней ядра.

Такое сравнение было проведено нами для ядер $^{224-228}\text{Ra}$, $^{226-228}\text{Th}$ и $^{230-238}\text{U}$ [81], которые удовлетворяют условию для жесткого ротатора $E_{4+}/E_{2+} = 3.3$ и хорошо описываются формулой Харриса. Оптимальные значения инерциальных параметров J_0 и J_1 , описывающие энергию вращения остова E_{rot}^I , были определены по критерию χ^2 и приведены в табл.2.1. Там же приведены отношение E_{4+}/E_{2+} и максимальное значение спина I_m , до которого определена основная ротационная полоса.

Табл.2.1 Оптимальные значения инерциальных параметров

J_0 и J_1 для изотопов ядер Ra , Th и U .

Ядра	J_0	J_1	I_m	E_4/E_2
${}_{88}Ra^{224}$	32.45	1135.6	10^+	2.99
${}_{88}Ra^{226}$	41.51	1164.5	10^+	3.32
${}_{88}Ra^{228}$	45.48	794.6	6^+	3.21
${}_{90}Th^{226}$	39.75	808.8	18^+	3.14
${}_{90}Th^{228}$	50.89	732.7	14^+	3.32
${}_{92}U^{230}$	57.31	575.8	16^+	3.28
${}_{92}U^{232}$	61.43	616.7	20^+	3.33
${}_{92}U^{234}$	69.09	575.6	12^+	3.26

Эти ядра характеризуются большим значением момента инерции J_0 и сравнительно малым параметром неадиабатичности вращения J_0 . При параметризации по Харрису использовались уровни основной ротационной полосы до достаточно больших спинов: $I_m = 20^+$ (${}^{232}\text{U}$), $I_m = 18^+$ (${}^{226}\text{Th}$) и $I_m = 16^+$ (${}^{230}\text{U}$). При этом была достигнута большая степень согласия E_{rot}^I с экспериментом (отклонения не превышают $\delta E = 2 \div 3$ кэВ). Ядра, в которых наблюдаются большие отклонения от параметризации Харриса при больших спинах, мы здесь не рассматриваем, т.к. они связаны проявлением других явлений, отличных от тех, которые обсуждаются нами. На основании численных расчетов, проводимых на основании данной модели, мы видим хорошее согласие теории с экспериментом и поэтому гипотеза об экспоненциальной зависимости энергии расщепления в зависимости от спина вполне оправдывается. При расчете энергии расщепления по четности были использованы параметры ΔE , A и B , значения которых, найденные по критерию χ^2 , приведены в табл.2.2.

Таблица 2.2 Оптимальные значения параметров расщепления по четности

Ядра	ΔE	A	B
${}_{88}\text{Ra}^{224}$	0.209	0.030	-0.002
${}_{88}\text{Ra}^{226}$	0.245	0.017	-0.015
${}_{88}\text{Ra}^{228}$	0.462	0.010	0.639
${}_{90}\text{Th}^{226}$	0.214	0.022	0.167
${}_{90}\text{Th}^{228}$	0.311	0.008	0.131
${}_{92}\text{U}^{230}$	0.346	0.004	0.264
${}_{92}\text{U}^{232}$	0.550	0.003	0.452
${}_{92}\text{U}^{234}$	0.774	0.001	1.090

Замечено, что значение параметра энергии расщепления по четности ΔE при $I = 0$ меняется так же, как и момент инерции J_0 с увеличением произведения числа валентных нуклонов $N_p N_n$ – наблюдается линейный рост J_0 и ΔE . Наши значения параметра ΔE совпадают со значениями, приведенными авторами работы [80] для ядер ${}^{224,226}\text{Ra}$, а другие параметры A и B нами переопределены.

Необходимо отметить, что в ядре ${}^{224}\text{Ra}$ энергия расщепления при высоких спинах принимает отрицательные значения порядка 10 кэВ. При фитировании этих энергий экспоненциальной функцией были вынуждены прибавить такого порядка величину к экспериментальным значениям энергии расщепления, а затем ее вычесть из расчетных значений.

Ядра же ${}^{230,232}\text{Th}$ имеют слишком длинные ротационные полосы, которые при высоких спинах заметно отличаются от экспоненциальной зависимости. Это может указывать на появление новых явлений при высоких спинах. Тяжелые изотопы ${}^{230}\text{Th}$ и ${}^{232}\text{Th}$, также удовлетворяют условию жесткого ротатора $E_{4^+}/E_{2^+} = 3.3$ и хорошо описываются формулой Харриса.

Вычисление энергии состояний отрицательной четности для них проводилось в несколько этапов. На первом этапе были фитированы энергии основной ротационной полосы с помо-

щью формул Харриса и по критерию χ^2 определены инерциальные параметры: J_0 – момент инерции и J_1 – параметр неадиабатичности. Низкоспиновая часть *yrast*-полосы до спинов $I^\pi = 14^+$ и $I^\pi = 12^+$, для ядер ^{230}Th и ^{232}Th соответственно, принята нами за основную полосу, по которой проводилось фитирование энергии уровней по Харрису.

Оптимальные значения этих параметров оказались равными:

$$J_0 = 55,50^{-1}, \quad J_1 = 552,0^{-3} \quad {}^{230}\text{Th}$$

$$J_0 = 59,90^{-1}, \quad J_1 = 586,6^{-3} \quad {}^{232}\text{Th}.$$

Вышеприведенные значения инерциальных параметров использовались для вычисления по формулам (1.1.4) энергии вращения остова, которые считаются едиными для состояний положительной и отрицательной четностей.

Значения выстроенного углового момента *yrast*-полосы для последних ядер оказались очень малыми и близкими: $j_0 = 2.4\hbar$ для ^{230}Th и $j_0 = 2.3\hbar$ для ^{232}Th . Поэтому бэкбендинг в тяжелых актинидах не проявляется, т.к. при большом значении момента инерции этих ядер выстроенный угловой момент очень мал.

На следующем этапе, подгоняя рассчитанные по формуле (2.1.7) энергии к экспериментальным энергиям низкоспиновой части ротационных полос отрицательной четности, были определены параметры явления расщепления по четности. Оптимальные значения этих параметров (ΔE_0 – значение энергии расщепления при спине $I = 0$, параметр A связан с моментом инерции и параметр B описывает изменение момента инерции с вращением), оказались равными:

$$\Delta E_0 = 0,4955, A = 0,0061, B = 0,4383^{-1} \quad {}^{230}\text{Th},$$

$$\Delta E_0 = 0,7016, A = 0,0032, B = 0,4656^{-1} \quad {}^{232}\text{Th}.$$

Здесь единица измерения ΔE_0 МэВ.

Высокоспиновая часть ротационной полосы отрицательной четности рассматривалась как выстроенное состояние и была описана выражением (2.1.13). При этом для ядра ^{230}Th головная энергия выстроенной полосы $E_{0s} = 0.812$ МэВ оказалась порядка энергии расщепления ΔE_0 при $I = 0$, а выстроенный угловой момент $j_0 = 3.11$ оказался примерно равным угловому моменту октупольных вибраций. Но для ядра ^{232}Th значения этих параметров существенно выше, чем для коллективного состояния: $E_{0s} = 1.72$ МэВ, $j_0 = 6.15$, что указывает на их двухчастичную природу, в особенности, при высоких спинах. Оптимальное же значение матричного элемента кориолисова взаимодействия оказалось очень малым для ядра ^{230}Th (равным $j_{ds} = -0.014$) и довольно значительным для ^{232}Th ($j_{ds} = 0,26$). Такие значения параметров позволили достигнуть хорошего согласия расчетов с экспериментом, которая демонстрируется в табл. 2.3 для ядра ^{232}Th . Наибольшее отклонение расчетной энергии от экспериментальной наблюдается в интервале спинов, где происходит кориолисово смешивание полос, и не превышает $\delta E = E_{\text{exp}}^I - E_{\text{th}}^I \leq 0.005$ МэВ (экспериментальная погрешность измерения энергии ядерных уровней порядка 0.001 МэВ).

Таблица 2.3.

Сравнение расчетных значений энергии E_{th}^I (в МэВ) с экспериментальными E_{exp}^I для ядра ^{232}Th ($\delta E = E_{\text{exp}}^I - E_{\text{th}}^I$)

I^π	E_{exp}^I	E_{th}^I	δE	I^π	E_{exp}^I	E_{th}^I	δE
1 ⁻	0.714	0.715	0.001	16 ⁺	1.858	1.856	0.002
2 ⁺	0.049	0.049	0.0	17 ⁻	2.445	2.450	-0.005
3 ⁻	0.774	0.774	0.0	18 ⁺	2.262	2.263	-0.001
4 ⁺	0.162	0.162	0.0	19 ⁻	2.813	2.816	-0.003
5 ⁻	0.884	0.884	0.0	20 ⁺	2.690	2.693	-0.003
6 ⁺	0.333	0.333	0.0	21 ⁻	3.203	3.201	0.001
7 ⁻	1.043	1.041	0.002	22 ⁺	3.143	3.145	-0.002
8 ⁺	0.557	0.556	0.001	23 ⁻	3.616	3.612	0.004
9 ⁻	1.249	1.244	0.005	24 ⁺	3.618	3.618	0.0
10 ⁺	0.827	0.824	0.003	25 ⁻	4.050	4.048	0.002
11 ⁻	1.498	1.493	0.005	26 ⁺	4.115	4.112	0.003
12 ⁺	1.137	1.133	0.004	27 ⁻	4.506	4.510	-0.004
13 ⁻	1.784	1.780	0.004	28 ⁺	4.630	4.627	0.003
14 ⁺	1.482	1.479	0.003	29 ⁻			
15 ⁻	2.101	2.102	-0.001	30 ⁺	5.601	5.604	-0.003

Из проведенного выше анализа следует, что октупольная полоса отрицательной четности при высоких спинах проявляет выстраивание (или антивыстраивание) углового момента, если *yrast*-полоса имеет такой же характер выстраивания. Отсюда следует, что обе эти полосы с разными четностями в ядре с октупольной деформацией имеют близкую внутреннюю природу и их можно рассматривать как одну объединенную полосу с чередующейся четностью.

§2.1.3 Численные результаты для легких изотопов радия

С появлением новых экспериментальных данных о высокоспиновых полосах с чередующейся четностью ядер актинидной области [42,82,83] было обнаружено, что энергия расщепления при дальнейшем увеличении углового момента убывает до отрицательных значений, т.е. состояния отрицательной четности опускаются ниже уровней положительной четности,

вследствие чего наблюдается инверсия знака четности в полосе с чередующейся четностью. Авторы работы [84] объясняют обращение знака четности при высоких угловых моментах в рамках развиваемой ими коллективной модели на основе кориолисова взаимодействия октупольных возбуждений с различными K . Но как заявляют авторы, такая феноменологическая модель позволяет лишь качественно описать экспериментальные данные.

Это явление двукратной инверсии знака четности в ротационной полосе с чередующейся четностью более последовательно можно объяснить дополнительным включением в базис октупольных возбуждений и выстроенных состояний [85].

Также было замечено, что при высоких угловых моментах зависимость энергии расщепления отличается от экспоненциальной закономерности. Она приобретает линейную форму зависимости от угловой скорости вращения ядра, которая свойственна явлению выстраивания внутреннего углового момента вдоль оси вращения ядра. Экспериментальные данные [82,83] также указывают на то, что в легких изотопах ядер актинидной области выстроенные состояния имеют более сложную природу, которая проявляется в том, что значение выстроенного углового момента со скоростью вращения ядра не остается постоянным, а меняется так, что оно может приобрести и отрицательное значение, вследствие чего происходит пересечение ветвей положительной и отрицательной четности и проявляется инверсия знака четности в ротационной полосе с чередующейся четностью.

В экспериментах [82,83] с помощью реакции многонуклонных передач были получены данные о высокоспиновых ротационных полосах с чередующейся четностью, в которых наблюдается инверсия четности. Из этих экспериментов мы ограничились рассмотрением лишь легких изотопов радия $^{220,222}\text{Ra}$, которые с достаточной точностью параметризуют-

ся по Харрису и проявляют двукратную инверсию четности. В этих ядрах параметризация энергии уровней положительной четности удовлетворительно проводится только до спина $I_m \approx 8^+ \div 10^+$. При спинах, превышающих I_m , в поведении энергии уровней положительной четности наблюдаются отклонения от монотонного поведения E_{rot}^I , описываемого формулой Харриса, которые обусловлены выстраиванием внутреннего углового момента.

Вследствие этого описание уровней положительной четности проводилось нами в два этапа: на первом этапе определяли оптимальные значения инерциальных параметров с использованием энергии уровней до I_m , а на втором - решалась задача кориолисова смешивания состояний gr -полосы и выстроенных s -состояний.

Энергии состояний мы рассматривали как и в предыдущей главе также с вычетом энергии вращения остова

$$\epsilon_{\text{rot}}^I = E^I - E_{\text{rot}}^I \quad (2.1.17)$$

в зависимости от угловой скорости вращения остова ядра ω_{rot} .

Оптимальные значения параметров, найденные из фитирования энергии уровней положительной четности, приведены в таблице 2.4.

Таблица 2.4 Оптимальные значения инерциальных параметров J_0 и J_1 и выстроенных состояний: E_{s0} – головная энергия, j_{s0} – выстроенный угловой момент, $j_{gr s}$ – м.э. кориолисова взаимодействия.

\mathcal{A}	220	222	224	226
$J_0(\text{MeV}^{-1})$	5.182	22.11	33.40	42.07
$J_1(\text{MeV}^{-3})$	1769.2	1454.8	1135.7	1120.3
$E_{s0}(\text{MeV})$	-0.650	- 0.892	-0.202	+0.208
j_{s0}	-3.20	-4.71	-0.934	+1.12
$j_{gr s}$	0.122	0.232	0.078	0.030

Монотонное изменение инерциальных параметров с ростом числа нейтронов обусловлено коллективными свойствами этих параметров. В противоположность этому, выстроенный угловой момент j_{s0} и головная энергия полосы выстроенных состояний E_{s0} меняются не монотонно, а имеют минимальное значение при числе нейтронов $N = 134$, т.е. такое поведение обусловлено оболочечной структурой ядра.

Положительное и отрицательное значения выстроенного углового момента можно связать с возбуждением частиц на нисходящих или восходящих орбиталях одночастичной схемы уровней при положительной деформации ядра. В ядрах $^{220,222}\text{Ra}$ выстроенный угловой момент имеет отрицательное значение, что связано с возбуждением выстроенного состояния на восходящих орбиталях. Здесь также необходимо отметить, что в ядре ^{226}Ra выстроенный угловой момент имел положительное значение, что было связано с выстраиванием на нисходящих орбиталях. Состояния с положительным значением выстроенного углового момента принято называть выстроенными состояниями, а состояния с отрицательным значением углового момента будем называть, для простоты, антивыстроенными состояниями.

Заметим, что явление бэкбендинга не проявляется четко в ядрах актинидной области, т.к. выстроенный момент этих ядер не значителен, а если он превышает некоторое значение, то в этом случае наблюдается завышенное значение матричного элемента взаимодействия Кориолиса, которое сглаживает изменение инерциального параметра при пересечении ротационных полос с различными моментами инерции.

Состояния отрицательной четности проявляют экспоненциальную зависимость энергии расщепления только до спинов I_m , с которого происходит выстраивание углового момента. Поэтому параметры были определены с использованием только тех уровней, где еще такая зависимость имеет место.

Эти параметры представлены в таблице 2.5. Экспериментальное значение энергии расщепления определяли на основе выражения (2.1.16)

Таблица 2.5 Значения параметров расщепления по четности

A	220	222	224	226
$\Delta E_0 (MeV)$	0.395	0.222	0.197	0.240
$A(\hbar^{-2})$	0.0632	0.0519	0.0309	0.0215
$B (MeV^{-1})$	1.023	0.0293	- 0.1760	0.503

Величина энергии расщепления по четности ΔE_0 понижается в ядрах с числом нейтронов $N = 134, 136$ из-за усиления октупольных корреляций нуклонов и возможного существования стабильной октупольной деформации в этих ядрах. Инерционный параметр A имеет характерное для коллективной величины монотонное изменение с ростом числа нейтронов. Параметр B имеет схожее с ΔE_0 поведение, т.к. связан с энергией вращения остова.

При более высоких спинах в состояниях отрицательной четности происходят процессы выстраивания, при которых угловой момент выстраивания не остается постоянным. Такие процессы описываем на основе кориолисова смешивания двух выстроенных полос с разными выстроенными моментами, которое приводит к выражению, аналогичному (2.1.15). Параметры этих ротационных полос выстроенных состояний представлены в табл. 2.6.

Таблица 2.6 Оптимальные значения параметров выстроенных состояний

\mathcal{A}	220	222	224	226
$E_{s1}(MeV)$	0.763	-	0.280	1.590
j_{s1}	4.53	-	1.68	8.40
j_{s12}	0.450	-	0.054	0.530
$E_{s2}(MeV)$	-2.140	-0.830	-0.239	0.049
j_{s2}	-8.82	-4.45	-1.16	0.45
j_{sd}	1.175	-0.080	0.056	0.147

Первое выстроенное состояние имеет выстроенный угловой момент j_{s1} положительного знака, что приводит к понижению энергии уровней отрицательной четности ниже энергии уровней положительной четности, вследствие чего происходит пересечение ветвей отрицательной и положительной четности при спинах $I^\pi \approx 8^+ \div 10^+$. Таким образом, наблюдается первая инверсия знака четности в знакочередующейся ротационной полосе. В случае ядер со стабильной октупольной деформацией выстроенный момент так мал, что в ядре ^{222}Ra можно его просто положить равным нулю. Поведение головной энергии E_{s1} с ростом числа нейтронов схоже с поведением головной энергии E_{s0} выстроенных состояний положительной четности и с поведением энергии расщепления по четности ΔE_0 . Эти параметры имеют минимальное значение для ядер с числом нейтронов $N = 134, 136$, в которых проявляются сильные октупольные корреляции нуклонов и вследствие чего наблюдаются низколежащие октупольные вибрации.

Второе выстроенное $s2$ -состояние для этих ядер имеет антивыстроенный характер, как и s -состояния положительной четности. При этом $|j_{s2}| > |j_{s0}|$, вследствие чего происходит второе пересечение ветвей положительной и отрицательной четности, т.е. вторая инверсия знака четности.

Отметим, что $s2$ -состояние отрицательной четности имеет схожие свойства с s -состоянием положительной четности: в ядрах $^{220,222}Ra$ они имеют антивыстроенный характер, а в яд-

ре ^{226}Ra - выстроенный характер (§2.1.2). Это обстоятельство еще раз указывает на общую природу состояний положительной и отрицательной четности.

Результаты расчетов энергии уровней с чередующейся четностью для ядер $^{220,222}\text{Ra}$ с использованием оптимальных значений рассмотренных параметров демонстрируют высокую степень согласия расчетов с экспериментом.

Заметим, что выстроенные моменты $j_{s1} = 8.40$ ядра ^{226}Ra (§2.1.2) и $j_{s2} = -8.82$ ядра ^{220}Ra , существенно выше углового момента коллективного состояния, что указывает на потерю коллективности октупольных вибраций при высоких спинах и фрагментацию их в двухчастичное состояние. А в других ядрах значение выстроенного углового момента согласуется со значением момента октупольных вибраций.

§2.2 Двухквазичастичная структура высокоспиновых состояний отрицательной четности

Как было показано §§2.1.1-2.1.3, ядра с определенной оболочечной структурой проявляют сильные октупольные корреляции нуклонов и характеризуются низколежащими состояниями отрицательной четности, которые вместе с уровнями основной ротационной полосы образуют полосу с чередующейся четностью и последовательностью $I^\pi = 0^+, 1^-, 2^+, \dots$. Энергетический интервал между уровнями дублета такой объединенной полосы получил название энергии расщепления по четности. В рамках одномерной модели октупольных колебаний [78,79] была установлена угловая зависимость энергии расщепления по четности – она экспоненциально убывает с ростом углового момента вращения ядра, что было проверено в [86] более точными расчетами и сравнением с экспериментальными данными. Такая закономерность наблюдается в ядрах, у которых энергия возбуждения состояний отрица-

тельной четности низка в силу их коллективной природы.

В случае, когда энергии возбуждения достаточно высоки, эти состояния уже не являются коллективными, а имеют двухчастичную структуру, и разность энергии между этими состояниями и состояниями основной ротационной полосы, которую также будем для простоты называть энергией расщепления по четности, имеет иную закономерность, отличную от экспоненциальной. В таких ядрах при высоких спинах становится преобладающим из всех неадиабатических эффектов явление кориолисова выстраивания внутреннего углового момента и энергетический спектр приобретает простую закономерность – энергия расщепления по четности линейно убывает с ростом угловой скорости вращения остова ядра. Для описания ядер с выстраиванием углового момента, разработана ротационная модель высокоспинового приближения [87] на основе которой были исследованы состояния отрицательной четности ядра ^{126}Ba . Здесь данную модель мы применяем для исследования энергетических и радиационных особенностей состояний отрицательной четности ядра из редкоземельной области деформации ^{162}Yb [88].

§2.2.1 Ротационная модель высокоспиновых состояний отрицательной четности

Аналогично, как и в §1.1.1, будем исходить из гамильтониана ротационной модели Бора [22]

$$\hat{H} = \hat{H}_{in} + \hat{H}(\hat{R}^2), \quad (2.2.18)$$

коллективного углового момента $\vec{R} = \vec{I} - \vec{j}$, аппроксимируем ее в предположении, что она плавно изменяется

$$\hat{H}(\hat{R}^2) \approx \hat{H}_{rot}(\hat{I}^2) - \frac{dH_{rot}(I(I+1))}{dI(I+1)}(2\hat{I}\hat{j} - \hat{j}^2). \quad (2.2.19)$$

В базисе собственных функций углового момента взаимо-

действия Кориолиса имеют вид

$$(\hat{I}\hat{j})_{K,K\pm 1} = \sqrt{I(I+1)}(\hat{j})_{K,K\mp 1}\chi(I, K), \quad (2.2.20)$$

где $\chi(I, K) = \sqrt{1 \mp \frac{K(K+1)}{I(I+1)}}$. В высокоспиновом приближении $I > j$ имеем $\chi(I, K) \approx 1$. Производная в (2.2.19) связана с угловой скоростью вращения остова

$$\omega_{rot} = dE_{rot}(I(I+1))/d\tilde{I}, \quad (\tilde{I} \equiv \sqrt{I(I+1)}). \quad (2.2.21)$$

Тогда гамильтониан (2.2.18) можно представить в виде [23]

$$\hat{H} = \hat{H}_{in} + \hat{H}_{rot}(\hat{I}^2) + \hat{H}_{cor}, \quad (2.2.22)$$

где гамильтониан внутренних возбуждений

$$\hat{H}_{in} = \hat{H}_j + \hat{H}_{QQ} = \sum_j (\varepsilon_j - \lambda) \hat{a}_j^+ \hat{a}_j - \frac{k_2}{2} \sum_\mu \hat{Q}_{2\mu}^+ \hat{Q}_{2\mu}, \quad (2.2.23)$$

включает одночастичные энергии уровней ε_j сферического поля и квадруполь-квадрупольные взаимодействия. Коллективная часть $\hat{H}_{rot}(\hat{I}^2)$ имеет собственные значения, которые будем параметризовать по Харрису (1.1.4), а член $\hat{H}_{cor} = -\omega_{rot}\hat{j}_x$ описывает кориолисово взаимодействие.

Решение уравнения Шредингера

$$\hat{H}\Psi_{I\nu} = E_\nu^I \Psi_{I\nu} \quad (2.2.24)$$

ищем в виде разложения

$$\Psi_{I\nu} = \sum_{JK} a_{JK}^{I\nu} |IMJK\nu\rangle \quad (2.2.25)$$

по базисным двухчастичным состояниям

$$\begin{aligned} |IMJK\nu\rangle = & \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2(1+\delta_{K,0})}} (D_{MK}^I(\Omega)\chi_{JK}^\nu + \\ & + (-1)^{I-J+K} D_{M-K}^I(\Omega)\chi_{J-K}^\nu), \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

где

$$\chi_{JK}^\nu = (\hat{a}_{j_1}^+ \hat{a}_{j_2}^+)^\nu_{JK}, \quad (2.2.27)$$

а фаза $(-1)^{I-J+K}$ выбрана в соответствии с [89]. Из свойств симметрии волновой функции следует, что ротационная полоса двухчастичного состояния с $K = 0$ и с четными значениями углового момента J имеет уровни с четными спинами I , а с нечетными J – уровни с нечетными спинами I .

Матричные элементы в базисе собственных состояний имеют вид

$$\begin{aligned} & \langle IMJ'K' | \hat{H}_j | IMJK \rangle = \\ & = ((\varepsilon_{j_1} - \lambda) + (\varepsilon_{j_2} - \lambda)) \delta_{J',J} \delta_{K',K}, \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

$$\begin{aligned} & \langle IMJ'K' | \hat{H}_{QQ} | IMJK \rangle = \\ & = -\kappa_2 Q_0 \langle j_1 j_2 J' || r^2 Y_2 || j_1 j_2 J \rangle \frac{C_{JK20}^{J'K'}}{\sqrt{2J'+1}}. \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

При использовании соотношения (2.2.20) матричные элементы взаимодействия Кориолиса равны

$$\begin{aligned} & \langle IMJ'K' | \hat{H}_{cor} | IMJK \rangle = \\ & -\frac{1}{2} \omega_{rot} \sqrt{J(J+1) \pm K(K+1)} \delta_{K',K \mp 1} \delta_{J',J} \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

поэтому в задаче диагонализации матрицы энергии смешиваются двухчастичные состояния, различающиеся на $K = K' \pm 1$ при $J = J'$ из-за кориолисовых взаимодействий с $K = K'$ при $J = J'$ и $J = J' \pm 2$ из-за квадруполь-квадрупольных взаимодействий.

§2.2.2 Численные расчеты

Имеется довольно большой объем экспериментальных данных по значениям энергии положительной и отрицательной четности и временам жизни высокоспиновых состояний ядра ^{162}Yb [42], поэтому это ядро представляет интерес с точки

зрения изучения влияния выстраивания на энергетические и радиационные особенности соответствующих полос при быстром вращении. Идентифицированы уровни основной ротационной полосы до $I^\pi = 28^+$, γ -полосы до $I^\pi = 30^+$, а состояния отрицательной четности для четных и нечетных спинов соответственно до $I^\pi = 36^-$ и $I^\pi = 37^-$. Измерены времена жизни состояний основной полосы до $I^\pi = 18^+$ и γ -вибрационной полосы – до $I^\pi = 14^+$. Однако теоретическое описание слабоколлективизированных состояний отрицательной четности в начале полосы при наличии выстраивания встречает определенные трудности. Поэтому нами проводится анализ имеющихся экспериментальных данных в рамках данной модели с целью согласования особенностей поведения энергетических и радиационных свойств ядра с ростом спина.

Ротационные полосы отрицательной четности в ^{162}Yb будем рассматривать как состояния, основанные на двухчастичных состояниях семейства мультиплета $(i_{13/2}f_{7/2})_J$. Диагонализация матрицы энергии (2.2.28), (2.2.29) при каждом значении спина I приводит к смешиванию базисных состояний с угловым моментом $J \leq I$. С увеличением скорости вращения ядра сильно опускаются вниз значения энергии ротационных полос с $K = 0$ и с наибольшим значением полного углового момента J . При нечетных значениях спина I , наинизшее решение отождествляем с энергией ротационной полосы, основанной на состоянии $E(7^-) = 1767.89$ кэВ, а при четных I – с энергией полосы $E(8^-) = 2280.30$ кэВ. В расчетах мы использовали значение энергии двухчастичного состояния $E_0 = (\varepsilon_{i_{13/2}} - \lambda) + (\varepsilon_{f_{7/2}} - \lambda) = 3.8$ МэВ. Мы пренебрегаем смешиванием состояний $\Delta J = 2$, поэтому с целью уменьшения числа подгоночных параметров из матричных элементов квадруполь-квадрупольного взаимодействия (2.2.29) учиты-

вались только соответствующие переходам $\Delta J = 0$:

$$\langle IMJK | \hat{H}_{QQ} | IMJK \rangle = C_J \frac{3K^2 - J(J+1)}{J(J+1)}.$$

Из условия наилучшего согласования расчетных энергий с экспериментальными подбирались оптимальные значения подгоночного параметра C_J , которые приведены в таблице 2.7. В то же время для лучшего согласования расчетов с экспериментом мы были вынуждены ввести фактор ослабления Кориолиса F_J , которые приведены там же:

Таблица 2.7

Оптимальные значения подгоночных параметров C_J и F_J
для ядра ^{162}Yb

$J(\hbar)$	7	8	9	10
C_J	0.990	1.780	0.100	-2.130
F_J	0.119	0.980	0.100	0.003

Расчетные значения энергии для сравнения с экспериментальными энергиями ротационных полос отрицательной четности мы также брали в виде зависимости $\varepsilon_\nu^I = E_\nu^I - E_{rot}^I(\omega_{rot})$. При таком рассмотрении мы видим, что энергетический интервал между состояниями с четными и нечетными спинами убывает почти линейно, сливаясь при $I^\pi \approx 19^- \div 20^-$, образуя впоследствии одну полосу с чередующейся последовательностью четных и нечетных спинов отрицательной четности. Для сравнения приведены также уровни *gr*-полосы с вычетом энергии вращения остова. Отметим, что включение уровня $E_{8^-} = 2280.3$ кэВ приводит к большим погрешностям, которое связано с тем, что в этой области заметную роль играют октупольные корреляции (см. §2.3.2).

§2.2.3 Влияние выстраивания углового момента на радиационные свойства ядра

Используя собственные функции решения уравнения Шредингера с гамильтонианом (2.2.22), были вычислены приведенные вероятности $E2$ переходов (см. §1.1.2) между уровнями $yrast$ -полосы ядра ^{162}Yb . Из условия согласования расчетного значения $\mathcal{B}(E2)$ с экспериментальными для перехода $2_{gr}^+ \rightarrow 0_{gr}^+$ найдено значение параметра $q = 2.33$. С целью воспроизведения поведения величины $\mathcal{B}(E2)$ в зависимости от изменений параметров деформаций, мы воспользовались выражением для переходного квадрупольного момента (1.2.1) с дополнительным предположением о ходе изменения параметров β и γ -деформаций (1.2.2), (1.2.3). При такой параметризации деформации формы ядра удобно пользоваться величиной

$$\sqrt{R(E2)} = \sqrt{\frac{\mathcal{B}(E2; I \rightarrow I - 2)}{B_{rot}(E2; I \rightarrow I - 2)'}}$$

выражающую отклонение приведенной вероятности $\mathcal{B}(E2; I \rightarrow I - 2)$ от адиабатического приближения $B_{rot}(E2; I \rightarrow I - 2)$. Но поскольку $\sqrt{R(E2)} \sim \beta(I) \cos(60^\circ + \gamma(I))$, то из ее экспериментальных значений мы не можем определить одновременные изменения параметров $\beta(I)$ и $\gamma(I)$ и поэтому вынуждены предположить, что форма ядра в состояниях gr -полосы остается аксиально-симметричной, увеличивая лишь свою продольную деформацию под действием центробежных сил, а в s - состояниях, наоборот, меняется лишь неаксиальная деформация.

Зависимость $\sqrt{R(E2)} = f(\omega_{av}^2)$ в области спинов до пересечения полос имеет незначительный отрицательный наклон, что свидетельствует о его достаточной жесткости относительно β -деформаций. Однако отсутствие экспериментальной информации о переходах между уровнями $2_\gamma^+ \rightarrow 0_{gr}^+$ и $2_\beta^+ \rightarrow 0_{gr}^+$,

не позволяет нам проверить это основываясь также на соотношении, предложенном в [90]. Такое поведение $\sqrt{R(E2)}$ между уровнями основной ротационной полосы можно описывать при значении параметра $b = 1.2$. Область спинов после пересечения полос, где происходит выстраивание внутреннего углового момента, воспроизводится появлением γ - неаксиальности и найденное значение параметра $g \equiv g_s$ из условия наилучшего согласия расчетных $\sqrt{R(E2)}$ с экспериментальными, оказалось равным $g_s = 5.4$. Такое значение указывает на мягкость относительно γ -деформаций. В то же время хотим отметить, что найденное нами значение g_s несколько отличается (когда как значение b примерно соответствует) от значения, полученном в [91], используя оболочечные поправки Нильссона и Струтинского.

§2.3 Влияние октупольных корреляций на состояния отрицательной четности в низкоспиновой области

Как уже было упомянуто в §2.2, что сдвинутые в область больших энергий состояния уже не являются коллективными, а имеют природу двух- или многочастичных возбуждений [76]. Поэтому в таких ядрах из всех неадиабатических эффектов, проявляющихся при быстром вращении, становится преобладающим явление кориолисова выстраивания внутреннего углового момента и энергетический спектр приобретает простую закономерность: разность энергии между этими состояниями и состояниями основной полосы линейно убывает с ростом угловой скорости вращения остова ядра.

Однако задача кориолисова смешивания состояний четного ядра сталкивается с основной трудностью – выбора более или менее обоснованного ограничения размерности базиса, непомерно широкого даже при учете только двухчастич-

ных состояний. Но известно, что с увеличением скорости вращения ядра, действию сил Кориолиса особенно подвержены нуклоны с большим угловым моментом. Поэтому при изучении вопросов, связанных с выстраиванием, будет достаточно приемлемым приближением ограничение базиса состояниями из сферической подболочки с наибольшим угловым моментом вблизи уровня Ферми. По аналогии с моделью изолированного j -уровня [92], состояния отрицательной четности рассмотрим тогда как результат расщепления определенного мультиплета $(j_1, j_2)_{JM}$ двух нуклонов из сферической подболочки из-за квадрупольных и кориолисовых взаимодействий.

Но как было замечено в конце §2.2.2, описание таких двухчастичных состояний в начале полосы представляет собой некоторую проблему. Это связано с тем, что вследствие еще незавершенности процесса выстраивания, состояния отрицательной четности могут проявить в начале полосы нелинейное поведение в зависимости от частоты вращения ядра. Как было замечено в [76], этот эффект в таких ядрах связан с наличием слабых октупольных корреляций в низкоспиновой области, которые благодаря достаточной мягкости ядра относительно зеркальной асимметрии быстро стабилизируются с ростом спина. Поэтому п. 2.3.1 предлагается развитие нами ротационной модели [93], которая была представлена в §2.2.1, с учетом октуполь-октупольных взаимодействий, играющих определенную роль в низкоспиновой части спектра.

§2.3.1 Ротационная модель с учетом октупольных корреляций

Представим гамильтониан внутренних возбуждений в (2.2.23) в виде

$$\begin{aligned} \hat{H}_{in} &= \hat{H}_j + \hat{H}_{QQ} = \\ &= \sum_j (\varepsilon_j - \lambda) \hat{a}_j^+ \hat{a}_j - \frac{k_2}{2} \sum_\mu \hat{Q}_{2\mu}^+ \hat{Q}_{2\mu} - \frac{k_3}{2} \sum_\mu \hat{Q}_{3\mu}^+ \hat{Q}_{3\mu}, \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

который включает одночастичные энергии уровней ε_j сферического поля, а также квадрупольные и октупольные взаимодействия. Собственные значения $\hat{H}_{rot}(\hat{I}^2)$ будем параметризовать по Харрису (1.1.4), а член $\hat{H}_{cor} = -\omega_{rot}\hat{j}_x$ описывает кориолисово взаимодействие.

Решение уравнения Шредингера

$$\hat{H}\Psi_{I\nu} = E_{\nu}^I\Psi_{I\nu} \quad (2.3.32)$$

ищем в виде разложения

$$\Psi_{I\nu} = \sum_{JK} a_{JK}^{I\nu} |IMJK\nu\rangle \quad (2.3.33)$$

по базисным двухчастичным состояниям

$$\begin{aligned} |IMJK\nu\rangle = & \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2(1+\delta_{K,0})}} (D_{MK}^I(\varpi)\chi_{JK}^{\nu} + \\ & + (-1)^{I-J+K} D_{M-K}^I(\varpi)\chi_{J-K}^{\nu}), \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

где

$$\chi_{JK}^{\nu} = (\hat{a}_{j1}^+ \hat{a}_{j2}^+)_{JK}^{\nu}, \quad (2.3.35)$$

а фаза $(-1)^{I-J+K}$ выбрана в соответствии с [89]. Из свойств симметрии волновой функции следует, что ротационная полоса двухчастичного состояния с $K = 0$ и с четными значениями углового момента J имеет уровни с четными спинами I , а с нечетными J – уровни с нечетными спинами I .

Матричные элементы в этом базисе имеют вид

$$\begin{aligned} & \langle IMJ'K' | \hat{H}_j | IMJK \rangle = \\ & = ((\varepsilon_{j1} - \lambda) + (\varepsilon_{j2} - \lambda))\delta_{J',J}\delta_{K',K}, \quad (2.3.36) \\ & \langle IMJ'K' | \hat{H}_{QQ(quadr.)} | IMJK \rangle = \\ & = -\kappa_2 \langle Q_2 \rangle \langle I'J'M'K' | \hat{Q}_{20} | IJMK \rangle = \\ & = -\kappa_2 \langle Q_2 \rangle \frac{2I+1}{8\pi^2} \langle D_{M'K'}^{I'} D_{MK}^I \rangle \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \langle \chi_{K'}^{J'} | r^2 Y_{20} | \chi_K^J \rangle = \\
 & = -\kappa_2 Q_0 \langle j_1 j_2 J' || r^2 Y_2 || j_1 j_2 J \rangle \frac{C_{JK20}^{J'K'}}{\sqrt{2J'+1}} = \\
 & = C_{J2} \frac{C_{JK20}^{J'K'}}{\sqrt{2J'+1}} - \tag{2.3.37}
 \end{aligned}$$

для квадруполь-квадрупольных, и аналогично

$$\begin{aligned}
 & \langle IMJ'K' | \hat{H}_{QQ(oct.)} | IMJK \rangle = \\
 & = -\kappa_3 Q_0 \langle j_1 j_2 J' || r^3 Y_3 || j_1 j_2 J \rangle \frac{C_{JK30}^{J'K'}}{\sqrt{2J'+1}} = \\
 & = C_{J3} \frac{C_{JK30}^{J'K'}}{\sqrt{2J'+1}} - \tag{2.3.38}
 \end{aligned}$$

для октуполь-октупольных взаимодействий. При использовании соотношений (2.2.20) матричные элементы взаимодействия Кориолиса равны

$$\begin{aligned}
 & \langle IMJ'K' | \hat{H}_{cor} | IMJK \rangle = \\
 & = -\frac{1}{2} \omega_{rot} \sqrt{J(J+1) \pm K(K+1)} \delta_{K', K \mp 1} \delta_{J', J}. \tag{2.3.39}
 \end{aligned}$$

§2.3.2 Численные результаты

Имеется достаточный объем экспериментальной информации [42] по значениям энергии положительной и отрицательной четности четно-четных изотопов гафния, поэтому они являются интересными объектами с точки зрения изучения влияния выстраивания на энергетические особенности соответствующих полос при быстром вращении.

При рассмотрении полос отрицательной четности, будем рассматривать их как состояния, основанные на состояниях мультиплета $\nu(i_{13/2}h_{7/2})_J$, где $J = 3 \div 10$. Диагонализация матрицы энергии (2.3.36)-(2.3.38) при каждом значении спина I приводит к смешиванию базисных состояний с угловым

моментом $J \leq I$. При четных спинах I смешиваются состояния с $J = 4, 6, 8, 10$, а при нечетных спинах - состояния с $J = 3, 5, 7, 9$. Помимо этого, каждую ротационную полосу, основанную над двухчастичным состоянием, будем характеризовать значением углового момента J и проекции K базисного состояния с наибольшей амплитудой разложения волновой функции a_{JK}^I при $\omega_{rot} = 0$. Из расчетов следует, что с увеличением скорости вращения ядра сильно опускаются вниз значения энергии ротационных полос с $K = 0$ и с наибольшим значением полного углового момента J . Для каждого ядра при нечетных и четных значениях спина I наинизшие такие решения отождествляем с энергиями ротационных полос, основанных на состояниях $E(5^-) = 1649.3$ КэВ, $E(4^-) = 1735.1$ КэВ - для ядра ^{162}Hf , $E(5^-) = 1520.8$ КэВ, $E(4^-) = 1614.3$ КэВ - для ^{164}Hf , $E(7^-) = 1726.2$ КэВ, $E(6^-) = 1840.1$ КэВ - для ^{166}Hf и $E(9^-) = 2066.3$, КэВ и два наинизших решения с $E(6^-) = 1840.1$ КэВ, $E(8^-) = 2192.6$ КэВ - для ^{168}Hf .

В расчетах использовались следующие значения энергий двухчастичных состояний: $E_0 = (\varepsilon_{i_{13/2}} - \lambda) + (\varepsilon_{f_{7/2}} - \lambda) = 3.40$ МэВ - для ядра ^{162}Hf , 2.70 МэВ - для ^{164}Hf , 3.80 МэВ - для ^{166}Hf , и 3.86 МэВ - для ^{168}Hf . С целью уменьшения числа подгоночных параметров из матричных элементов квадруполь-квадрупольного (2.3.37) и октуполь-октупольного взаимодействия (2.3.38) учитывались только соответствующие переходам $\Delta J = 0$:

$$\begin{aligned} & \langle IMJK | \hat{H}_{QQ(\text{quadr.})} | IMJK \rangle = \\ & = C_{J2} \frac{3K^2 - J(J+1)}{\sqrt{(2J+1)(2J-1)J(J+1)(2J+3)}}, \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

и

$$\begin{aligned} & \langle IMJK | \hat{H}_{QQ(\text{oct.})} | IMJK \rangle = \\ & = -4C_{J3}K(3J(J+1) - 5K^2 - 1) \times \end{aligned}$$

$$\times \sqrt{\frac{(2J+1)(2J-3)!}{(2J+4)!} \frac{1}{\sqrt{2J+1}}}. \quad (2.41)$$

Из условия наилучшего согласования расчетных значений энергии с экспериментальными, подбирались оптимальные значения параметров C_{J_2} и C_{J_3} . Сразу отметим, что масштабы изменения значения параметра C_{J_3} для всех рассматриваемых ядер невелики – они варьируются в пределах 0.003–0.005, что говорит о небольшой интенсивности октупольных взаимодействий. Значения этих параметров для всех ядер приведены в работе [93].

Хотя найденные значения C_{J_2} и не позволяют делать каких-либо однозначных утверждений, общих для всех ядер одновременно, но его завышенные значения при $J = 8$, наблюдавшиеся во всех ядрах, позволяют предположить, что это связано с резким понижением энергии состояний с четными спинами при $I \geq 8^-$ вследствие перехода их в полностью выстроенные состояния.

В случае ядра ^{168}Hf относительно завышенные значения C_{J_2} наблюдаются при всех четных спинах: энергии таких состояний убывают в зависимости от скорости вращения острова быстрее по сравнению с энергиями состояний с нечетными спинами.

Вследствие ограниченности размерности используемого базиса состояний в данной ротационной модели, мы ввели для наилучшего согласия с экспериментом в рассмотрение также и дополнительный фактор ослабления взаимодействия Кориолиса F_J . Их значения были важны во всех рассмотренных ядрах лишь при самых высоких значениях $J^\pi = 10^-$ (где $F_J \sim 0.1$), а во всех остальных случаях они были порядка единицы.

Анализ результатов расчетов показывает, что во всех ядрах, в которых состояния отрицательной четности с четными

и нечетными спинами обусловлены расщеплением одного и того же мультиплета, в начале полосы при $I \leq 8^-$, проявляют нелинейное поведение в зависимости от скорости вращения остова ω_{rot} . Другими словами, в этой области выстраивание внутреннего углового момента еще не полностью развито и поведение этих состояний вполне удовлетворительно описывается включением октуполь-октупольных взаимодействий.

При больших спинах эти состояния приобретают характер полностью выстроенных полос, а расстояние между ними и основной ротационной полосой убывает по линейному закону. Также следует обратить внимание, что с ростом ω_{rot} энергетический интервал δE между полосами отрицательной четности также уменьшается по линейному закону, что следует из выстроенного характера таких состояний $\delta E = \Delta E - (j_{02} - j_{01})\omega_{rot}$, где $\Delta E = E_{02} - E_{01}$, а E_{02} и E_{01} – энергии двухчастичных состояний двух разных подболочек, j_{02} , j_{01} – их выстроенные моменты. Благодаря линейному уменьшению расстояния между ними, они образуют впоследствии полосу с чередующейся последовательностью четных и нечетных спинов. Но в случае ядра ^{168}Hf в полосах отрицательной четности при $\omega_c \sim 0.38$ МэВ наблюдается инверсия четности спина [94]: энергии уровней полосы с нечетными спинами завышаются по отношению к энергиям уровней полос с четными спинами. Такое поведение энергии состояний указывает на возможность сосуществования в данном ядре октупольных корреляций вплоть до высоких спинов, подобно ядрам из области актинидов.

ПРИЛОЖЕНИЕ П2.А ВИБРАЦИОННЫЕ СПЕКТРЫ ЯДЕР

Спектры систем многих тел можно теоретически анализировать, основываясь на понятии элементарных возбуждений, представляющих собой различные, приблизительно незави-

симые флуктуации около положения равновесия. Характер флуктуации зависит от внутренней структуры системы. Например, элементарные возбуждения могут быть связаны с возбуждениями отдельных частиц, они могут представлять собой коллективные колебания плотности, формы и т.д.

Здесь рассмотрим коллективные колебания формы ядра относительно равновесной формы. Коллективные колебания – это согласованные движения большого числа частиц. Ядерные поверхностные колебания имеются как у сферических так и у деформированных ядер, но схема вибрационных возбуждений в значительной мере определяется симметрией равновесного состояния. Поэтому спектры сферических ядер будут сильно отличаться от спектров деформированных ядер. Начнем рассмотрение с колебаний поверхности сферического ядра, тем более, что в сферических ядрах наиболее низкие состояния связаны с этими колебаниями. Считаем, что в сферическом ядре четное число частиц. Если считать, что энергия коллективного движения много меньше энергии, связанной с изменением внутренней структуры, то в гамильтониане \hat{H}_{in} (2.1.8) можно выделить часть \hat{H}_{vib} , которая описывает колебания ядерной поверхности. Изменение формы, связанное с вибрационным возбуждением, можно характеризовать амплитудой α смещения из положения равновесия. Следовательно, ядро в первом приближении можно рассматривать как жидкую каплю, совершающую гармонические колебания с малыми амплитудами α . Тогда форму поверхности ядра можно задать совокупностью параметров α :

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left[1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{m=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda m} Y_{\lambda m}(\theta, \phi) \right] \quad (\text{П2.А1})$$

Наибольший интерес представляют колебания поверхности ядер, отвечающие значениям $\lambda \geq 2$ (в основном квадруполь-

ные колебания с $\lambda = 2$ и октупольные с $\lambda = 3$). В гармоническом приближении энергия колебаний поверхности описывается гамильтонианом

$$\hat{H}_{vib} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} (\mathcal{K}_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 + C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2), \quad (\text{П2.А2})$$

где первый член представляет собой кинетическую энергию \mathcal{E} , а \mathcal{K}_λ – массовый коэффициент. Второй член – потенциальная энергия V с коэффициентом жесткости C . Величины $\dot{\alpha}_{\lambda\mu}$ и $\alpha_{\lambda\mu}$ можно рассматривать как обобщенные скорости и координаты. Вводя переменную импульса

$$\pi_{\lambda\mu} = \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}_{\lambda\mu}} (\mathcal{E} - V) = \mathcal{K}_\lambda \dot{\alpha}_{\lambda\mu}^*, \quad (\text{П2.А3})$$

и постулируя перестановочные соотношения между α и π

$$[\alpha_{\lambda\mu}, \pi_{\lambda'\mu'}] = (\hbar/i) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}, \quad (\text{П2.А4})$$

мы получим гамильтониан поверхностных колебаний

$$\hat{H}_{vib} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} \left(\frac{1}{\mathcal{K}_\lambda} |\dot{\pi}_{\lambda\mu}|^2 + C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right). \quad (\text{П2.А5})$$

Гамильтониан (П2.А5) имеет вид суммы гамильтонианов для несвязанных гармонических осцилляторов с собственными частотами:

$$\omega_\lambda = (C_\lambda / \mathcal{K}_\lambda)^{1/2}. \quad (\text{П2.А6})$$

Собственные значения энергии поверхностных колебаний ядра представляются в виде суммы энергий отдельных осцилляторов:

$$E = \sum_{\lambda\mu} (n_{\lambda\mu} + 1) \hbar \Omega_\lambda, \quad (\text{П2.А7})$$

где $n_{\lambda\mu}$ определяют числа элементарных возбуждений определенного типа $\lambda\mu$, характеризующиеся энергией $\hbar\Omega_\lambda$. Элементарные возбуждения поверхностных колебаний ядра можно рассматривать как квазичастицы – фононы. Но вибрационное возбуждение характеризуется тем, что оно может быть повторено большое число раз и n -ое возбужденное состояние можно считать состоящим из n отдельных фононов. Поэтому для рассмотрения n -фононного состояния удобно использовать представление чисел заполнения. Для этого вводят операторы рождения и уничтожения фононов:

$$\begin{aligned}\hat{b}_{\lambda\mu}^+ &= \sqrt{\frac{\omega_\lambda \mathcal{K}_\lambda}{2}} [\alpha_{\lambda\mu} - i \frac{(-1)^\mu}{\omega_\lambda \mathcal{K}_\lambda} \pi_{\lambda, -\mu}]; \\ \hat{b}_{\lambda\mu} &= \sqrt{\frac{\omega_\lambda \mathcal{K}_\lambda}{2}} [(-1)^\mu \alpha_{\lambda\mu} + i \frac{1}{\omega_\lambda \mathcal{K}_\lambda} \pi_{\lambda, \mu}].\end{aligned}\tag{П2.А8}$$

Операторы $b_{\lambda\mu}$ и $b_{\lambda\mu}^+$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[b_{\lambda\mu}, b_{\lambda'\mu'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}.\tag{П2.А9}$$

Волновую функцию основного состояния ядра определяют как вакуум по фононам

$$b_{\lambda\mu} \psi_0 = 0 \equiv |n_\lambda \rangle,\tag{П2.А10}$$

а n_λ -фононное состояние определяется посредством

$$\frac{1}{n_\lambda!} (b_{\lambda\mu}^+)^{n_\lambda} \psi_0 \equiv |n_\lambda \rangle.\tag{П2.А11}$$

Оператор $b_{\lambda\mu}$ является тензорным оператором ранга λ и каждое элементарное возбуждение типа $\lambda\mu$ имеет определенный угловой момент λ , проекцию μ на выделенное направление и определенную четность $(-1)^\lambda$. Фононы являются бозонами и, следовательно, волновая функция в представлении чисел заполнения должна быть симметричной относительно

перестановок фононов любого типа. Учитывая это и складывая угловые моменты отдельных фононов, можно построить состояния с $n_\lambda > 1$. Например, для двухфононных состояний полный вибрационный угловой момент L заключен в пределах $|\lambda - \lambda'| \leq L \leq |\lambda + \lambda'|$, и волновая функция имеет вид:

$$|L, M \rangle = \sum (\lambda \mu \lambda' \mu' | LM) b_{\lambda \mu}^+ b_{\lambda' \mu'}^+ |0 \rangle. \quad (\text{П2.А12})$$

В случае фононов одного типа ($\lambda = \lambda'$) из свойств симметрии коэффициентов Клебша-Гордона следует, что возможными значениями L являются лишь четные числа $L = 0, 2, 4, \dots, 2\lambda$. Так, при $\lambda = 2$ возможно одно состояние $I^\pi = 2^+$ с одним фононом $n_{\lambda=2} = 1$ и вырожденный триплет $I^\pi = 0^+, 2^+, 4^+$ с двумя фононами $n_{\lambda=2} = 2$ и т.д. При $\lambda = 3$ имеются одно состояние $I^\pi = 3^-$ ($n_{\lambda=3} = 1$) и четыре состояния $I^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, 6^+$ ($n_{\lambda=3} = 2$) и т.д.

Рассмотрим колебания ядра, обладающего стабильной квадрупольной деформацией. В таких ядрах не сохраняется вибрационный угловой момент, но сохраняется проекция μ момента на ось симметрии. Поэтому возбуждения можно характеризовать квантовым числом μ . Симметрия относительно пространственного отражения дает дополнительное квантовое число π . Кроме того, форма с осевой симметрией и симметрией относительно отражения будет и R -инвариантна. Симметрия относительно операции R означает вырождение возбуждений с одинаковым значением $|\mu|$. В четно-четных деформированных ядрах внутренний угловой момент равен $K = 0$, и возбуждение фонона с $\mu = 0$ приводит к полосе с $K = 0$, причем состояния в полосе подчиняются условию

$$(-1)^I = r, \quad (\text{П2.А13})$$

где r – собственные значения оператора R , равные $r = \pm 1$. При $\mu \neq 0$ сопряженные возбуждения ($\pm\mu$) формируют одну

полосу с $K = |\mu|$ и $I = K, K + 1, \dots$

ПРИЛОЖЕНИЕ П2.В ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ОКТУПОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Модель октупольных колебаний, развитая в [78], исходит из одномерного уравнения Шредингера с гамильтонианом

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mathcal{K}} \frac{d^2}{d\beta_{30}^2} + U_{eff}(\beta_{30}), \quad (\text{П2.В1})$$

где

$$U_{eff}(\beta_{30}) = U(\beta_{30}) + \mathcal{J}_0(\beta_{30})I(I + 1). \quad (\text{П2.В2})$$

Предполагается, что единственно изменяющейся коллективной переменной является параметр октупольной деформации формы ядра β_{30} , ответственный за октупольные колебания, а все остальные динамические величины (квадрупольная деформация и т.д.) жестко фиксированы и потенциал является гладкой функцией β_{30} . Здесь \mathcal{K} - массовый коэффициент, $U(\beta_{30})$ - потенциальная энергия октупольных колебаний при отсутствии вращений, I - угловой момент вращения, а $\mathcal{J}_0(\beta_{30})$ - ротационный параметр (аналогичный параметру Харриса J_0). В (П2.В2) учитывается, что с увеличением углового момента I центробежные силы модифицируют эффективный потенциал U_{eff} .

Волновая функция состояний, относящихся к ротационной полосе с переменной четностью, берется в виде:

$$\Psi_{IM} = \frac{\sqrt{2I + 1}}{4\pi} \{D_{M0}^I \{v_0(\beta_{30}) + (-1)^I v_0(-\beta_{30})\}\}, \quad (\text{П2.В3})$$

где $v(\beta_{30})$ и $v(-\beta_{30})$ описывают внутренние состояния положительной и отрицательной октупольной деформации без

туннельного эффекта. Тогда $v(\beta_{30})$ можно построить с помощью квазиклассической волновой функции $\psi(\beta_{30})$, описывающей движение (с некоторой энергией) в одной яме, т.е. экспоненциально затухающей в обе стороны от границ ямы. Функция $\psi(\beta_{30})$ нормирована так, что интеграл от нее по области одной ямы равен единице. При учете туннелирования уровень E_0 расщепляется на уровни E_1 и E_2 . Правильные волновые функции, отвечающие этим уровням, представляют собой симметричную и антисимметричную комбинации функций $\psi(\beta_{30})$ и $\psi(-\beta_{30})$:

$$\begin{aligned}\psi_1(\beta_{30}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{\psi_0(\beta_{30}) + \psi_0(-\beta_{30})\}, \\ \psi_2(\beta_{30}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{\psi_0(\beta_{30}) - \psi_0(-\beta_{30})\}.\end{aligned}\tag{П2.В4}$$

Функции (П2.В4) нормированы так, что равны единице интегралы от их квадратов по области двух ям. Производя несложные квантомеханические операции, можно получить:

$$E_2 - E_1 = \frac{2\hbar^2}{B}\psi_0(0)\psi_0'(0)\tag{П2.В5}$$

Вид квазиклассической волновой функции $\psi(0)$ и ее производной $\psi'(0)$ представлен в [95]. Подставляя функции $\psi(0)$ и $\psi'(0)$ в явном виде в (П2.В5), окончательно получаем:

$$E_2 - E_1 = \frac{\hbar\omega}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a 2\mathcal{K}(E - U)^{1/2} d\beta_{30}\right)\tag{П2.В6}$$

где ω - частота осцилляции в потенциальной яме вокруг средней октупольной деформации и $2a$ - ширина внутреннего барьера эффективного потенциала $V(\beta_{30})$ при некоторой энергии. С помощью различных приближений для описания потенциала $V(\beta_{30})$ (парабола и т.д.), была получена зависимость энергии расщепления по четности ΔE от высоты потенциального барьера:

$$\Delta E(I) = \frac{\hbar\omega}{\pi} \exp\left(-\frac{ab}{\pi} \mathcal{K}(V_0(I) - E_0)^{1/2}\right), \quad (\text{П2.В7})$$

где $V_0(I) = V(0, I) - V(\beta_{30min})$ – высота барьера, b – некоторый параметр интеграла. Из (П2.В7) следует, что в квазиклассическом приближении энергия расщепления по четности $\Delta E(I)$ для нижайшего стационарного состояния экспоненциально убывает с увеличением высоты потенциального барьера.

В [79] получено также выражение для ΔE , зависящей непосредственно от углового момента вращения I :

$$\Delta E(I) = \Delta E(0) \exp\left(-\frac{I(I+1)}{J_0(J_0+1)}\right), \quad (\text{П2.В8})$$

здесь $\Delta E(0)$ – значение энергии расщепления по четности при $I = 0$, а J_0 – некоторый параметр, связанный с моментом инерции ядра.

Соотношение (П2.В8) описывает явную зависимость энергии расщепления по четности от углового момента. Однако при анализе экспериментальных данных о спектрах полос с чередующейся четностью были вынуждены ввести поправку на изменение момента инерции с ростом углового момента. Тогда выражение для энергии расщепления по четности принимает вид

$$\Delta E(I) = \Delta E(0) \exp\left(-\frac{I(I+1)}{J_0(J_0+1)(1+bE_{av}(I))}\right), \quad (\text{П2.В9})$$

где $E_{av}(I)$ – монотонно изменяющаяся часть энергии ротационной полосы, а множитель $(1+bE_{av}(I))$ – учитывает изменение момента инерции ядра с ростом углового момента, следующий из параметризации (П1.20) энергии уровней полосы.

Параметризуем эффективный потенциал U_{eff} суммой пара-

болы и гауссиана [96]:

$$U_{eff}(\beta_{30}) = a\beta_{30}^2 + b \exp(-c\beta_{30}^2). \quad (\text{П2.В10})$$

Обозначим через $\pm\beta_{min}$ положение двух симметрично расположенных минимумов эффективного потенциала U_{eff} . Условие, что при $\beta_{30} = \pm\beta_{min}$ существует минимум потенциала U_{eff} , приводит к соотношению между коэффициентами a , b и c

$$a = bc \exp(-c\beta_{min}^2). \quad (\text{П2.В11})$$

С его помощью (П2.В10) переписывается следующим образом:

$$U_{eff}(\beta_{30}) = b (c\beta_{30}^2 \exp(-c\beta_{min}^2) + \exp(-c\beta_{30}^2)). \quad (\text{П2.В12})$$

Для дальнейшего удобно ввести безразмерную переменную $t \equiv \frac{\beta_{30}}{\beta_{min}}$. Введём также обозначение $z \equiv c\beta_{min}^2$ для параметра, связанного с жесткостью потенциала. Тогда потенциал U_{eff} принимает вид:

$$U_{eff}(t) = b(z \exp(-z)t^2 + \exp(-zt^2)) \quad (\text{П2.В13})$$

Потенциал (П2.В13) имеет два симметрично расположенных минимума при $t = \pm 1$. Это соответствует физически реальной форме потенциала октупольных деформаций. Используя (П2.В13), можно найти значения $U_{eff}(t)$ при $t = 0$ и $t = 1$. Тогда,

$$\begin{aligned} U_{eff}(t=0) - U_{eff}(t=1) &= \\ &= b(1 - z \exp(-z) - \exp(-z)) = V_{eff} \end{aligned} \quad (\text{П2.В14})$$

и, следовательно, параметр V_{eff} определяет высоту потенциального барьера, разделяющего два минимума. Учитывая тождество (П2.В14), получаем окончательный вид эффективного потенциала $U_{eff}(t)$:

$$U_{eff}(t) = \frac{V_{eff}}{1 - z \exp(-z) - \exp(-z)} \times$$

$$\times \left(z \exp(-z)t^2 + \exp(-zt^2) \right). \quad (\text{П2.В15})$$

Определим ширину потенциальной ямы l , как значение t , при котором $U_{eff}(l) = U_{eff}(0)$. Тогда l и z оказываются связанными соотношением

$$1 = z \exp(-z)l^2 + \exp(-zl^2). \quad (\text{П2.В16})$$

Т.е. чем меньше ширина потенциальной ямы, тем жестче потенциал и больше частота осцилляции октупольных колебаний. Варьируя параметр z , мы можем изменять форму потенциала, сохраняя при этом положения минимумов и высоту барьера.

Гамильтониан одномерной модели октупольных колебаний в новых обозначениях имеет вид:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B\beta_{min}^2} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{V_{eff}}{1 - (z+1)\exp(-z)} \times \\ \times \left(z \exp(-z)t^2 + \exp(-zt^2) \right). \quad (\text{П2.В17})$$

Перейдем к безразмерным переменным. Обозначая

$$v = \frac{\mathcal{K}\beta_{min}^2}{\hbar^2} V_{eff} \quad (\text{П2.В18})$$

и отделяя в гамильтониане \hat{H} размерный множитель

$$H = \frac{\hbar^2}{\mathcal{K}\beta_{min}^2} \hat{h}, \quad (\text{П2.В19})$$

получаем гамильтониан \hat{h} , записанный только в безразмерных величинах

$$\hat{h} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{v}{1 - (z+1)\exp(-z)} \times \\ \times \left(z \exp(-z)t^2 + \exp(-zt^2) \right). \quad (\text{П2.В20})$$

Вследствие экспоненциальной зависимости в квазиклассическом приближении $\Delta E(v)$, аппроксимируем ее экспоненциальной функцией:

$$\Delta E(v) = \Delta E(0) \exp(-\alpha v), \quad (\text{П2.В21})$$

где $\Delta E(0)$ и α – некоторые параметры.

Если зависимость (П2.В21) правильная, то в пределах некоторой точности величина $-\ln(\Delta E)$ должна линейно возрастать с увеличением ν . Видно, что на большом интервале значений ν величина $-\ln(\Delta E)$ линейно зависит от ν и имеет одинаковый наклон, не зависящий от жесткости потенциала. Но предэкспоненциальный множитель $\Delta E(0)$ зависит от ширины потенциальной ямы l , определяющей жесткость потенциала, поэтому для исключения такой зависимости рассмотрим величину $\frac{\Delta E(\nu)}{\Delta E(\nu=1.2)}$ и перепишем эффективный потенциал одномерной модели октупольных колебаний в следующем виде:

$$U_{eff}(\beta_{30}) = U(\beta_{30}) + \frac{\hbar^2}{2J(\beta_{30})} I(I + 1). \quad (\text{П2.В22})$$

Здесь U – потенциальная энергия октупольных колебаний при отсутствии вращений, I – угловой момент вращения, а J – момент инерции. Тогда высота барьера V_{eff} , разделяющего два минимума, есть

$$V_{eff} = V + \frac{\hbar^2}{2J(\beta_{min})} \left(\frac{J(\beta_{min})}{J(0)} - 1 \right) I(I + 1), \quad (\text{П2.В23})$$

где V – барьер потенциала U .

Объединяя полученные выше результаты, получаем

$$\Delta E = \Delta E(0) \frac{\hbar^2}{B\beta_{min}^2} \times \\ \times \exp \left\{ -\alpha \frac{B\beta_{min}^2}{\hbar^2} \left[V + \frac{\hbar^2}{2J(\beta_{min})} \left(\frac{J(\beta_{min})}{J(0)} - 1 \right) \mathcal{X} \right] \right\}, \quad (\text{П2.В24})$$

где $\mathcal{X} = I(I + 1)$. Соотношение (П2.В24) описывает явную зависимость энергии расщепления по четности от углового момента и является экспоненциально убывающей функцией высоты потенциального барьера, разделяющего два симметричных минимума потенциала октупольных возбуждений. Впер-

вые оно было введено в [77] и использовано для анализа экспериментальных данных о спектрах полос чередующейся чётности [77,79].

Глава 3

микроскопическая модель приближения хаотических фаз при быстром вращении

§3.1 Основные положения

Известно, что парные корреляции особенно сильно проявляются для нуклонов, находящихся вблизи поверхности Ферми. Об этом достаточно ярко свидетельствует явление бэкбендинга, т.е. уменьшение частоты вращения при определенных значениях спина, производя обратный загиб момента инерции. Это в свою очередь приводит к возникновению бистабильности – когда определенному значению частоты вращения соответствуют два различных значения момента инерции. В рамках МПВ бэкбендинг соответствует реорганизации вакуумной конфигурации, т.е. при высоких спинах выстроенное двухквазичастичное состояние становится основным состоянием вращающегося четно-четного ядра. Вся информацию, связанную с бэкбендингом (значение частоты пересечения такой выстроенной двухквазичастичной полосы с основной gr -полосой, оценка $yrast-yrare$ взаимодействия, определение величины выстроенного углового момента и пр.) можно получить на диаграммах квазичастичных раусианов, которые вычисляются при фиксированных значениях параметров деформации и констант спаривания.

Влияние изменения парных корреляций на коллективные свойства ядер, в частности на "бекбендинг" и β и γ -вибрации, можно учитывать также при анализе коллективных колебаний с малыми амплитудами в рамках ПХФ. Целью настоящей главы является развитие квази/самосогласованного приближения для описания коллективных возбуждений во вращающихся ядрах и объяснение "бекбендинга" как результата исчезновения γ -вибраций при быстром вращении.

Для чтения этой главы (а также и последующей 4 главы) необходимо иметь знакомство с теорией БКШ (Бардина-Купера-Шриффера), или, VCS в английской терминологии. Читателям, не знакомым с этой теорией, мы можем рекомендовать книгу И.Айзенберга и В.Грайнера "Микроскопическая теория ядра" (3 т.), которая была выпущена в переводе на русский язык издательством АТОМИЗДАТ в 1976 г. Также отметим, что основы этой теории будут применены и при изложении вопросов момента инерции в приложении 3.C.

§3.1.1 Основные положения МПВ

Разделение движения на вращательную и внутреннюю части в полном смысле невозможно, поскольку само вращение является одним из видов ядерных возбуждений, характеризуемое определенными квантовыми числами и обусловленное в конечном счете межнуклонными взаимодействиями. Однако специфика вращательных возбуждений (небольшое изменение структуры при регулярном изменении квантовых чисел) позволяет искать для микроскопического описания вращения простые приближенные методы.

Одной из наиболее плодотворных оказалась упомянутая уже во введении так называемая модель принудительного вращения (МПВ), или, по другому, кренкинг-модель, предложенная Инглисом [97]. Известны несколько методов обосно-

вания МПВ, например в [98] дано вариационное микроскопическое обоснование, сделав ее самосогласованной, а в [99-102] предложен регулярный метод получения с помощью точных уравнений движения для квантовых операторов и с последующими последовательными поправками. Теория же, рассматривающая вращение как внутреннее возбуждение квантовой системы многих частиц, позволяет трактовать МПВ как первое квазиклассическое приближение, рассмотрением основ которой мы и ограничимся.

Основная идея при этом восходит к следующему классическому предположению: если вводить вращающуюся с постоянной угловой скоростью ω вокруг фиксированной оси координатную систему, то движение нуклонов в этой вращающейся системе при подходящем выборе угловой скорости вращения, оказывается простым. Будем считать одночастичный потенциал $V(\vec{r}, t)$ определенной формы вращающимся в пространстве и рассматривать зависящий от времени t одночастичный гамильтониан

$$\hat{h}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\vec{r}, t) \quad (3.1.1)$$

и соответствующее этому гамильтониану уравнение Шредингера

$$\hat{h}(t)\Psi(t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t). \quad (3.1.2)$$

Перейдя к сферическим координатам r, ϑ, φ , зависимость от времени для потенциала мы можем представить следующим образом. Если $V(\vec{r}, 0)$ есть потенциал при $t = 0$, то при любом t имеем

$$V(\vec{r}, t) = V(r, \vartheta, \varphi - \omega t, 0) \quad (3.1.3)$$

и существует унитарное преобразование, описывающее эту зависимость:

$$\hat{U} = e^{i\omega I_1 t}. \quad (3.1.4)$$

Этот оператор производит вращение на угол ωt вокруг оси вращения.

Запишем зависящий от времени оператор

$$\hat{U}\hat{h}(t)\hat{U}^{-1} = \hat{h}(0) \quad (3.1.5)$$

и определим волновую функцию

$$\tilde{\Psi} = \hat{U}\Psi, \quad (3.1.6)$$

определенную во вращающейся системе координат. После подстановки (3.1.4) и (3.1.6) в (3.1.2) получим

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\Psi} = \hat{h}_\omega\tilde{\Psi} = (\hat{h}(0) - \hbar\omega\hat{I}_1)\tilde{\Psi}. \quad (3.1.7)$$

Уравнение (3.1.7) представляет собой зависящее от времени уравнение Шредингера с явно не зависящим от времени эффективным гамильтонианом \hat{h}_ω . Таким образом, задача для собственных значений может быть решена стандартным образом:

$$\hat{h}_\omega\tilde{\Psi} = \epsilon'_\omega\Psi, \quad (3.1.8)$$

где ϵ'_ω - собственные значения эффективного гамильтониана. Энергии для одночастичного гамильтониана можно вычислить как

$$\epsilon_\omega = \langle \Psi|\hat{h}(t)|\Psi \rangle = \langle \tilde{\Psi}|\hat{h}(0)|\tilde{\Psi} \rangle = \epsilon'_\omega + \hbar\omega \langle \tilde{\Psi}|\hat{I}_1|\tilde{\Psi} \rangle, \quad (3.1.9)$$

где величина $\hat{I}_1\omega$ описывает кориолисово взаимодействие.

Для систем со спином оператор $\hat{j} = \hat{l} + \hat{s}$ генерирует вращения. Поэтому многочастичный гамильтониан МПВ можно представить с помощью выражения $(I_1 = \sum_{i=1}^A j_x^i)$:

$$\hat{H}_\omega = \sum_{i=1}^A \hat{h}_\omega^{(i)}, \quad (3.1.10)$$

а получающаяся после диагонализации волновая функция *gr*-состояния является детерминантом Слэтера. Для энергии в лабораторной системе из (3.1.7) получаем следующее выражение

$$E(\omega) = \langle \Phi_\omega | \hat{H}_\omega | \Phi_\omega \rangle + \hbar\omega \langle \Phi_\omega | \hat{I}_1 | \Phi_\omega \rangle. \quad (3.1.11)$$

$E(\omega)$ от знака ω не зависит, тогда находим, что

$$E(\omega) = E(0) + \frac{1}{2} \mathfrak{S}_1 \omega^2 + \dots \quad (3.1.12)$$

При $\omega = 0$ имеем $\langle \Phi_0 | \hat{I}_1 | \Phi_0 \rangle = 0$, а

$$I(\omega) = \langle \Phi_\omega | I_1 | \Phi_\omega \rangle = \mathfrak{S}_2 \omega + \dots \quad (3.1.13)$$

Можно показать, что коэффициенты $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ равны между собой и являются соответственно кинематическим и динамическим моментом инерции ядра [2] (совпадающие только в адиабатическом приближении). Следуя вариационному принципу Ритца, Φ_ω получаем как решение уравнения

$$\delta \langle \Phi | \hat{H} - \omega \hat{I}_1 | \Phi \rangle = 0, \quad (3.1.14)$$

где Φ является элементом детерминанта Слэтера. С помощью (3.1.11) находим

$$\frac{d}{d\omega} \langle \Phi_{\omega'} | \hat{H} | \Phi_{\omega'} \rangle - \omega \frac{d}{d\omega'} \langle \Phi_{\omega'} | \hat{I}_1 | \Phi_{\omega'} \rangle = 0 \quad (3.1.15)$$

или

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{\omega} \frac{d}{d\omega} E(\omega) = \mathfrak{S}_2 \left. \frac{d}{d\omega} I(\omega) \right|_{\omega=0}. \quad (3.1.16)$$

Из этого уравнения также следует соотношение

$$\omega = \frac{dE}{dI}, \quad (3.1.17)$$

которое позволяет на основе экспериментальных значений энергий определить эффективные значения угловой скорости вращения ядра.

Экспериментальные значения энергий $E(I)$ невозможно сравнивать непосредственно с квазичастичными спектрами, которые соответствуют энергиям во вращающейся системе (раусиану), являющимся функциями частоты ω . Поэтому в [36] было предложено представлять экспериментальную энергию в виде

$$E'(\omega) = E(\omega) - \omega I_1(\omega), \quad (3.1.18)$$

где $E'(\omega)$ — энергия во вращающейся системе.

Среднее значение угловой частоты может быть определено из соотношения

$$\omega = \frac{dE(I)}{dI_1},$$

которое можно переписать в конечных разностях

$$\omega(I) = \frac{E(I+1) - E(I-1)}{I_1(I+1) - I_1(I-1)}, \quad (3.1.19)$$

где угловой момент $\hat{I}_1(I)$ перпендикулярен оси симметрии

$$\hat{I}_1(I) = \sqrt{\left(I + \frac{1}{2}\right)^2 - K^2}.$$

Согласно (3.1.19) любой переход $(I+1) \rightarrow (I-1)$ между уровнями ротационной полосы определяет угловую частоту $\tilde{\omega}$, соответствующую угловому моменту I , представляющему среднее значение двух угловых моментов уровней, участвующих в переходе. Таким образом, получают дискретный ряд точек $\omega(I)$. Функцию $\omega(I)$ или ей обратную $I(\omega)$, можно найти интерполяцией. Экспериментальный раусиан (3.1.18) с помощью (3.1.19) можно записать в виде

$$E'(I) = \frac{1}{2} (E(I+1) - E(I-1)) - \omega(I) \hat{I}_1(I), \quad (3.1.20)$$

где среднее значение $E(I+1) - E(I-1)$ использовано для аппроксимации $E(I)$.

Гамильтониан (3.1.10) МПВ не является инвариантным относительно вращений, поэтому волновая функция Φ_ω не является собственной функцией углового момента I . Поэтому потребуем сохранения его в среднем [103]:

$$\langle \Phi_\omega | \hat{I}_1 | \Phi_\omega \rangle = \sqrt{I(I+1)}. \quad (3.1.21)$$

В первом порядке

$$\omega = \frac{\sqrt{I(I+1)}}{\mathfrak{S}_1}$$

и из (3.1.18) следует

$$E(I) = E(0) + \frac{1}{2\mathfrak{S}_1} I(I+1). \quad (3.1.22)$$

При небольших значениях ω , т.е. при выполнении закономерности $I(I+1)$ необходимо вычислить лишь одну постоянную – момент инерции $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$, который определяется только энергией 2^+ уровня и следовательно, можно применять теорию возмущений ([103],[104]).

§3.1.2 Явление бэкбендинга

Несмотря на солидную, почти полувековую историю, прошедшую с момента открытия, явление бэкбендинга [105] продолжает привлекать внимание специалистов как один из интереснейших феноменов ядерной физики. Первые работы, посвященные этой теме, носили чисто феноменологический характер и использовали среднее поле типа кренкинг+Нильссен либо Саксона-Вудса без рассмотрения монопольного спаривания [39,106]. Однако при таком рассмотрении учитывать изменения параметров деформации самосогласованным образом в зависимости от частоты вращения было невозможно и для учета этого чаще всего ограничивались оболочечными поправками Струтинского [107]. Известно, что общепринято объяснять явление бэкбендинга как результат пересечения

выстроенной s -полосы с основной ротационной gr -полосой. Обычно s -полоса имеет двухквазичастичный характер и поэтому изучение бэкбендинга можно провести, не принимая в расчет остаточные взаимодействия дальнего порядка. Однако, как выяснилось в последнее время [108], такие остаточные взаимодействия могут играть существенную роль при определении момента инерции ядра и тем самым их учет может играть важную роль также и при анализе явления бэкбендинга.

Основой микроскопических рассмотрений такого феномена может служить метод Хратри-Фока-Боголюбова (ХФБ) в комбинации с (МПВ). При таком рассмотрении, учитывая эффективные нуклон-нуклонные взаимодействия типа Скирма [106,109-110] или Гогни [111] деформированное среднее поле можно получить самосогласованным образом. Такой подход позволяет рассматривать низколежащие коллективные состояния вокруг $yrast$ -линии, конструируя самосогласованный метод МПВ+ХФБ с привлечением приближения хаотических фаз (ПХФ). Необходимость такого анализа подогревается прежде всего тем, чтобы получаемые одночастичные схемы среднего поля были бы замкнуты относительно систематики экспериментальных данных об одночастичных спектрах. Однако на этом уровне приходится сталкиваться с достаточно серьезной проблемой такого рода: вследствие возможности вариации параметров в широких масштабах достаточно надежной гарантии полной микроскопической самосогласованности обеспечивать очень сложно. Практически во всех эффективных взаимодействиях используемые параметры, будь они взаимодействия Скирма, Гогни или даже параметры релятивистского Лагранжиана, фитируются в зависимости от радиуса ядра (массового числа), энергии связи или др. характеристик. Поэтому различные параметризации приводят к различным одночастичным спектрам и следова-

тельно, находятся в достаточно грубом отношении к экспериментальным данным. В связи с этим, для более точного апеллирования к эксперименту с использованием ПХФ, все еще необходимо исходить из феноменологических потенциалов, параметры которых подбираются в соответствии с экспериментальной систематикой для широкого круга ядер.

Остаточные взаимодействия в форме мультипольных разложений (см. приложение ПЗ.В) обычно добавляются к феноменологическому среднему полю типа Нильссона или Саксона-Вудса. На первом шаге при формулировке ПХФ с использованием феноменологического среднего поля Нильссона константы взаимодействия учитывают в форме коэффициентов разложения по мультиполям, которые определяют с помощью фитирования к нижайшим экспериментальным однофононным энергиям четно-четных ядер (квадрупольные β и γ или октупольные фононные энергии). Однако в случае деформированных ядер константы мультиполь-мультипольных взаимодействий, фитированные в соответствии с экспериментальными данными, достаточно сильно различаются от соответствующих осцилляторных значений [112].

Более искусственное приближение, применяемое для определения констант сепарабельных мультиполь-мультипольных взаимодействий, основано на восстановлении симметрий полного гамильтониана, нарушенных деформацией среднего поля [2,113]. В случае деформированного осцилляторного среднего поля (без $\vec{l}\vec{s}$ и $\vec{l}\vec{l}$ членов) такая процедура была продемонстрирована в [16] в рамках кренкинг-осцилляторной модели с остаточными квадруполь-квадрупольными взаимодействиями, где константы таких взаимодействий определялись на основе восстановления вращательной симметрии.

§3.2 Самосогласованное описание коллективных возбуждений во вращающихся ядрах

В данном параграфе развивается оригинальный квазисамосогласованный подход для описания коллективных возбуждений при больших спинах. Подход использует среднее поле с затравочным потенциалом Нильссона и остаточными монополь-монопольными, квадруполь-квадрупольными взаимодействиями и монопольным спариванием. Мультиполь-мультипольные взаимодействия мы определяем в «дважды масштабированных» (doubly stretched) координатах, аналогично работе [114]. Мы также учитываем дополнительное слагаемое в гамильтониане, восстанавливающее галилеевскую инвариантность. В отличие от [114], константы квадруполь-квадрупольных взаимодействий были определены из условия самосогласования, после разделения ложных решений ПХФ. Зависимость параметров β и γ -деформаций от частоты вращения определяем с помощью приведенных вероятностей для $E2$ -переходов вдоль *yrast*-полосы [44]. Вычисленные нами значения нижайших коллективных раусианов находятся в хорошем согласии с экспериментом.

§3.2.1 Формализм ХФБ

В нашем подходе будем исходить из гамильтониана МПВ в форме [115]

$$\hat{H}_\omega = \hat{h}_{sph} + \hat{h}_{add} - \hbar\omega \hat{I}_1 + \hat{H}_{pair} + \hat{H}_{MM} - \sum_{\tau=N,P} \lambda_\tau \hat{N}_\tau, \quad (3.2.1)$$

где \hat{h}_{sph} – гамильтониан сферического поля

$$\hat{h}_{sph}(\vec{r}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} \Omega_0^2 r^2 - \quad (3.2.2)$$

$$- 2k\hbar\Omega_0 \vec{l} \vec{s} - k\mu\hbar\Omega_0 (\vec{l}^2 - \langle \vec{l}^2 \rangle_N), \quad (3.2.3)$$

k, μ - параметры Нильссона, $\Omega_0 = \Omega_0(\beta, \gamma)$ и $\Omega_{00} = 1.2\mathcal{A}^{\frac{1}{3}}$ - осцилляторная частота. Здесь член

$$\begin{aligned}\hat{h}_{add} &= -(\vec{\nabla}_p V) \cdot m\vec{\omega} \times \vec{r} = -\omega m(x_2 \frac{\partial}{\partial p_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial p_2})V(\vec{r}, \vec{p}) = \\ &= \hbar\omega m c^2 \frac{2k\hbar\Omega_{00}}{\hbar^2 c^2} [r^2 s_1 - x_1 \vec{r} \cdot \vec{s}] \\ &+ \frac{\hbar\omega k \mu \hbar \Omega_{00}}{\hbar^2 c^2} [2m c^2 r^2 - \frac{\hbar^2 c^2}{\hbar \Omega_{00}} (N + \frac{3}{2})] l_1\end{aligned}\quad (3.2.4)$$

введен для восстановления галилеевской инвариантности [114], поскольку требование галилеевской инвариантности приводит к необходимости преобразования импульса согласно $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - m(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{p} - [0, -\omega x_3, \omega x_2]$, а $V(\vec{r}, \vec{p})$ - потенциальная часть сферического поля \hat{h}_{sph} в (3.2.2) и $\vec{\omega} \equiv (\omega, 0, 0)$. Часть гамильтониана \hat{H}_{pair} соответствует монополюному спариванию

$$\begin{aligned}\hat{H}_{pair} &= -G_N \hat{P}_N^+ \hat{P}_N - G_P \hat{P}_P^+ \hat{P}_P, \\ P_\tau^+ &= \sum_\nu a_\nu^+ a_{\bar{\nu}}, \quad \tau = N, P\end{aligned}\quad (3.2.5)$$

с соответствующими константами спаривания для нейтронов и протонов (соответственно G_N и G_P). Гамильтониан \hat{H}_{MM} описывает сепарабельные (квадруполь-квадрупольные и монополюльные) взаимодействия

$$\begin{aligned}\hat{H}_{MM} &= - \sum_{\tau=0,1} \sum_{r=\pm 1} \sum_{\mu=1}^2 \frac{k_2[\tau]}{2} (\hat{M}_{22\mu}^{[r]})^2 - \\ &- \sum_{\tau=0,1} \frac{k_2[\tau]}{2} (\hat{M}_{220}^{[r]})^2 - \sum_{\tau=0,1} \frac{k_2[\tau]}{2} (\hat{M}_{220}^{[r]} - \langle |\hat{M}_{200}^{[+]}| \rangle_\omega)^2,\end{aligned}\quad (3.2.6)$$

где $(\hat{M}_{l\lambda\mu}^{[r]_0})$, $(\hat{M}_{l\lambda\mu}^{[r]_1})$ - изоскалярный и изовекторный части симметризованных мультиполюльных операторов (с сигнатурой

$r = \pm 1$) (см. приложение ПЗ.А). Введем оператор (см. приложение ПЗ.В)

$$\hat{M}_{l\lambda\mu}[r] = \frac{i^{\lambda+\mu+\frac{r+3}{2}}}{\sqrt{2(1+\delta_{\mu 0})}} \left(\hat{M}_{l\lambda\mu} + (-1)^{\lambda+\frac{r+3}{2}} \hat{M}_{l\lambda-\mu} \right), \quad (3.2.7)$$

где

$$\hat{M}_{l\lambda\mu} = \sum_{q_1\sigma_1 q_2\sigma_2} \langle q_1\sigma_1 | r^l Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) | q_2\sigma_2 \rangle a_{q_1\sigma_1}^+ a_{q_2\sigma_2}. \quad (3.2.8)$$

Используя обобщенное преобразование Боголюбова и минимизируя с помощью вариационной процедуры гамильтониан (3.2.1), а также используя условия $\sum_k [U_{ki}U_{ki} + V_{\bar{k}i}V_{\bar{k}i}] = 1$, $\sum_k [U_{\bar{k}i}U_{\bar{k}i} + V_{k\bar{i}}V_{k\bar{i}}] = 1$, получаем самосогласованные уравнения для определения коэффициентов преобразования:

$$\begin{pmatrix} h(1) & \Delta^{(1)} \\ \Delta^{(2)} & h(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U}_i \\ \tilde{V}_i \end{pmatrix} = \varepsilon_i \begin{pmatrix} \tilde{U}_i \\ \tilde{V}_i \end{pmatrix} \quad (3.2.9)$$

и

$$\begin{pmatrix} h(1) & \Delta^{(1)} \\ \Delta^{(2)} & h(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{V}_{\bar{i}} \\ \tilde{U}_{\bar{i}} \end{pmatrix} = -\varepsilon_{\bar{i}} \begin{pmatrix} \tilde{V}_{\bar{i}} \\ \tilde{U}_{\bar{i}} \end{pmatrix}, \quad (3.2.10)$$

где \tilde{U}_i , \tilde{V}_i и $\tilde{V}_{\bar{i}}$, $\tilde{U}_{\bar{i}}$ являются матрицами

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_i \\ \tilde{V}_i \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ \dots \\ V_{1i} \\ V_{2i} \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

(аналогично для $\tilde{V}_{\bar{i}}$, $\tilde{U}_{\bar{i}}$), а $h(1)$, $h(2)$ и Δ – матрицы с матричными элементами

$$(h(1))_{kl} = \delta_{kl} [\hbar\Omega_0(N_k + \frac{3}{2})]$$

$$\begin{aligned}
& -k\hbar\Omega_{00} \left(j_k(j_k + 1) - l_k(l_k + 1) - \frac{3}{4} \right) \\
& -k\mu\hbar\Omega_{00} \left(l_k(l_k + 1) - \frac{N_k(N_k + 3)}{2} \right) - \lambda_\tau \\
& + \langle k|h_{add}|l \rangle_G - \hbar\omega \langle k|I_1|l \rangle_G - \\
& -k_2[0] \langle M_{200}[0]^+ \rangle_\omega \langle k|\hat{M}_{200}[0]^+|l \rangle_G \\
& -k_2[0] \langle M_{220}[0]^+ \rangle_\omega \langle k|\hat{M}_{220}[0]^+|l \rangle_G \\
& -k_2[0] \langle M_{222}[0]^+ \rangle_\omega \langle k|\hat{M}_{222}[0]^+|l \rangle_G, \tag{3.2.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(h(2))_{kl} &= -\delta_{kl}[\hbar\Omega_0(N_k + \frac{3}{2}) - k\hbar\Omega_{00} \times \\
& \times \left(j_k(j_k + 1) - l_k(l_k + 1) - \frac{3}{4} \right) - \\
& -k\mu\hbar\Omega_{00} \left(l_k(l_k + 1) - \frac{N_k(N_k + 3)}{2} \right) - \lambda_\tau \\
& + \langle k|h_{add}|l \rangle_G - \hbar\omega \langle k|I_1|l \rangle_G + \\
& +k_2[0] \langle M_{200}[0]^+ \rangle_\omega \langle k|\hat{M}_{200}[0]^+|l \rangle_G \\
& +k_2[0] \langle M_{220}[0]^+ \rangle_\omega \langle k|\hat{M}_{220}[0]^+|l \rangle_G + \\
& +k_2[0] \langle M_{222}[0]^+ \rangle_\omega \langle k|\hat{M}_{222}[0]^+|l \rangle_G, \tag{3.2.13}
\end{aligned}$$

$$\Delta_{kl} = -\delta_{kl}G_\tau \langle HFB|\hat{P}_\tau|HFB \rangle_\omega. \tag{3.2.14}$$

Средние значения для симметризованных мультипольных операторов $\langle HFB|\hat{M}_{220}[+]|HFB \rangle_\omega$ и $\langle HFB|\hat{M}_{222}[+]|HFB \rangle_\omega$ связаны с параметрами квадрупольной деформации с помощью стандартных соотношений

$$\begin{aligned}
m\Omega_0^2\beta \cos \gamma &= k_2[0] \langle M_{220}[+] \rangle \\
m\Omega_0^2\beta \sin \gamma &= -k_2[0] \langle M_{222}[+] \rangle. \tag{3.2.15}
\end{aligned}$$

Отсюда получаем для осцилляторных частот вдоль главной оси следующие соотношения

$$\begin{aligned}\Omega_1^2 &= \Omega_0^2 \left[1 - 2\beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right], \\ \Omega_2^2 &= \Omega_0^2 \left[1 - 2\beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cos\left(\gamma - \frac{4\pi}{3}\right) \right], \\ \Omega_3^2 &= \Omega_0^2 \left[1 - 2\beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cos(\gamma) \right],\end{aligned}\quad (3.2.16)$$

которые удовлетворяют условию сохранения объема

$$\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 = \Omega_{00}^3, \quad \Omega_{00} = 1.2\mathcal{A}^{\frac{1}{3}}. \quad (3.2.17)$$

Если в (3.2.1) ограничиться осцилляторным сферическим средним полем и лишь мультиполь-мультипольными взаимодействиями, то вариационный метод дает только осцилляторное условие самосогласования

$$\Omega_1^2 \langle x_1^2 \rangle = \Omega_2^2 \langle x_2^2 \rangle = \Omega_3^2 \langle x_3^2 \rangle. \quad (3.2.18)$$

После решения задачи ХФБ гамильтониан кренкинг-модели может быть переписан с помощью квазичастичных операторов в следующем виде

$$\begin{aligned}\hat{H}_\omega &= \langle HFB | \hat{H}_\omega | HFB \rangle_\omega + \sum_{\tau=n,p} \sum_{i \in \tau} (\varepsilon_i \alpha_i^+ \alpha_i + \varepsilon_{\bar{i}} \alpha_{\bar{i}}^+ \alpha_{\bar{i}}) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\tau=0,1} k_0[\tau] \{ \hat{M}_{200[\tau]}^{(1)[+]} \hat{M}_{200[\tau]}^{(1)[+]} + \hat{M}_{200[\tau]}^{(1)[+]} \hat{M}_{200[\tau]}^{(2)[+]} \\ &\quad + \hat{M}_{200[\tau]}^{(2)[+]} \hat{M}_{200[\tau]}^{(1)[+]} + \hat{M}_{200[\tau]}^{(2)[+]} \hat{M}_{200[\tau]}^{(2)[+]} \} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\tau=0,1} k_2[\tau] \{ \hat{M}_{220[\tau]}^{(1)[+]} \hat{M}_{220[\tau]}^{(1)[+]} + \hat{M}_{220[\tau]}^{(1)[+]} \hat{M}_{220[\tau]}^{(2)[+]} \\ &\quad + \hat{M}_{220[\tau]}^{(2)[+]} \hat{M}_{220[\tau]}^{(1)[+]} + \hat{M}_{220[\tau]}^{(2)[+]} \hat{M}_{220[\tau]}^{(2)[+]} \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \sum_{\tau=0,1} k_2[\tau] \{ \hat{M}_{221}^{(1)}[r] \hat{M}_{221}^{(1)}[r] + \hat{M}_{221}^{(1)}[r] \hat{M}_{221}^{(2)}[r] \\
& \quad + \hat{M}_{221}^{(2)}[r] \hat{M}_{221}^{(1)}[r] + \hat{M}_{221}^{(2)}[r] \hat{M}_{221}^{(2)}[r] \} \\
& -\frac{1}{2} \sum_{\tau=0,1} k_2[\tau] \{ \hat{M}_{222}^{(1)}[r] \hat{M}_{222}^{(1)}[r] + \hat{M}_{222}^{(1)}[r] \hat{M}_{222}^{(2)}[r] \\
& \quad + \hat{M}_{222}^{(2)}[r] \hat{M}_{222}^{(1)}[r] + \hat{M}_{222}^{(2)}[r] \hat{M}_{222}^{(2)}[r] \} \\
& - \sum_{\tau=n,p} G_\tau \{ P_\tau^{(1)+} P_\tau^{(1)} + P_\tau^{(1)+} P_\tau^{(2)} + P_\tau^{(2)+} P_\tau^{(1)} + P_\tau^{(2)+} P_\tau^{(2)} \}.
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Преобразуем деформированный осцилляторный потенциал

$$\begin{aligned}
V_{def.osc.}(\vec{r}) &= \frac{1}{2} m \Omega_0^2 r^2 - k_2[0] < |M_{220}[+] | >_\omega \hat{M}_{220}[+](\vec{r}) - \\
& - k_2[0] < |M_{222}[+] | >_\omega \hat{M}_{222}[+](\vec{r}) = \frac{m}{2} (\Omega_1^2 x_1^2 + \Omega_2^2 x_2^2 + \Omega_3^2 x_3^2)
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

с помощью преобразований [116,117]

$$x'' = \frac{\Omega_i}{\Omega_0} x_i, \quad V_{def.osc.}(r''^2) = \frac{1}{2} m \Omega_0^2 r''^2 \tag{3.2.21}$$

в сферически-симметричный осцилляторный потенциал. При этом мы будем учитывать следующие соотношения преобразования для произведений радиальной части на компоненты сферической функции:

$$\begin{aligned}
(r^2 Y_{20})'' &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (2 x_3''^2 - x_1''^2 - x_2''^2) = \\
&= \frac{2\Omega_3^2 - \Omega_1^2 - \Omega_2^2}{3\Omega_0^2} \sqrt{\frac{5}{16\pi}} r^2 + \frac{4\Omega_3^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2}{6\Omega_0^2} (r^2 Y_{20}) \\
&\quad - \frac{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}{2\sqrt{3}\Omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{2}} (r^2 Y_{22} + r^2 Y_{2-2}); \\
\frac{1}{\sqrt{2}} [(r^2 Y_{22} + r^2 Y_{2-2})]'' &= \sqrt{\frac{15}{16\pi}} (x_1''^2 - x_2''^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}{3\Omega_0^2} \sqrt{\frac{15}{16\pi}} r^2 - \frac{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}{2\sqrt{3}\Omega_0^2} (r^2 Y_{20}) \\
&\quad + \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2\Omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{2}} (r^2 Y_{22} + r^2 Y_{2-2}); \\
&(r^2)'' = \sqrt{4\pi} (r^2 Y_{00})'' = x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2 \\
&= \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2}{3\Omega_0^2} r^2 - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - 2\Omega_3^2}{6\Omega_0^2} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} (r^2 Y_{20}) \\
&\quad + \frac{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}{2\Omega_0^2} \sqrt{\frac{16\pi}{15}} \frac{1}{\sqrt{2}} (r^2 Y_{22} + r^2 Y_{2-2}).
\end{aligned}$$

Если пренебречь слагаемыми $\vec{l}\vec{s}$ и $\vec{l}\vec{l}$ в гамильтониане (3.2.2) (чисто осцилляторный случай), то мы можем ограничиться условиями самосогласования (3.2.17) и с помощью (3.2.20) получим нулевые средние значения операторов $M_{220}[+]$, $M_{222}[+]$:

$$\begin{aligned}
\langle |M_{220}''[+]| \rangle_\omega &= \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta \cos \gamma \right) \langle |M_{220}[+]| \rangle_\omega - \\
-\frac{5}{4\pi} \beta \cos \gamma \langle |M_{200}[+]| \rangle_\omega &+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta \sin \gamma \langle |M_{222}[+]| \rangle_\omega = 0; \\
\langle |M_{222}''[+]| \rangle_\omega &= \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta \cos \gamma \right) \langle |M_{222}[+]| \rangle_\omega - \\
-\frac{5}{4\pi} \beta \cos \gamma \langle |M_{200}[+]| \rangle_\omega &+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta \sin \gamma \langle |M_{220}[+]| \rangle_\omega = 0.
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

В случае осцилляторного потенциала соотношения (3.2.21) могут быть рассмотрены как условия самосогласования для равновесных деформаций β и γ в *yrast*-состоянии. Однако $\vec{l}\vec{s}$ и $\vec{l}\vec{l}$ члены в выражении (3.2.2) нарушают условия самосогласования (3.2.21). Но в то же время, если эти члены рассматривать лишь как небольшие поправки к чистому осцилляторному среднему полю (3.2.2), то оказывается, что условия

самосогласования нарушаются также очень слабо и в практических вычислениях ими можно пренебречь. Также можно заметить, что такое самосогласование справедливо и между средним полем и распределением плотности массы, выражаемое в формуле для константы квадруполь-квадрупольного взаимодействия $k_2[0]$ в (3.2.18) (см. [22]):

$$k_2 = \frac{4\pi}{5} \frac{m\Omega_0^2}{\langle r''^2 \rangle}. \quad (3.2.23)$$

Это соотношение для сферически-симметричного среднего поля, после проведения преобразований (3.2.20) оказывается в достаточной степени справедливым и для случая деформированной системы.

§3.2.2 Уравнения ПХФ

В рамках ПХФ состояния около *yrast*-линии в четно-четных ядрах описываются посредством фононов, которые при данной частоте вращения ω представляют собой линейные комбинации двухквазичастичных (бозонных) операторов. Они имеют следующий вид:

$$b_{k\bar{l}}^+ = \alpha_k^+ \alpha_{\bar{l}}^+, \quad b_{kl}^+ = \alpha_k^+ \alpha_l^+, \quad b_{\bar{k}\bar{l}}^+ = \alpha_{\bar{k}}^+ \alpha_{\bar{l}}^+. \quad (3.2.23)$$

Эти операторы инвариантны относительно эрмитового сопряжения, вращения на угол π вокруг оси Oz и относительно обращения времени:

$$\begin{aligned} b_{kl}^+ &= -b_{lk}^+, & b_{\bar{k}\bar{l}}^+ &= -b_{\bar{l}\bar{k}}^+, & b_{k\bar{l}}^+ &= -b_{\bar{l}k}^+; \\ \hat{R}_1^{-1} b_{k\bar{l}}^+ \hat{R}_1 &= b_{k\bar{l}}^+, & \hat{R}_1^{-1} b_{kl}^+ \hat{R}_1 &= -b_{kl}^+, & \hat{R}_1^{-1} b_{\bar{k}\bar{l}}^+ \hat{R}_1 &= -b_{\bar{k}\bar{l}}^+; \\ \hat{T}^{-1} b_{k\bar{l}}^+ \hat{T} &= -b_{k\bar{l}}^+, & \hat{T}^{-1} b_{kl}^+ \hat{T} &= b_{k\bar{l}}^+, & \hat{T}^{-1} b_{\bar{k}\bar{l}}^+ \hat{T} &= b_{kl}^+. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

В приближении ПХФ коммутатор двух одночастичных операторов может быть представлен как среднее по квазичастичному вакуумному состоянию

$$[\hat{F}, \hat{G}] \approx [\hat{F}, \hat{G}]_{RPA} = \langle BCS | [\hat{F}, \hat{G}] | BCS \rangle_\omega. \quad (3.2.25)$$

В таком приближении двухквазичастичные операторы удовлетворяют бозонным коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [b_{kl}, b_{mn}^+]_{RPA} &= \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}, & [b_{k\bar{l}}, b_{m\bar{n}}^+]_{RPA} &= \delta_{km}\delta_{ln}; \\ [b_{k\bar{l}}, b_{m\bar{n}}^+]_{RPA} &= \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}, & [b_{k\bar{l}}, b_{m\bar{n}}^+]_{RPA} &= 0; \\ [b_{kl}, b_{mn}]_{RPA} &= [b_{kl}^+, b_{mn}^+]_{RPA} = 0, & [b_{k\bar{l}}, b_{m\bar{n}}^+]_{RPA} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Из соотношений (3.2.26) следует, что подпространство операторов $(b_{kl}, b_{k\bar{l}}, b_{kl}^+, b_{k\bar{l}}^+)$ в приближении ПХФ отделены от подпространства $(b_{k\bar{l}}, b_{k\bar{l}}^+)$, поэтому мы можем записать

$$\begin{aligned} \alpha_k^+ \alpha_l &\approx \sum_m (b_{km}^+ b_{lm} + b_{k\bar{m}}^+ b_{l\bar{m}}), & \alpha_k^+ \alpha_{\bar{l}} &\approx \sum_m (b_{km}^+ b_{\bar{l}m} + b_{k\bar{m}}^+ b_{\bar{l}\bar{m}}), \\ \alpha_k^+ \alpha_{\bar{l}} &\approx \sum_m (b_{km}^+ b_{\bar{l}m} + b_{k\bar{m}}^+ b_{\bar{l}\bar{m}}). \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

С помощью (3.2.23), (3.2.26) гамильтониан (3.2.18) может быть представлен в бозонной форме

$$\begin{aligned} \hat{h}_\omega(av) &= \langle HFB | \hat{H}_\omega | HFB \rangle_\omega + \sum_{\tau=n,p} \sum_{i \in \tau} (\epsilon_i \alpha_i^+ \alpha_i + \epsilon_{\bar{i}} \alpha_{\bar{i}}^+ \alpha_{\bar{i}}) \approx \\ &\approx \langle HFB | \hat{H}_\omega | HFB \rangle_\omega + \sum_{ij} \epsilon_{i\bar{j}} b_{ij}^+ b_{i\bar{j}} + \frac{1}{2} \sum_{ij} (\epsilon_{ij} b_{ij}^+ b_{ij} + \epsilon_{\bar{i}\bar{j}} b_{\bar{i}\bar{j}}^+ b_{\bar{i}\bar{j}}), \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

где $\epsilon_{i\bar{j}} = \epsilon_i + \epsilon_{\bar{j}}$, $\epsilon_{ij} = \epsilon_i \epsilon_j$, $\epsilon_{\bar{i}\bar{j}} = \epsilon_{\bar{i}} + \epsilon_{\bar{j}}$.

Коллективные колебания ядра с малыми амплитудами представляются с помощью уравнений движения

$$\begin{aligned} [\hat{H}_\omega, \hat{\mathcal{P}}_\nu]_{RPA} &= i\hbar\Omega_\nu^2 \hat{X}_\nu, & [\hat{H}_\omega, \hat{X}_\nu] &= -i\hbar\hat{\mathcal{P}}_\nu, \\ [\hat{X}_\Omega, \hat{\mathcal{P}}_\nu]_{RPA} &= i\hbar\delta_{\nu\nu'}, & \hat{X}_\nu^+ &= \hat{X}_\nu, & \hat{\mathcal{P}}_\nu^+ &= \hat{\mathcal{P}}_\nu, \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

где \hat{X}_ν и $\hat{\mathcal{P}}_\nu$ - операторы обобщенных координат и импульсов внутреннего состояния ν с энергией $\hbar\Omega_\nu$. Обычно решения уравнений движения в ПХФ опираются на следующие предположения:

1. Соотношения (3.2.26) всегда выполняются.
2. Обобщенные координаты \hat{X}_ν и импульсы $\hat{\mathcal{P}}_\nu$, описывающие вибрационные возбуждения, представляются в виде линейной комбинации двухквазичастичных бозонных операторов (3.2.23).
3. При решении уравнений (3.2.29), членами $\hat{M}_{\lambda\mu}^{(2)[\tau]} \hat{M}_{\lambda\mu}^{(2)[\tau]}$ и $\hat{\mathcal{P}}_\tau^{(2)+} \hat{\mathcal{P}}_\tau^{(2)}$ в кренкинг-гамильтониане можно пренебречь. Учет этих членов приводит к ангармоническим эффектам и поэтому могут быть рассмотрены как следующий этап приближения.

Помимо этих допущений, мы также предполагаем, что уравнения ХФБ решаются без преобразований (3.2.20), и лишь после решения уравнений ХФБ слагаемые гамильтониана (3.2.18) преобразуем в «дважды масштабированные» координаты с помощью (3.2.20).

При решении уравнений (3.2.29) для четно-четных ядер мы рассматриваем только члены, которые являются билинейными комбинациями бозонных операторов $b_{k\bar{l}}^+$, b_{kl}^+ , $b_{\bar{k}\bar{l}}^+$, и следовательно, в этих уравнениях учитываем лишь следующие слагаемые:

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{RPA} = & \langle HFB | H_\omega | HFB \rangle_\omega \\
 & + \sum_{ij} \varepsilon_{ij} b_{ij}^+ b_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{ij} (\varepsilon_{ij} b_{ij}^+ b_{ij} + \varepsilon_{\bar{i}\bar{j}} b_{\bar{i}\bar{j}}^+ b_{\bar{i}\bar{j}}) \\
 & - \sum_{\tau=n,p} G_\tau \hat{\mathcal{P}}_\tau^{(1)+} \hat{\mathcal{P}}_\tau^{(1)} \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{\tau=0,1} k_0[\tau] (\hat{M}_{200}''^{(1)[\tau]})^2 - \frac{1}{2} \sum_{\tau=0,1} k_2[\tau] (\hat{M}_{220}''^{(1)[\tau]})^2 - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{\tau=0,1} k_0[\tau] \sum_{r=\pm} (\hat{M}_{221}''^{(1)[\tau]})^2 - \frac{1}{2} \sum_{\tau=0,1} k_2[\tau] \sum_{r=\pm} (\hat{M}_{220}''^{(1)[\tau]})^2.
 \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

После решения уравнений движения (3.2.29), гамильтониан \hat{H}_{RPA} (3.2.30) может быть выражен через обобщенные переменные $(\hat{X}_\nu, \hat{\mathcal{P}}_\nu)$:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{RPA} &= \frac{1}{2} \sum_{\nu} (\hat{\mathcal{P}}_{\nu}^2 + \Omega_{\nu}^2 \hat{X}_{\nu}^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu(\Omega_{\nu} \neq 0)} (\hat{\mathcal{P}}_{\nu}^2 + \Omega_{\nu}^2 \hat{X}_{\nu}^2) + \frac{1}{2} \sum_{\nu_0(\Omega_{\nu_0} = 0)} \hat{\mathcal{P}}_{\nu_0}^2 = \\ &= \sum_{\nu(\Omega_{\nu} \neq 0)} \hbar \Omega_{\nu} \left(Q_{\nu}^+ Q_{\nu} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\nu_0(\Omega_{\nu_0} = 0)} \hat{\mathcal{P}}_{\nu_0}^2, \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

где введены операторы рождения (уничтожения) фононов:

$$\begin{aligned} Q_{\nu}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\Omega_{\nu}}{\hbar}} \hat{X}_{\nu} - \frac{i}{\sqrt{\hbar \Omega_{\nu}}} \hat{\mathcal{P}}_{\nu} \right), \\ Q_{\nu} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\Omega_{\nu}}{\hbar}} \hat{X}_{\nu} + \frac{i}{\sqrt{\hbar \Omega_{\nu}}} \hat{\mathcal{P}}_{\nu} \right), \quad [Q_{\nu}, Q_{\nu'}^+] = \delta_{\nu\nu'} \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

и фоновый вакуум определен как

$$Q_{\nu} |RPA\rangle_{\omega=0} = 0. \quad (3.2.33)$$

Учет квазибозонных соотношений (3.2.26) позволяет записать гамильтониан ПХФ в виде суммы коммутирующих слагаемых (в соответствии с сигнатурой и четностью)

$$\hat{H}_{RPA} = \langle BCS | \hat{H}_{\omega} | BCS \rangle_{\omega} + \hat{H}_{(r=+1)}^{(\pi=+1)} + \hat{H}_{(r=-1)}^{(\pi=+1)}, \quad (3.2.34)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{H}_{(r=+1)}^{(\pi=+1)} &= \sum_{ij\pi_i\pi_j=+1} \varepsilon_{ij} b_{ij}^+ b_{ij} - \sum_{ij} G_{\tau} \hat{P}_{\tau}^{(1)+} \hat{P}_{\tau}^{(1)-} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\tau=0,1} k_0[\tau] (\hat{M}_{200}''^{(1)}[\tau])^2 - \frac{1}{2} \sum_{\tau=0,1} k_2[\tau] (\hat{M}_{220}''^{(1)}[\tau])^2 - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\tau=0,1} k_2[\tau] \sum_{r=\pm} (\hat{M}_{221}''^{(1)}[\tau])^2 - \frac{1}{2} \sum_{\tau=0,1} k_2[\tau] \sum_{r=\pm} (\hat{M}_{222}''^{(1)}[\tau])^2; \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{(r=-1)}^{(\pi=+1)} &= \sum_{ij\pi_i\pi_j=+1} (\varepsilon_{ij} b_{ij}^+ b_{ij} + \varepsilon_{\bar{i}\bar{j}} b_{\bar{i}\bar{j}}^+ b_{\bar{i}\bar{j}}) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\tau=0,1} k_2[\tau] \sum_{r=\pm} (\hat{M}_{221}''^{(1)}[\tau])^2 - \frac{1}{2} \sum_{\tau=0,1} k_2[\tau] \sum_{r=\pm} (\hat{M}_{222}''^{(1)}[\tau])^2. \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Вследствие этого, уравнения движения (3.2.29) ПХФ решаются независимо для каждой части гамильтониана (3.2.34).

Общий гамильтониан $\hat{H} = \hat{H}_\omega + \omega \hat{I}_1$ удовлетворяет следующим соотношениям симметрии

$$[\hat{H}, \hat{I}_i] = [\hat{H}, \hat{\mathcal{P}}_i] = [\hat{H}, \hat{\mathcal{N}}_\tau] = 0, \quad (3.2.37)$$

где \hat{I}_i компоненты полного углового момента, $\hat{\mathcal{P}}_i$ - компоненты полного импульса ($i = 1, 2, 3$) и $\hat{\mathcal{N}}_\tau$ - оператор числа частиц ($\tau = n, p$). Из выражений (3.2.37) для МПВ-гамильтониана следуют соотношения симметрии

$$\begin{aligned} [\hat{H}_\omega, \hat{I}_1] &= 0, \quad [\hat{H}_\omega, \hat{\mathcal{P}}_1] = 0; \\ [\hat{H}_\omega, \hat{I}_2] &= -i\hbar\omega \hat{I}_3, \quad [\hat{H}_\omega, \hat{\mathcal{P}}_2] = -i\hbar\omega \hat{\mathcal{P}}_3; \\ [\hat{H}_\omega, \hat{I}_3] &= i\hbar\omega \hat{I}_2, \quad [\hat{H}_\omega, \hat{\mathcal{P}}_3] = -i\hbar\omega \hat{\mathcal{P}}_2; \\ [\hat{H}_\omega, \hat{\mathcal{N}}_\tau] &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

Подстановка в (3.2.38) для \hat{H}_ω его ПХФ-образа (см.(3.2.34)) для части положительной четности кренкинг гамильтониана дает следующие соотношения симметрии:

$$[\hat{H}_{(\pi=+1)}^{(r=+1)}, \hat{I}_1^{(1)}]_{RPA} = [\hat{H}_{(\pi=+1)}^{(r=+1)}, \hat{\mathcal{N}}_\tau^{(1)}]_{RPA} = 0; \quad (3.2.39)$$

$$[\hat{H}_{(\pi=+1)}^{(r=-1)}, \hat{I}_2^{(1)}]_{RPA} = i\hbar\omega \hat{I}_3^{(1)}; \quad [\hat{H}_{(\pi=+1)}^{(r=-1)}, \hat{I}_3^{(1)}]_{RPA} = -i\hbar\omega \hat{I}_2^{(1)}; \quad (3.2.40)$$

$$[\hat{H}_{(\pi=-1)}^{(r=-1)}, \hat{\mathcal{P}}_2^{(1)}]_{RPA} = -i\hbar\omega \hat{\mathcal{P}}_3^{(1)}; \quad [\hat{H}_{(\pi=-1)}^{(r=-1)}, \hat{\mathcal{P}}_3^{(1)}]_{RPA} = i\hbar\omega \hat{\mathcal{P}}_2^{(1)}; \quad (3.2.41)$$

$$[\hat{H}_{(\pi=-1)}^{(r=+1)}, \hat{\mathcal{P}}_1^{(1)}]_{RPA} = 0. \quad (3.2.42)$$

Из (3.2.39)-(3.2.42), а также из соотношений

$$[\hat{I}_i, \hat{\mathcal{P}}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{\mathcal{P}}, \quad [\hat{I}_i, \hat{I}_j] = -i\varepsilon_{ijk}\hat{I}_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3.2.43)$$

следует, что в рамках ПХФ

$$[\hat{I}_i^{(1)}, \hat{\mathcal{P}}_j^{(1)}]_{RPA} = i\varepsilon_{ijk} \langle BCS | \hat{P}_k | BCS \rangle_\omega = 0, \quad (3.2.44)$$

$$[\hat{I}_1^{(1)}, \hat{I}_2^{(1)}]_{RPA} = -i \langle BCS | \hat{I}_3 | BCS \rangle_\omega = 0, \quad (3.2.45)$$

$$[\hat{I}_2^{(1)}, \hat{I}_3^{(1)}]_{RPA} = -i \langle BCS | \hat{I}_1 | BCS \rangle_\omega \neq 0,$$

$$[\hat{I}_3^{(1)}, \hat{I}_1^{(1)}]_{RPA} = -i \langle BCS | \hat{I}_2 | BCS \rangle_\omega = 0, \quad (3.2.46)$$

$$[\hat{I}_i^{(1)}, \hat{\mathcal{N}}_\tau^{(1)}]_{RPA} = [\hat{\mathcal{P}}_i^{(1)}, \hat{\mathcal{N}}_\tau^{(1)}]_{RPA} = 0, \quad [\hat{\mathcal{P}}_i^{(1)}, \hat{\mathcal{P}}_j^{(1)}]_{RPA} = 0. \quad (3.2.47)$$

Сравнивая выражения (3.2.47) и (3.2.29) мы видим, что среди решений уравнений ПХФ с гамильтонианом $\hat{H}_{(\pi=+1)}^{(r=+1)}$ имеется одно нулевое решение (нефизическое), связанное с оператором $\hat{I}_1^{(1)}$, и два - с $\hat{\mathcal{N}}_\tau^{(1)}$ ($\tau = N, Z$). Следовательно,

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathcal{P}}_{\nu_0=I_1} = \sqrt{g_{I_1}} \hat{I}_1^{(1)} \\ \hat{\mathcal{P}}_{\nu_0=\mathcal{N}_\tau} = \sqrt{g_{\mathcal{N}_\tau}} \hat{\mathcal{N}}_\tau^{(1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{H}_{(\pi=+1)}^{(r=+1)} = \frac{1}{2} \sum_{\nu(\omega_\nu \neq 0)} (\hat{\mathcal{P}}_\nu^2 + \hbar^2 \omega_\nu^2 \hat{X}_\nu^2) + \frac{1}{2} g_{I_1} \hat{I}_1^{(1)2} + \frac{1}{2} \sum_{\tau} g_{\mathcal{N}_\tau} \hat{\mathcal{N}}_\tau^{(1)2}. \quad (3.2.48)$$

Способ определения массовых параметров g_{I_1} и $g_{\mathcal{N}_\tau}$ подробно обсуждается в [118]. Из (3.2.48) следует, что величина $\mathfrak{I} = 1/g_{I_1}$ представляет собой момент инерции ядра относительно оси вращения x . Сравнение выражения (3.2.29) с (3.2.40) позволяет заключить, что из операторов $\hat{I}_2^{(1)}$ и $\hat{I}_3^{(1)}$ можно построить моду гамильтониана $\hat{H}_{(\pi=-1)}^{(r=-1)}$ с энергией $\hbar\Omega = \hbar\omega$:

$$[\hat{H}_{(\pi=+1)}^{(r=-1)}, \Gamma^+] = \hbar\omega\Gamma^+, \quad [\hat{H}_{(\pi=+1)}^{(r=-1)}, \Gamma] = -\hbar\omega, \quad [\Gamma, \Gamma^+] = 1 \quad (3.2.49)$$

и

$$\hat{H}_{(\pi=+1)}^{(r=-1)} = \frac{1}{2} \sum_{\nu(\Omega_\nu \neq 0, \omega)} (\hat{\mathcal{P}}_\nu^2 + \hbar^2 \Omega_\nu^2 \hat{X}_\nu^2) + \hbar\omega(\Gamma^+ \Gamma + \frac{1}{2}), \quad (3.2.50)$$

где операторы Γ , Γ^+ определены посредством

$$\Gamma^+ = \frac{\hat{I}_2^{(1)} - i\hat{I}_3^{(1)}}{\sqrt{2 \langle HFB | \hat{I}_1 | HFB \rangle_\omega}}. \quad (3.2.51)$$

Сравнивая условия симметрии, связанные с вращением ядра и сохранением числа частиц, можно определить (для части гамильтониана, связанного с положительной четностью) духовые моды голдстоуновского типа для кренкинг гамильтониана (3.2.34). Аналогичное приближение может быть использовано для идентификации духовых мод, связанных с симметриями движения центра масс в случае решений уравнений ПХФ отрицательной четности.

Уравнения ПХФ (3.2.29) решаются независимо для каждой части $\hat{H}_{(\pi)}^{(r)}$ гамильтониана (3.2.34). Операторы рождения фононов для каждой сигнатуры $r = \pm 1$ могут быть представлены в виде линейной комбинации операторов бозонного типа (см. например, [112, 118, 119])

$$Q_\nu^+ [r=+1] = \sum_{ij} (\psi_{ij}^\nu b_{ij}^+ - \phi_{ij}^\nu b_{ij}^-);$$

$$Q_\nu^+ [r=-1] = \sum_{ij} (\psi_{ij}^\nu b_{ij}^+ - \phi_{ij}^\nu b_{ij}^- + \psi_{i\bar{j}}^\nu b_{i\bar{j}}^+ - \phi_{i\bar{j}}^\nu b_{i\bar{j}}^-). \quad (3.2.52)$$

Теперь, вводя новые константы

$$k_\lambda \equiv k_\lambda[0] + k_\lambda[1], \quad k_\lambda[np] \equiv k_\lambda[0] - k_\lambda[1], \quad (3.2.53)$$

гамильтониан (3.2.34) перепишем в виде

$$H_{(\pi=+1)}^{(r=+1)} = \sum_{ij(\pi_i \pi_j = +1)} \varepsilon_{ij} b_{ij}^+ b_{ij}^- - \sum_{ij} G_\tau \hat{P}_\tau^{(1)+} \hat{P}_\tau^{(1)-}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\lambda=0,2} \frac{k_\lambda}{2} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \left(\hat{M}_{2\lambda\mu}^{(1)[+]} \hat{M}_{2\lambda\mu}^{(1)[+]} + \hat{M}_{2\lambda\mu}^{(1)[+]} \hat{M}_{2\lambda\mu}^{(1)[+]} \right) - \\
& - \sum_{\lambda=0,2} \frac{k_\lambda [np]}{2} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \left(\hat{M}_{2\lambda\mu}^{(1)[+]} \hat{M}_{2\lambda\mu}^{(1)[+]} + \hat{M}_{2\lambda\mu}^{(1)[+]} \hat{M}_{2\lambda\mu}^{(1)[+]} \right);
\end{aligned} \tag{3.2.54}$$

$$\begin{aligned}
H_{(\pi=+1)}^{(r=-1)} &= \sum_{ij(\pi_i\pi_j=+1)} \left(\varepsilon_{ij} b_{ij}^+ b_{ij} + \varepsilon_{\bar{i}\bar{j}} b_{\bar{i}\bar{j}}^+ b_{\bar{i}\bar{j}} \right) - \\
& - \frac{k_2}{2} \sum_{\mu=0}^2 \left(\hat{M}_{2\lambda\mu}^{(1)[-]} \hat{M}_{2\lambda\mu}^{(1)[-]} + \hat{M}_{2\lambda\mu}^{(1)[-]} \hat{M}_{2\lambda\mu}^{(1)[-]} \right) - \\
& - \sum_{\lambda=0,2} \frac{k_2 [np]}{2} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \left(\hat{M}_{2\lambda\mu}^{(1)[-]} \hat{M}_{2\lambda\mu}^{(1)[-]} + \hat{M}_{2\lambda\mu}^{(1)[-]} \hat{M}_{2\lambda\mu}^{(1)[-]} \right).
\end{aligned} \tag{3.2.55}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\hat{M}_{l\lambda\mu}^{(1)[\tau]} &= i^{\mu+2} \sum_{i,j \in \tau} f_{i\bar{j}}^{l\lambda\mu}[+] (b_{i\bar{j}}^+ + (-1)^\mu b_{i\bar{j}}^-), \\
\hat{P}_\tau^{(1)+[\tau]} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j \in \tau} \left(p_{i\bar{j}}^{(-)} (b_{i\bar{j}}^+ + b_{i\bar{j}}^-) + p_{i\bar{j}}^{(+)} (b_{i\bar{j}}^+ - b_{i\bar{j}}^-) \right), \\
\hat{M}_{l\lambda\mu}^{(1)[-]} &= i^{\mu+1} \frac{1}{2} \sum_{i,j \in \tau} (f_{ij}^{l\lambda\mu}[+] (b_{ij}^+ \\
& + (-1)^{\mu+1} b_{ij}^-) + f_{\bar{i}\bar{j}}^{l\lambda\mu}[+] (b_{\bar{i}\bar{j}}^+ + (-1)^{\mu+1} b_{\bar{i}\bar{j}}^-)),
\end{aligned} \tag{3.2.56}$$

где $f_{i\bar{j}}^{l\lambda\mu}[+]$, $f_{ij}^{l\lambda\mu}[-]$, $f_{\bar{i}\bar{j}}^{l\lambda\mu}[-]$, $p_{i\bar{j}}^\pm$ – вещественные величины, определяемые как

$$\begin{aligned}
p_{i\bar{j}}^{(\pm)} &= \sum_k (U_{ki} U_{\bar{k}\bar{j}} \mp V_{\bar{k}i} V_{k\bar{j}}); \\
f_{i\bar{j}}^{l\lambda\mu}[+] &= \sum_{kl \in \tau} (U_{ki} V_{l\bar{j}} + V_{\bar{k}i} U_{l\bar{j}}) \overline{\langle k | M_{\lambda\mu}'' | l \rangle_G};
\end{aligned}$$

$$f_{ij}^{l\lambda\mu}[-] = \sum_{kl \in \tau} (U_{ki} V_{\bar{l}j} + V_{\bar{k}i} U_{lj}) \overline{\langle k | M''_{l\lambda\mu} | \bar{l} \rangle_G};$$

$$f_{\bar{i}\bar{j}}^{l\lambda\mu}[-] = \sum_{kl \in \tau} (U_{\bar{k}\bar{i}} V_{\bar{l}\bar{j}} + V_{\bar{k}\bar{i}} U_{\bar{l}\bar{j}}) \overline{\langle k | M''_{l\lambda\mu} | \bar{l} \rangle_G}. \quad (3.2.57)$$

Подставляя теперь соотношения (3.2.56), (3.2.52), (3.2.54) или (3.2.55) в уравнения ПХФ (3.2.29), получаем систему алгебраических уравнений для определения неизвестных величин $R_k^{(\pm)}[\tau]$ ($\tau = N, P$):

$$\begin{aligned} & \sum_{n'=1}^{N(+)} \left(F_{nn'}^{(\varepsilon)}[N] - \frac{\delta_{nn'}}{2k_{n'}} \right) R_{n'}^{(+)}[N] + \sum_{n'=1}^{N(+)} \xi_{n'}^{(+)} F_{nn'}^{(\varepsilon)}[N] R_{n'}^{(+)}[P] + \\ & + \sum_{m=1}^{N(-)} F_{nm}^{(\omega)}[N] R_m^{(+)}[N] + \sum_{m=1}^{N(-)} \xi_m^{(-)} F_{nm}^{(\omega)}[P] R_m^{(-)}[P] = 0; \\ & \sum_{n'=1}^{N(+)} \xi_{n'}^{(+)} F_{nn'}^{(\varepsilon)}[P] R_{n'}^{(+)}[N] + \sum_{n'=1}^{N(+)} \left(F_{nn'}^{(\varepsilon)}[N] - \frac{\delta_{nn'}}{2k_{n'}} \right) R_{n'}^{(+)}[P] + \\ & + \sum_{m=1}^{N(-)} \xi_m^{(-)} F_{nm}^{(\omega)}[P] R_m^{(-)}[N] + \sum_{m=1}^{N(-)} F_{nm}^{(\omega)}[P] R_m^{(-)}[P] = 0; \\ & \sum_{n=1}^{N(+)} F_{mn}^{(\omega)}[N] R_m^{(+)}[N] + \sum_{n=1}^{N(+)} \xi_n^{(+)} F_{mn}^{(\omega)}[N] R_n^{(+)}[P] + \\ & + \sum_{m'=1}^{N(-)} \left(F_{mm'}^{(\varepsilon)}[N] - \frac{\delta_{mm'}}{2k_{m'}} \right) R_{m'}^{(-)}[N] \\ & + \sum_{m'=1}^{N(-)} \xi_{m'}^{(-)} F_{mm'}^{(\varepsilon)}[N] R_{m'}^{(-)}[P] = 0; \\ & \sum_{n=1}^{N(+)} \xi_n^{(+)} F_{mn}^{(\varepsilon)}[P] R_n^{(+)}[N] + \sum_{n=1}^{N(+)} F_{mn}^{(\varepsilon)}[P] R_n^{(+)}[P] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m'=1}^{N(-)} \xi_{m'}^{(-)} F_{mm'}^{(\varepsilon)} [P] R_{m'}^{(-)} [N] \\
 & + \sum_{m'=1}^{N(-)} \left(F_{mm'}^{(\varepsilon)} [P] - \frac{\delta_{mm'}}{2k_{m'}} \right) R_{m'}^{(-)} [P] = 0, \quad (3.2.58)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \xi_{pair}^{(\pm)} & \equiv 0, \quad g_{ij}^{(pair,\pm)} \equiv p_{ij}^{(\pm)}, \quad (r = +1); \\
 \xi_{\lambda\mu-even}^+ & \equiv \frac{k_\lambda^{[np]}}{k_\lambda}, \quad g_{ij}^{(l\lambda,\mu-even,+)} \equiv f_{ij}^{(l\lambda,\mu-even)}[+], \quad (r = +1); \\
 \xi_{l\lambda\mu-odd}^+ & \equiv \frac{k_\lambda^{[np]}}{k_\lambda}, \quad g_{ij\bar{or}\bar{i}\bar{j}}^{(l\lambda,\mu-odd,+)} \equiv f_{ij\bar{or}\bar{i}\bar{j}}^{(l\lambda,\mu-odd)}[-], \quad (r = -1); \\
 \xi_{l\lambda\mu-odd}^- & \equiv \frac{k_\lambda^{[np]}}{k_\lambda}, \quad g_{ij}^{(l\lambda,\mu-odd,-)} \equiv f_{ij}^{(l\lambda,\mu-odd)}[+], \quad (r = +1); \\
 \xi_{l\lambda\mu-even}^- & \equiv \frac{k_\lambda^{[np]}}{k_\lambda}, \quad g_{ij\bar{or}\bar{i}\bar{j}}^{(l\lambda,\mu-odd,-)} \equiv f_{ij\bar{or}\bar{i}\bar{j}}^{(l\lambda,\mu-odd)}[-], \quad (r = -1).
 \end{aligned} \quad (3.2.59)$$

В уравнениях (3.2.58) индексы $n, n' = 1, \dots, N(+)$ пробегает над одночастичными операторами типа $b^+ + b$, входящие в гамильтонианы (3.2.54) и (3.2.55), и $N(+)$ = 4, в случае $r = +1$, $N(+)$ = 1- в случае $r = -1$. Индексы же $m, m' = 1, \dots, N(-)$ нумеруют в этих гамильтонианах операторов типа $b^+ - b$, и соответственно $N(-)$ = 2 для $r = +1$, $N(-)$ = 1 для $r = -1$. Размерности систем уравнений (3.2.58) равны соответственно $2(N(+) + N(-)) = 10$ для $r = +1$ и $2(N(+) + N(-)) = 4$ для $r = -1$. Величины $F_{nn'}^{(\varepsilon)}[\tau]$, $F_{mm'}^{(\varepsilon)}[\tau]$, $F_{nm}^{(\varepsilon)}[\tau]$, в уравнениях (3.2.58) определены следующим образом:

$$F_{nn'}^{(\varepsilon)}[\tau] = F_{n'n}^{(\varepsilon)}[\tau] = \sum_{ij \in \tau} \frac{\varepsilon_{ij} g_{ij}^{(n,+)} g_{ij}^{(n',+)}}{\varepsilon_{ij}^2 - (\hbar\Omega)^2};$$

$$F_{mm'}^{(\varepsilon)}[\tau] = F_{m'm}^{(\varepsilon)}[\tau] = \sum_{ij \in \tau} \frac{\varepsilon_{i\bar{j}} g_{i\bar{j}}^{(m,-)} g_{i\bar{j}}^{(m',-)}}{\varepsilon_{i\bar{j}}^2 - (\hbar\Omega)^2};$$

$$F_{nm}^{(\varepsilon)}[\tau] = F_{mn}^{(\varepsilon)}[\tau] = \sum_{ij \in \tau} \frac{\hbar\Omega g_{i\bar{j}}^{(n,+)} g_{i\bar{j}}^{(m,-)}}{\varepsilon_{i\bar{j}}^2 - (\hbar\Omega)^2} \quad (3.2.60)$$

для $r = +1$ и

$$F_{nn'}^{(\varepsilon)}[\tau] = F_{n'n}^{(\varepsilon)}[\tau] = \frac{1}{2} \sum_{ij \in \tau} \left(\frac{\varepsilon_{ij} g_{ij}^{(n,+)} g_{ij}^{(n',+)}}{\varepsilon_{ij}^2 - (\hbar\Omega)^2} + \frac{\varepsilon_{i\bar{j}} g_{i\bar{j}}^{(n,+)} g_{i\bar{j}}^{(n',+)}}{\varepsilon_{i\bar{j}}^2 - (\hbar\Omega)^2} \right);$$

$$F_{mm'}^{(\varepsilon)}[\tau] = F_{m'm}^{(\varepsilon)}[\tau]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij \in \tau} \left(\frac{\varepsilon_{ij} g_{ij}^{(m,-)} g_{ij}^{(m',-)}}{\varepsilon_{ij}^2 - (\hbar\Omega)^2} + \frac{\varepsilon_{i\bar{j}} g_{i\bar{j}}^{(m,-)} g_{i\bar{j}}^{(m',-)}}{\varepsilon_{i\bar{j}}^2 - (\hbar\Omega)^2} \right);$$

$$F_{nm}^{(\varepsilon)}[\tau] = F_{mn}^{(\varepsilon)}[\tau]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij \in \tau} \left(\frac{\hbar\Omega g_{ij}^{(n,+)} g_{ij}^{(m,-)}}{\varepsilon_{ij}^2 - (\hbar\Omega)^2} + \frac{\hbar\Omega g_{i\bar{j}}^{(n,+)} g_{i\bar{j}}^{(m,-)}}{\varepsilon_{i\bar{j}}^2 - (\hbar\Omega)^2} \right) \quad (3.2.61)$$

для $r = -1$.

Условие разрешимости системы уравнений (3.2.58) требует, чтобы определитель системы обращался в нуль:

$$\det S = 0. \quad (3.2.62)$$

Решение системы уравнений (3.2.58) относительно неизвестных $R^{(+)}[\tau]$ ($k = 1, \dots, N(+)$; $\tau = n, p$) и $R^{(-)}[\tau]$ ($k = 1, \dots, N(-)$; $\tau = n, p$) позволяет найти двухквазичастичные амплитуды $\psi_{i\bar{j}}^\nu, \varphi_{i\bar{j}}^\nu$ (для $r = +1$) и $\psi_{ij}^\nu, \varphi_{ij}^\nu, \psi_{i\bar{j}}^\nu, \varphi_{i\bar{j}}^\nu$ (для $r = -1$):

$$\psi_{\varpi\text{eneut}}^\nu = \sum_{n=1}^{N(+)} \left(R_n^{(+)}[\tau = n] + \xi_n^{(+)} R_n^{(+)}[\tau = p] \right) \frac{g_{\varpi}^{(n,+)}}{\varepsilon_{\varpi} - \hbar\Omega_\nu} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1}^{N(-)} \left(R_m^{(-)}[\tau = n] + \xi_m^{(-)} R_m^{(-)}[\tau = p] \right) \frac{g_{\varpi}^{(m,-)}}{\varepsilon_{\varpi} - \hbar\Omega_{\nu}}; \\
\psi_{\varpi eprot}^{\nu} & = \sum_{n=1}^{N(+)} \left(\xi_n^{(+)} R_n^{(+)}[\tau = n] + R_n^{(+)}[\tau = p] \right) \frac{g_{\varpi}^{(n,+)}}{\varepsilon_{\varpi} - \hbar\Omega_{\nu}} + \\
& + \sum_{m=1}^{N(-)} \left(\xi_m^{(-)} R_m^{(-)}[\tau = n] + R_m^{(-)}[\tau = p] \right) \frac{g_{\varpi}^{(m,-)}}{\varepsilon_{\varpi} - \hbar\Omega_{\nu}}; \\
\varphi_{\varpi eprot}^{\nu} & = \sum_{n=1}^{N(+)} \left(R_n^{(+)}[\tau = n] + \xi^{(+)} R_n^{(+)}[\tau = p] \right) \frac{g_{\varpi}^{(n,+)}}{\varepsilon_{\varpi} - \hbar\Omega_{\nu}} + \\
& + \sum_{m=1}^{N(-)} \left(R_m^{(-)}[\tau = n] + \xi_m^{(-)} R_m^{(-)}[\tau = p] \right) \frac{g_{\varpi}^{(m,-)}}{\varepsilon_{\varpi} - \hbar\Omega_{\nu}}; \\
\varphi_{\varpi eprot}^{\nu} & = \sum_{n=1}^{N(+)} \left(\xi_n^{(+)} R_n^{(+)}[\tau = n] + R_n^{(+)}[\tau = p] \right) \frac{g_{\varpi}^{(n,+)}}{\varepsilon_{\varpi} - \hbar\Omega_{\nu}} - \\
& - \sum_{m=1}^{N(-)} \left(\xi_m^{(-)} R_m^{(-)}[\tau = n] + R_m^{(-)}[\tau = p] \right) \frac{g_{\varpi}^{(m,-)}}{\varepsilon_{\varpi} - \hbar\Omega_{\nu}}, \quad (3.2.63)
\end{aligned}$$

где $\varpi = i\bar{j}$ для $r = +1$ и $\varpi = ij, i\bar{j}$ для $r = -1$.

§3.2.3 Момент инерции Тоулесса-Валатина

Наконец, приведем некоторые соотношения для момента инерции \mathfrak{I}_1/g_{I_1} (более подробные выражения приведены, например, в [118,120]). В дальнейшем будем обозначать это посредством $\mathfrak{I}_{RPA}(2)$, поскольку его можно сравнивать с экспериментальным динамическим моментом инерции, который в отличие от кинематического, обозначаемого индексом (1), обозначается индексом (2).

Метод, изложенный в [120] применительно к гамильтониану (3.2.54), дает

$$\mathfrak{S}_{RPA}(2) = \frac{\det A}{\det B}, \quad (3.2.64)$$

где $\det A$ детерминант матрицы A (с размерностью 8) с матричными элементами

$$A_{ij} = F_{n_i, n_j}^{(\epsilon)}[\tau_i](\Omega = 0) - \frac{\delta_{n_i, n_j}}{k_{n_i}} \quad (\tau_i = \tau_j);$$

$$\xi_{n_i} A_{ij} = F_{n_i, n_j}^{(\epsilon)}[\tau_i](\Omega = 0) - \quad (\tau_i \neq \tau_j), \quad (3.2.65)$$

и $F_{n_i, n_j}^{(\epsilon)}[\tau_i](\Omega = 0)$ – выражение из (3.2.60), для $\Omega = 0$. Индексы i, j в соотношениях (3.2.65) пробегает одночастичные операторы в гамильтониане $\hat{H}_{(\pi=+1)}^{(r=+1)}$

$$\begin{aligned} i = 1 &\rightarrow n_1 = p(-), \quad \tau_1 = n, \quad k_{n_1} = G_n, \quad \xi_{n_1} = 0; \\ i = 2 &\rightarrow n_2 = p(-), \quad \tau_2 = p, \quad k_{n_2} = G_p, \quad \xi_{n_2} = 0; \\ i = 3 &\rightarrow n_3 = M''_{200}[\tau_3]^+, \quad \tau_3 = n, \quad k_{n_3} = k_0, \quad \xi_{n_3} = \frac{k_0[np]}{k_0}; \\ i = 4 &\rightarrow n_4 = M''_{200}[\tau_4]^+, \quad \tau_4 = p, \quad k_{n_4} = k_0, \quad \xi_{n_3} = \frac{k_0[np]}{k_0}; \\ i = 5 &\rightarrow n_5 = M''_{220}[\tau_5]^+, \quad \tau_5 = n, \quad k_{n_5} = k_2, \quad \xi_{n_5} = \frac{k_2[np]}{k_0}; \\ i = 6 &\rightarrow n_6 = M''_{220}[\tau_6]^+, \quad \tau_6 = p, \quad k_{n_6} = k_2, \quad \xi_{n_3} = \frac{k_2[np]}{k_0}; \\ i = 7 &\rightarrow n_7 = M''_{222}[\tau_7]^+, \quad \tau_7 = n, \quad k_{n_7} = k_2, \quad \xi_{n_3} = \frac{k_2[np]}{k_0}; \\ i = 8 &\rightarrow n_8 = M''_{222}[\tau_8]^+, \quad \tau_8 = p, \quad k_{n_8} = k_2, \quad \xi_{n_8} = \frac{k_2[np]}{k_0}. \end{aligned} \quad (3.2.66)$$

В (3.2.64) $\det B$ является определителем матрицы B (имеющую размерность 9) с матричными элементами

$$B_{ij} = A_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, 8) :$$

$$\begin{aligned}
 B_{19} &= -B_{91} = -F_{p^{(-)}, I_1}^{(\epsilon)}[n](\Omega = 0), \\
 B_{29} &= -B_{92} = -F_{p^{(-)}, I_1}^{(\epsilon)}[p](\Omega = 0), \\
 B_{39} &= -B_{93} = -F_{M_{200}'', I_1}^{(\epsilon)}[n](\Omega = 0), \\
 B_{49} &= -B_{94} = -F_{M_{220}'', I_1}^{(\epsilon)}[p](\Omega = 0), \\
 B_{59} &= -B_{95} = -F_{M_{220}'', I_1}^{(\epsilon)}[n](\Omega = 0), \\
 B_{69} &= -B_{96} = -F_{M_{220}'', I_1}^{(\epsilon)}[p](\Omega = 0), \\
 B_{79} &= -B_{97} = -F_{M_{222}'', I_1}^{(\epsilon)}[n](\Omega = 0), \\
 B_{89} &= -B_{98} = -F_{M_{222}'', I_1}^{(\epsilon)}[p](\Omega = 0), \\
 B_{99} &= - \left(F_{I_1 I_2}^{(\epsilon)}[n](\Omega = 0) + F_{I_1 I_2}^{(\epsilon)}[p](\Omega = 0) \right). \quad (3.2.67)
 \end{aligned}$$

§3.3 Сравнение с экспериментальными данными

С помощью феноменологического среднего поля нельзя получать информацию по изменению параметров β и γ деформации среднего поля посредством нахождения минимума полной энергии при определенных (с некоторым шагом) значениях угловой частоты вращения ω . Эти трудности в начале 70-х годов оправдывали использование метода оболочечных поправок Струтинского для нахождения указанных параметров. Если провести детальный анализ низколежащих коллективных возбуждений по одночастичной схеме, то результаты, полученные в рамках ПХФ, далеко не совпадают с экспериментальными значениями энергий для коллективных состояний. Этот факт в свою очередь, в какой то мере оправдывает исследования с использованием "улучшенного" среднего поля, которое дает более полную информацию об одночастичных энергиях соответствующих уровней.

Зависимости параметров деформации β и γ для ядер редкоземельной области с $N = 90$ от частоты вращения ядра ω были исследованы нами в [44], исходя из экспериментальных значений приведенных вероятностей для $\mathcal{B}(E2)$ переходов вдоль *yrast* и *yrare*-полос. Приведенная на рис. 3.1 такая зависимость для ядер ^{156}Dy и ^{158}Er находится в хорошем согласии с результатами систематического анализа [107], проведенного для ядер с $\mathcal{A} \sim 160$ в рамках оболочечных поправок Струтинского с помощью потенциала Нильссона.

Для исследования экспериментальных раусианов $R_\nu(\omega)$ ($\nu = \textit{yrast}, \beta, \gamma, \dots$) для ротационных полос четно-четных ядер, мы использовали метод, предложенный в [39]. Согласно этой работе, экспериментальный раусиан $R_\nu(\omega)$ определим следующим образом:

$$R_\nu(\omega) = E_\nu(\omega) - E_g(\omega), \quad (3.3.1)$$

где $E_\nu(\omega(I))$ - экспериментальная энергия и $E_g(\omega)$ реперная ("reference т.е. инертная полоса без выстраивания) полоса, параметризуемая с помощью формулы Харриса

$$E_g(\omega) = \int I_g(\omega) d\omega = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 + \frac{3}{4} J_1 \omega^4, \quad (3.3.2)$$

где

$$I_g(\omega) = (\mathfrak{S}_0 + 3\mathfrak{S}_1 \omega^2) \omega. \quad (3.3.3)$$

Так называемые инерциальные параметры Харриса J_0 и J_1 подобраны методом наименьших квадратов (с помощью специальной программы "FUMILI"). При таком определении также учитывается взаимодействие Кориолиса, которое смешивает нижайшую выстроенную полосу $K = 1^+$ с *gr* ($K = 0^+$), β и γ -полосами. Следовательно, параметры Харриса содержат информацию о кориолисовом смешивании полос, и тем самым определенные в (3.3.1) экспериментальные раусианы служат ценным источником для анализа явления бэкбэндинга.

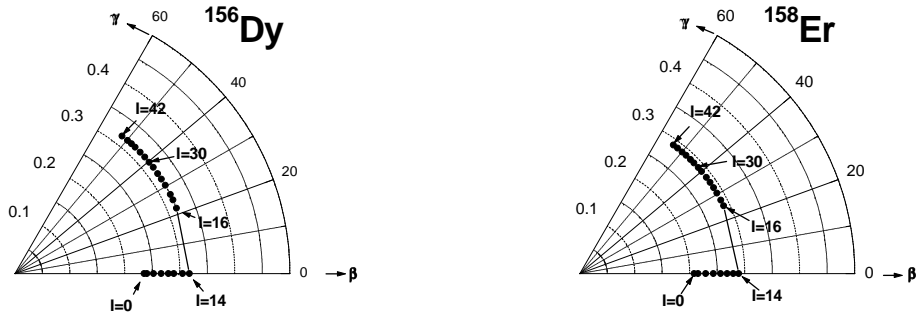


Рис. 3.3.1: Зависимости β и γ -деформаций от частоты вращения ω для ядер ^{156}Dy и ^{158}Er

Рассматривая разность $R_\nu(\omega) - R_{yr}(\omega)$ во вращающейся (внутренней) системе координат, мы можем непосредственно сравнивать их с соответствующими решениями $\hbar\Omega$ секулярного уравнения ПХФ. Полученные экспериментальные энергии обозначены на рис. 3.3.8 и 3.3.9 точками.

При решении уравнений (3.2.8), (3.2.9) вместо самосогласованного их решения использованы экспериментальные значения параметров деформации β и γ (см. рис. 3.3.1) в качестве исходных параметров и которые затем подставлены в (3.2.14), (3.2.11) и (3.2.12). Аналогично, как и в работе [114], мы также не стали проводить самосогласование по отношению к спариванию. Поэтому при проведении практических вычислений, была использована феноменологическая зависимость щели Δ_τ ($\tau = n, p$) от частоты вращения ядра согласно формуле (см. [114])

$$\Delta_\tau(\omega) = \begin{cases} \Delta_\tau(0) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right] & (\omega < \omega_c) \\ \Delta_\tau(0) \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 & (\omega > \omega_c) \end{cases}, \quad (3.3.4)$$

где ω_c - значение частоты пересечения полос (которое имеет примерно одинаковые значения для протонов и нейтронов в рассматриваемых ядрах: $\omega_c = 0.32$ МэВ для ^{156}Dy и $\omega_c = 0.33$ МэВ для ^{158}Er). Значения $\Delta_\tau(\omega = 0)$ взяты из [114] и равны $\Delta_n(\omega = 0) = 0.874$ МэВ и $\Delta_p(\omega = 0) = 0.884$ МэВ для ^{158}Er и $\Delta_n(\omega = 0) = 0.857$ МэВ и $\Delta_p(\omega = 0) = 0.879$ МэВ для ^{156}Dy . Поэтому в (3.3.1) мы берем значения $\Delta_{kl} = \delta_{kl} \Delta_\tau(\omega)$

при каждом значении ω с шагом, равным 0.02 МэВ. Параметры Нильссона k и μ в выражениях (3.2.11) и (3.2.12) взяты из [121], где проведен систематический анализ характеристик деформированных ядер. При вычислениях мы рассматривали вклады всех оболочек вплоть до $N = 8$.

В осцилляторном пределе константы изоскалярного монополюсного взаимодействия $k_0[\tau = 0]$ и изоскалярного квадрупольного взаимодействий $k_2[\tau = 0]$ равны и определяются самосогласованным образом с помощью соотношения (3.2.22). Изовекторную монополюсную константу же можно аппроксимировать посредством $k_0[\tau = 1] \sim -18k_0[\tau = 0]$, а изовекторную квадрупольную константу – посредством $k_2[\tau = 1] \sim -3.6k_2[\tau = 0]$ (см. [22]). Однако учет членов $\vec{l}\vec{s}$ и \vec{l}^2 в (3.2.11) и (3.2.12) нарушает эти осцилляторные самосогласованные значения. Но самосогласованность между остаточными взаимодействиями и феноменологическим средним полем может быть восстановлена с помощью соотношений симметрии (3.2.39)-(3.2.42), которым должен удовлетворять гамильтониан ПХФ. Для его положительной части это приводит к тому, что при каждом значении частоты вращения ω , среди решений уравнений ПХФ имеются два ложных решения с положительной ($r = +1$) сигнатурой (см. (3.2.48)). Одна из этих мод связана с проекцией \hat{I}_1 полного углового момента, а другая - оператором количества частиц $\hat{\mathcal{N}}$. В случае отрицательной сигнатуры $r = -1$ такие решения с $\hbar\Omega_\nu = 0$ связаны с проекциями \hat{I}_2 и \hat{I}_3 оператора полного момента \hat{I} (см. (3.2.50)). Эти требования позволяют нам определять значения констант $k_2[0]$ и G_n, G_p самосогласованным образом. Результаты, полученные с помощью этих требований, представлены на рис.3.2 (они обозначены с индексом "RPA") для ядер ^{156}Dy и ^{158}Er .

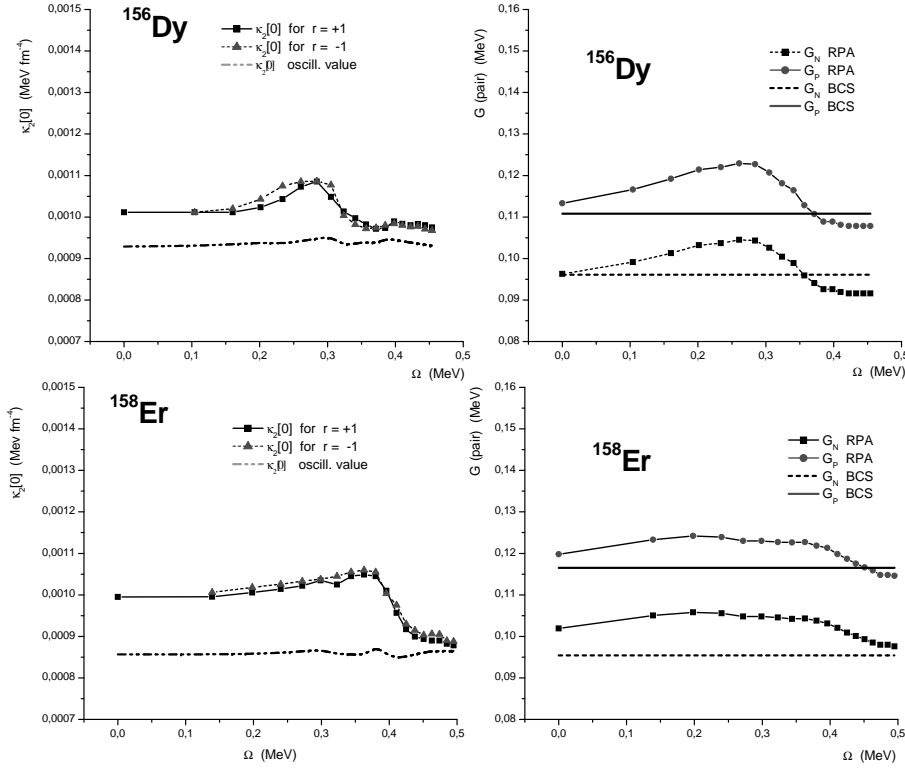


Рис. 3.3.2: Самосогласованные значения констант $k_2[0]$ изоскалярных квадрупольных взаимодействий (для положительной и отрицательной сигнатур) и констант спаривания G_n , G_p для ядер ^{156}Dy и ^{158}Er .

Эти значения сравниваются со значениями

$$G_\tau = -\Delta_\tau(0) / \langle \text{HFB} | \hat{P}_\tau | \text{HFB} \rangle_{\omega=0},$$

которые на рисунке приведены с индексом "BCS". Слева на рисунке (в верхней части) приведены значения констант квадрупольного взаимодействия $k_2[0]$, которые также определены с помощью тех же требований для обеих значений сигнатуры для ядра ^{156}Dy . Эти значения также сравниваются со значениями, полученными на основе осцилляторной модели, полученных с помощью (3.2.22). То же самое для ядра ^{158}Er представлено в нижней части рисунка.

Из рисунка 3.3.2 мы видим, что значения констант в случае ПХФ, полученных с помощью выделения ложных духовых решений, близки по значениям константам, полученным в осцилляторном приближении. Но малое различие этих констант очень важно для области частот, где происходит бэкбендинг. Константа квадрупольного изовекторного взаи-

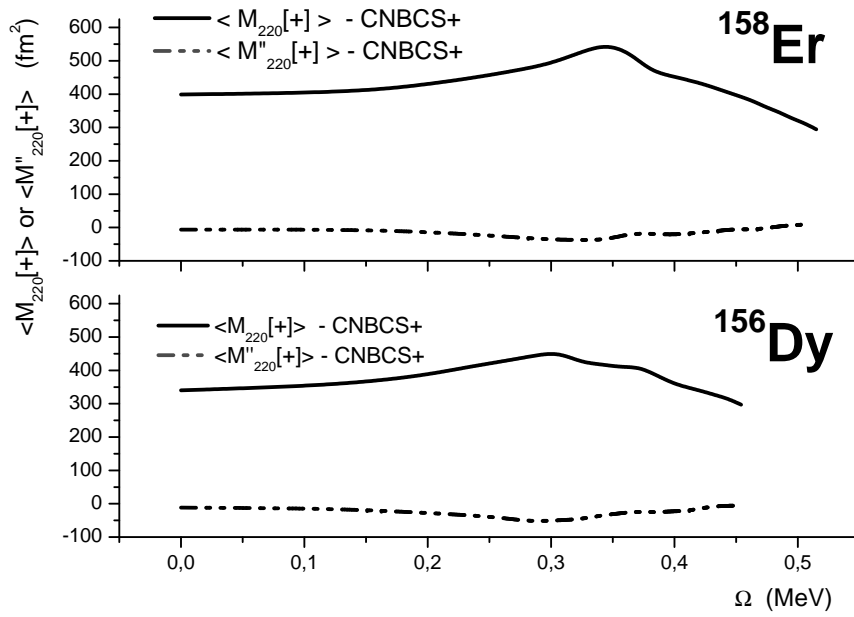


Рис. 3.3.3: Зависимости средних значений «дважды масштабированных» («double stretched») квадрупольных моментов $\langle M_{220}^{+} \rangle$ положительной сигнатуры от частоты вращения ядра ω . Для сравнения приведены не «дважды масштабированные» значения $\langle M_{220}^{+} \rangle$.

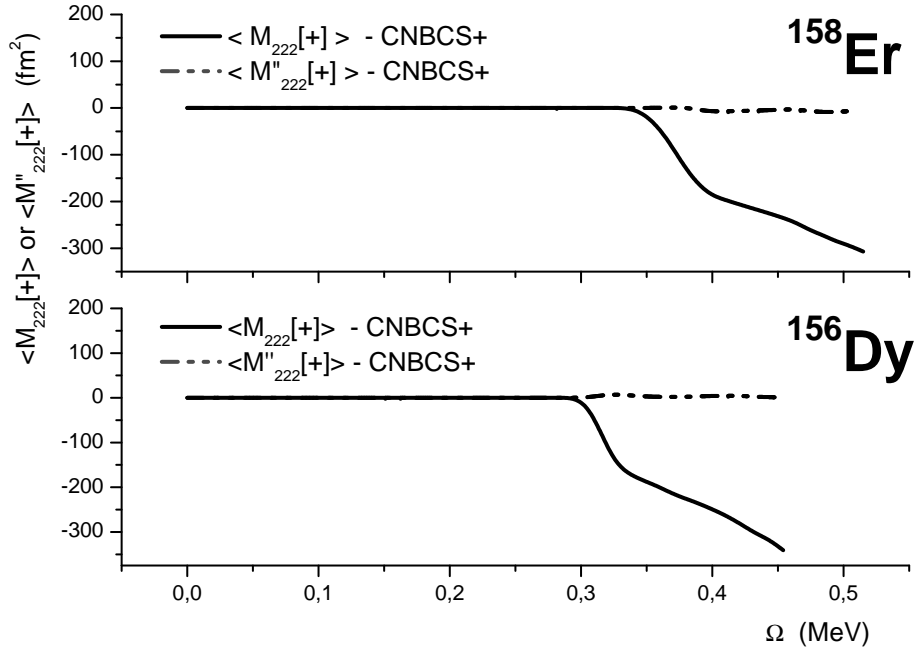


Рис. 3.3.4: То же, что и на рис. 3.3, для $\langle M''_{222}[+] \rangle$.

модействия, используемая в гамильтониане ПХФ, снова равна $k_2[\tau = 1] \sim -3.6k_0[\tau = 0]$. Что касается значений констант изоскалярного и изовекторного взаимодействий, то мы здесь использовали значения, полученные в осцилляторном приближении. В действительности малое различие константы монопольного взаимодействия не влияет на результаты вычислений в рамках ПХФ для низколежащих коллективных состояний вблизи *yrast*-линии.

Для того чтобы протестировать осцилляторные условия самосогласования (3.2.21) на рис. 3.3.3–3.3.4 даны их зависимости дважды масштабированных квадрупольных моментов положительной сигнатуры от частоты вращения ω при учете в (3.2.21) членов $\vec{l}\vec{s}$ и \vec{l}^2 . Для сравнения приведены обычные значения (не «дважды масштабированные») квадрупольных моментов, вычисленных также на основании потенциала Нильссона в рамках МПВ.

Эти рисунки показывают, что $\vec{l}\vec{s}$, \vec{l}^2 и h_{add} члены не нарушают условия самосогласования (3.2.21), поскольку «дважды масштабированные» квадрупольные моменты становятся равными нулю при всех значениях частоты вращения ω .

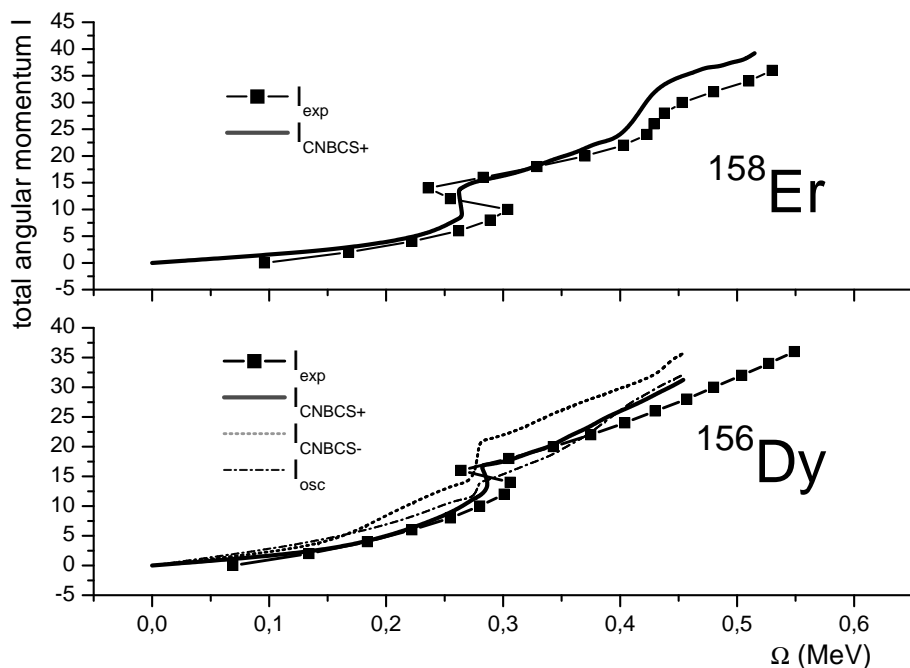


Рис. 3.3.5: Зависимость полного углового момента $\langle I_1 \rangle \sim I$ от частоты вращения ядра ω для ядер ^{156}Dy и ^{158}Er .

Если мы искусственно будем менять параметры деформации β и γ согласно экспериментальным данным, то «дважды масштабированные» квадрупольные моменты будут несколько возрастать в зависимости от ω . Следовательно, условия (3.2.21) могут служить хорошим индикатором при тестировании самосогласованности параметров деформации β и γ среднего поля.

На рисунке 3.3.5 мы представили зависимость полного углового момента $\langle I_1 \rangle \sim I$ от частоты вращения ядра ω для ядер ^{156}Dy и ^{158}Er .

Экспериментальные значения I сравниваются с его вычисленными значениями, где мы учитывали в гамильтониане выражение h_{add} , восстанавливающее галилеевскую инвариантность (кривая, обозначенная через CNBCS+). Для ядра ^{156}Dy (нижний рис.) также представлены значения $\langle I \rangle$, вычисленные в рамках Nilsson+BCS, без включения h_{add} (эта кривая обозначена как CNBCS-). Вычисления показывают, что в случае обоих ядер, бэкбендинг качественно хорошо описывается в рамках CNBCS+ вычислений.

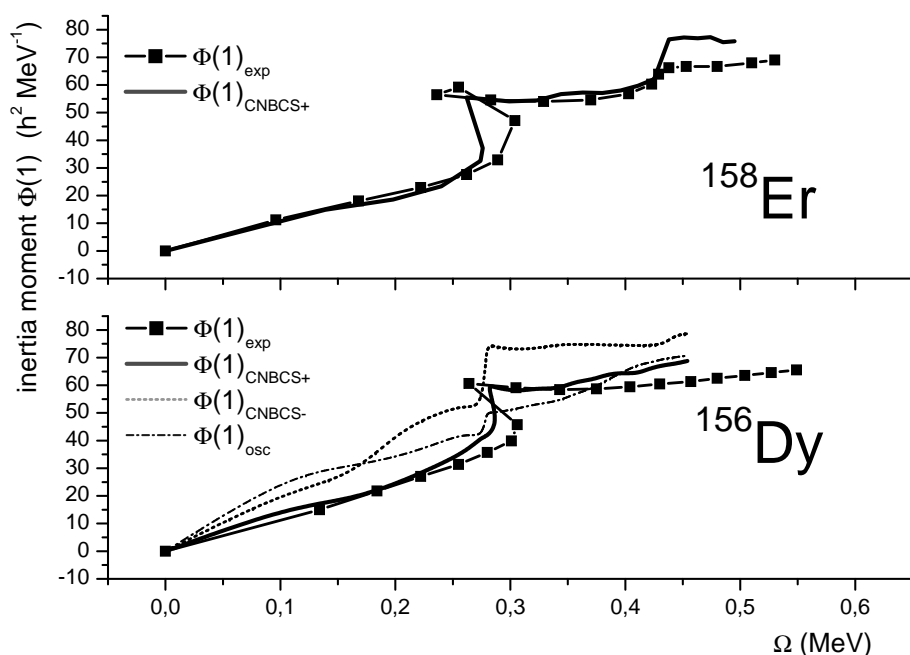


Рис. 3.3.6: Кинематический $\mathfrak{I}_1^{(1)}(\omega) = \langle \hat{J}_x \rangle / \omega$ моменты инерций *yrast* полосы для ядер ^{156}Dy ^{158}Er . (Сплошные линии, в единицах \hbar^2/MeV) сравниваются с соответствующими экспериментальными значениями (темные квадратики соединенные тонкими линиями). Кружочками на нижней части рисунка обозначены экспериментальные значения кинематического момента инерции для нижней полосы отрицательной четности.) Прерывистой линией обозначены значения момента инерции Таулесса-Валатина, вычисленные в рамках ПХФ.

Рисунки 3.3.6 и 3.3.7 представляют соответственно кинематический $\mathfrak{I}(1)$ и динамический $\mathfrak{I}(2)$ моменты инерции ядра.

Снова мы видим, что вычисления в рамках CNBCS+ достаточно хорошо соответствуют экспериментальным значениям момента инерции; лишь для высоких значений частоты вращения можно наблюдать некоторое расхождение - более завышенные значения кинематического момента инерции относительно экспериментальных значений. Возможно, это связано с ограниченностью CNBCS-подхода – пренебрежением возможного влияния эффектов остаточных взаимодействий на поведение момента инерции при высоких значениях частоты вращения. Для ядра ^{156}Dy (нижние части рисунков), как и в предыдущем случае, представлены также выражения для моментов инерций без учета члена h_{add} , а также их зна-

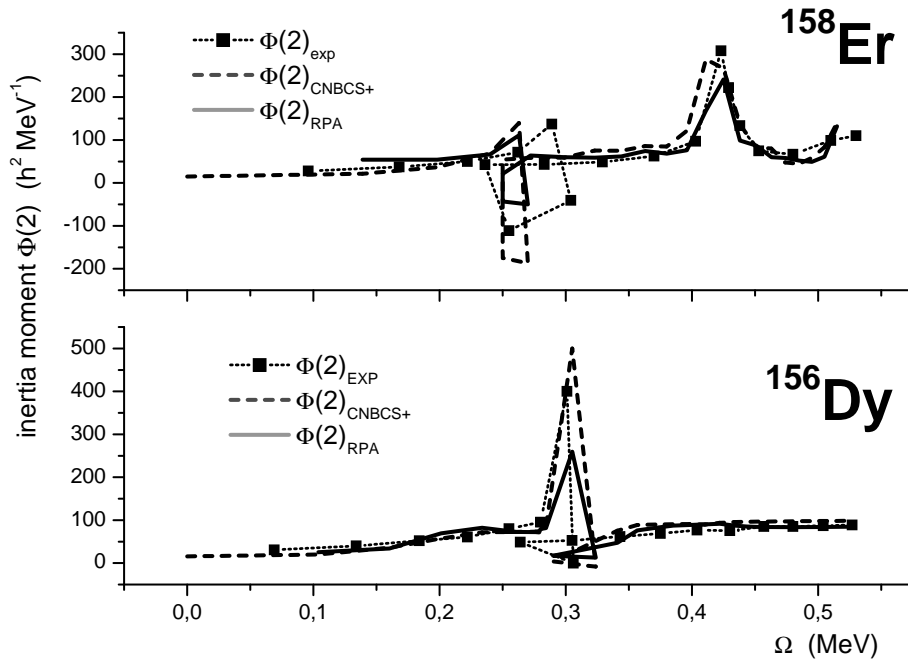


Рис. 3.3.7: Динамический $\mathfrak{S}_1^{(2)}(\omega) = \langle \hat{J}_x \rangle / \omega$ моменты инерции *yrast*-полосы для ядер ^{156}Dy ^{158}Er . (сплошные линии, в единицах \hbar^2/MeV) сравниваются с соответствующими экспериментальными значениями (темные квадратики соединенные тонкими линиями). Прерывистой линией обозначены значения момента инерции Таулесса-Валатина, вычисленные в рамках ПХФ.

чения, вычисленные с помощью потенциала гармонического осциллятора (соответственно CNBCS-, osc - кривые).

На рисунке 3.3.8 проведено сравнение вычисленных (на основе ПХФ) и экспериментальных значений нижайших раусианов положительной сигнатуры (где приведены также раусианы для *yrast*-линии).

Нижайшие возбужденные полосы представляют собой β и γ -полосы. Как видно из рисунка, решения ПХФ находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными вплоть до высоких значений частоты вращения ядра ω . Однако следующие экспериментальные раусианы известны лишь при малых значениях Ω , которые тем не менее также находятся в хорошем соответствии с ПХФ-раусианами. Рисунок показывает, что пересечение γ - вибрационной с *gr*-полосой происходит при $\omega \sim 0.32$ МэВ для обоих ядер и это пересечение вызывает бэкбендинг.

На рис. 3.3.9 показаны нижайшие раусианы с $r = -1$. Как

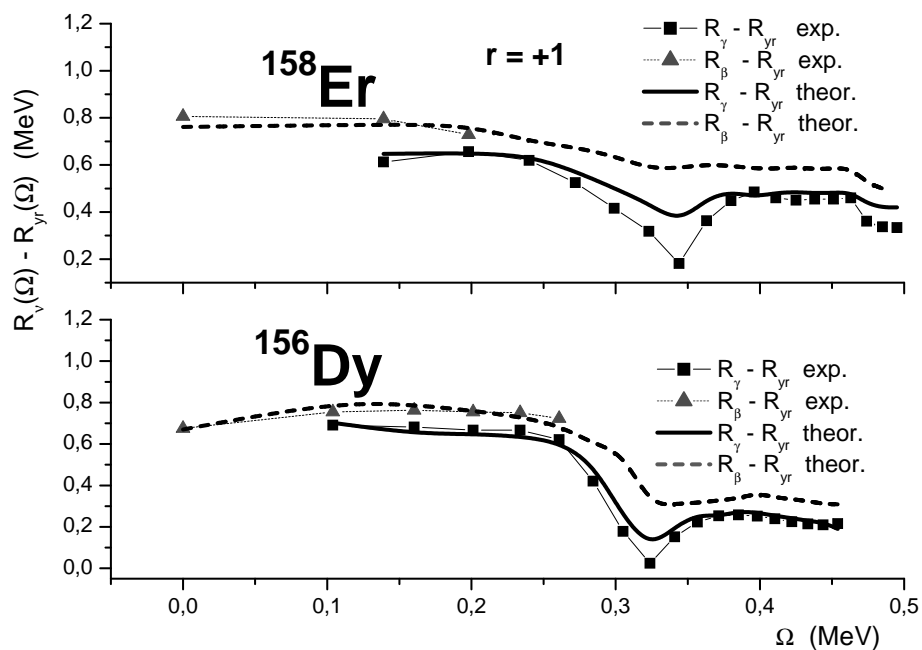


Рис. 3.3.8: Сравнение вычисленных значений на основе ПХФ-раусианов (жирные линии) положительной сигнатуры с экспериментальными (тонкие линии с треугольниками и квадратами) в зависимости от частоты вращения ω .

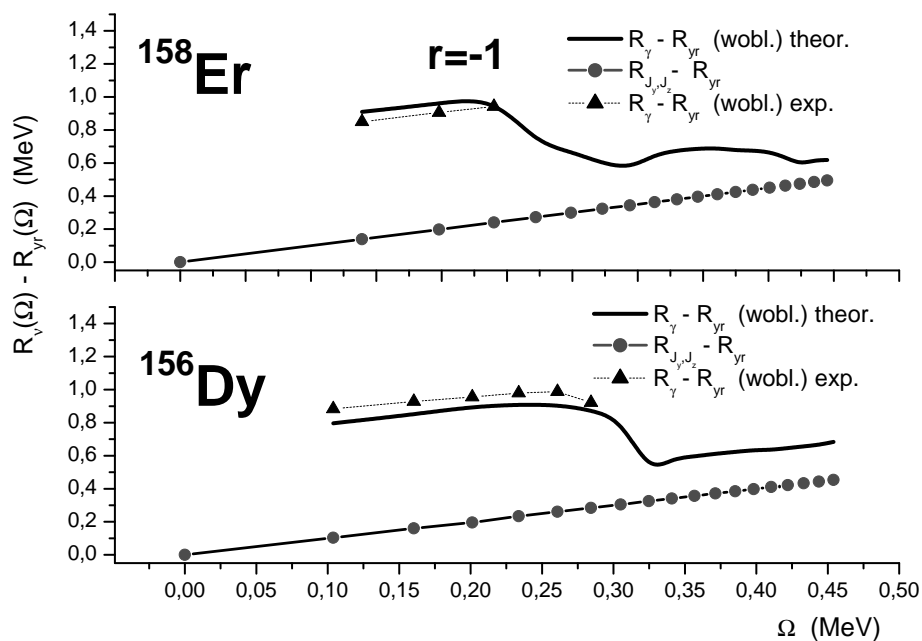


Рис. 3.3.9: То же, что и на рис. 3.8, для отрицательной сигнатуры

уже было отмечено, нижайшие раусианы с $r = -1$ должны иметь энергию $R_{I_y I_z}(\omega) - R_{yr}(\omega) = \hbar\Omega_{I_y I_z} = \omega$ и которые связаны с ложными модами (I_y, I_z) . Соответственно экспериментальным значениям энергии, следующие после ложных мод, возбужденные полосы должны соответствовать полосам с нечетными значениями спина I (при нижайших и умеренных ω). При высоких же значениях ω следующие возбужденные уровни могут быть интерпретированы как вобблинг-моды. Рисунок показывает, что уровни с нечетными I также находятся в хорошем соответствии с результатами ПХФ.

Нижайшие вибрационные энергии (которые в нашем случае представляют собой γ - вибрационные уровни) с энергиями $\hbar\Omega_{\gamma,exp} = 0.691$ МэВ для ^{156}Dy и $\hbar\Omega_{\gamma,exp} = 0.613$ МэВ для ^{158}Er могут быть использованы для проверки идеи о точке бифуркации, возникающей при вращении ядра вдоль оси симметрии. Эта идея была впервые предложена Маршалекком и Сабато [122] для сферических ядер, а затем обобщена в [123] и для аксиально-симметричных деформированных ядер, вращающихся вокруг оси симметрии.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ ПЗ А СИММЕТРИИ ОДНОЧАСТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Произвольный одночастичный оператор \hat{G} может быть определен в одночастичном базисе соотношением:

$$\begin{aligned} \hat{G} = \sum_{kl} (< k|G|l > a_k^+ a_l + < k|G|\bar{l} > a_k^+ a_{\bar{l}} \\ + < \bar{k}|G|l > a_{\bar{k}}^+ a_l + < \bar{k}|G|\bar{l} > a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{l}}) \end{aligned} \quad (\text{ПЗ. А1})$$

(это соотношение есть следствие теоремы Крамерса), который удовлетворяет следующим условиям симметрии:

$$\begin{aligned} \hat{T}^{-1}\hat{G}\hat{T} &= \gamma_T\hat{G}, & \hat{R}_1^{-1}\hat{G}\hat{R}_1 &= rG, & \hat{G}^+ &= \gamma_H\hat{G}, \\ & & \langle k|\hat{G}|l \rangle^* &= \gamma_c \langle k|\hat{G}|l \rangle, \end{aligned} \quad (\text{ПЗ. A2})$$

где $\gamma_T = \pm 1$, $r = \pm 1$, $\gamma_c = \pm 1$, $\gamma_H = \pm 1$ соответствующие квантовые числа (отметим, что квантовое число r называется сигнатурой).

Далее будем использовать для одночастичных состояний в Фоковском пространстве сигнатурный базис Гудмана $|\nu\rangle_G$, удовлетворяющий условиям R -симметрии (см. приложение П1) со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} R_1^{-1}a_\nu^+R_1 &= -ia_\nu^+, & R_1^{-1}a_{\bar{\nu}}^+R_1 &= -ia_{\bar{\nu}}^+; \\ R_1|\nu\rangle_G &= -i|\nu\rangle_G, & R_1|\bar{\nu}\rangle_G &= -i|\bar{\nu}\rangle_G; \\ |\bar{\nu}\rangle &= \hat{T}|\nu\rangle_G, & |\nu\rangle &= -\hat{T}|\bar{\nu}\rangle_G, \end{aligned} \quad (\text{ПЗ. A3})$$

где R_1 - оператор поворота вокруг 1-й оси на угол π , T - оператор обращения времени, связанный с оператором комплексного сопряжения \hat{K} соотношением

$$\hat{T} = \hat{R}_2^{-1}(\pi)\hat{K},$$

где \hat{R}_2^{-1} - оператор поворота на угол π вокруг 2-ой оси системы координат. Отсюда видно, что \hat{T} - антиунитарный оператор.

В базисе Гудмана одночастичные матричные элементы оператора $\hat{G}[r]$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned} G_{\bar{k}\bar{l}} &\equiv \langle \bar{k}|\hat{G}|\bar{l} \rangle_G = \gamma_T\gamma_C \langle k|\hat{G}|l \rangle_G = \gamma_T\gamma_C G_{kl}; \\ G_{\bar{k}l} &\equiv \langle \bar{k}|\hat{G}|l \rangle_G = -\gamma_T\gamma_C \langle k|\hat{G}|\bar{l} \rangle_G = \gamma_T\gamma_C G_{k\bar{l}}; \\ G_{kl} &\equiv \langle k|\hat{G}|l \rangle_G = r \langle k|\hat{G}|l \rangle_G = rG_{kl}; \\ G_{k\bar{l}} &\equiv \langle k|\hat{G}|\bar{l} \rangle_G = -r \langle k|\hat{G}|\bar{l} \rangle_G = -rG_{k\bar{l}}. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ. A4})$$

Из этих выражений следует, что

$$\begin{aligned} G_{p\bar{h}} &= 0 & (r = +1), \\ G_{ph} &= 0 & (r = -1). \end{aligned} \quad (\text{ПЗ. A5})$$

Поэтому выражение (ПЗ.A1) может быть переписано в базисе Гудмана следующим образом:

$$\hat{G}[r = +1] = \sum_{kl} (a_k^+ a_l + \gamma_T \gamma_C a_k^+ a_{\bar{l}}) \langle k | \hat{G} | l \rangle_G;$$

$$\hat{G}[r = -1] = \sum_{kl} (a_k^+ a_{\bar{l}} - \gamma_T \gamma_C a_k^+ a_l) \langle k | \hat{G} | \bar{l} \rangle_G. \quad (\text{ПЗ. A6})$$

Далее определяем эти операторы $\hat{G}[\pm]$ в терминах квази-частичных операторов рождения (α_k^+) и уничтожения (α_k), которые связаны с одночастичными операторами базиса Гудмана с помощью преобразования Боголюбова:

$$\begin{aligned} a_k^+ &= \sum_i (U_{ki} \alpha_i^+ + V_{\bar{k}\bar{i}} \alpha_{\bar{i}}^-), & a_k^+ &= \sum_i (U_{ki} \alpha_i + V_{\bar{k}\bar{i}} \alpha_{\bar{i}}^+), \\ a_{\bar{k}}^+ &= \sum_i (U_{\bar{k}\bar{i}} \alpha_i^+ + V_{\bar{k}i} \alpha_i^-), & a_{\bar{k}} &= \sum_i (U_{\bar{k}\bar{i}} \alpha_{\bar{i}}^- + V_{\bar{k}i} \alpha_i^+). \end{aligned} \quad (\text{ПЗ. A7})$$

В квазичастичном представлении операторы $\hat{G}[\pm]$ имеют следующую форму

$$\begin{aligned} \hat{G}[+] &= \langle HFB | \hat{G}[+] | HFB \rangle + \hat{G}^{(1)}[+] + \hat{G}^{(2)}[+], \\ \hat{G}[-] &= G^{(1)}[-] + \hat{G}^{(2)}[-], \end{aligned} \quad (\text{ПЗ. A8})$$

где

$$\begin{aligned} &\langle HFB | \hat{G}[+] | HFB \rangle = \\ &= \sum_{kl} \langle k | \hat{G}[+] | l \rangle_G \sum_i (V_{\bar{k}\bar{i}} V_{\bar{l}\bar{i}} + \gamma_T \gamma_C V_{\bar{k}i} V_{\bar{l}i}); \\ \hat{G}^{(1)}[+] &= \sum_{ij} \left(\sum_{kl} (U_{ki} V_{l\bar{j}} - \gamma_T \gamma_H V_{\bar{k}i} U_{l\bar{j}}) \langle k | \hat{G}[+] | l \rangle_G \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\alpha_i^+ \alpha_j^+ + \gamma_H \gamma_C \alpha_{\bar{j}} \alpha_i \right); \\
& \hat{G}^{(2)}[+] = \\
& = \sum_{ij} \left(\sum_{kl} (U_{ki} U_{lj} - \gamma_T \gamma_H V_{\bar{k}i} V_{\bar{l}j}) \langle k | \hat{G}[+] | l \rangle_G \right) \alpha_i^+ \alpha_{j+} \\
& + \gamma_T \gamma_C \sum_{ij} \left(\sum_{kl} (U_{\bar{k}i} U_{\bar{l}j} - \gamma_T \gamma_H V_{\bar{k}i} V_{\bar{l}j}) \langle k | \hat{G}[+] | l \rangle_G \right) \alpha_{\bar{i}}^+ \alpha_{\bar{j}}; \\
G^{(1)}[-] & = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\sum_{kl} (U_{ki} V_{\bar{l}j} + \gamma_T \gamma_H V_{\bar{k}i} U_{lj}) \langle k | \hat{G}[+] | \bar{l} \rangle_G \right) \times \\
& \quad \times \left(\alpha_i^+ \alpha_j^+ + \gamma_C \gamma_H \alpha_j^+ \alpha_i^+ \right) + \\
& + \frac{-(\gamma_T \gamma_C)}{2} \sum_{ij} \left(\sum_{kl} (U_{\bar{k}i} V_{\bar{l}j} + \gamma_T \gamma_H V_{\bar{k}i} U_{\bar{l}j}) \langle k | \hat{G}[+] | \bar{l} \rangle_G \right) \times \\
& \quad \times \left(\alpha_{\bar{i}}^+ \alpha_{\bar{j}}^+ + \gamma_C \gamma_H \alpha_{\bar{j}}^+ \alpha_{\bar{i}}^+ \right); \\
G^{(2)}[-] & = \\
& \sum_{ij} \left(\sum_{kl} (U_{ki} U_{\bar{l}j} - \gamma_T \gamma_H V_{\bar{k}i} V_{\bar{l}j}) \langle k | \hat{G}[+] | \bar{l} \rangle_G \right) \alpha_i^+ \alpha_{\bar{j}-} \\
& - \gamma_T \gamma_C \sum_{ij} \left(\sum_{kl} (U_{\bar{k}i} U_{lj} - \gamma_T \gamma_H V_{\bar{k}i} V_{\bar{l}j}) \langle k | \hat{G}[+] | \bar{l} \rangle_G \right) \alpha_{\bar{i}}^+ \alpha_j.
\end{aligned}$$

(ПЗ. А9)

В следующем фазовом соглашении $\hat{T} = \hat{R}_2^{-1} \hat{K}$ для координаты, импульса, момента импульса и спинового оператора имеем соотношения:

$$\hat{T}^{-1} \hat{r} \hat{T} = \hat{r}, \quad \hat{T}^{-1} \hat{p} \hat{T} = -\hat{p}, \quad \hat{T}^{-1} \hat{l} \hat{T} = -\hat{l}, \quad \hat{T}^{-1} \hat{s} \hat{T} = -\hat{s},$$

\Rightarrow

$$\langle k | \hat{x} | l \rangle^* = - \langle k | \hat{x} | l \rangle, \quad \langle k | \hat{y} | l \rangle^* = \langle k | \hat{y} | l \rangle,$$

$$\begin{aligned}
& \langle k|\hat{z}|l \rangle^* = - \langle k|\hat{z}|l \rangle; \\
& \langle k|\hat{p}_x|l \rangle^* = \langle k|\hat{p}_x|l \rangle, \quad \langle k|\hat{p}_y|l \rangle^* = - \langle k|\hat{p}_y|l \rangle, \\
& \quad \langle k|\hat{p}_z|l \rangle^* = \langle k|\hat{p}_z|l \rangle; \\
& \langle k|\hat{l}_x|l \rangle^* = \langle k|\hat{l}_x|l \rangle, \quad \langle k|\hat{l}_y|l \rangle^* = - \langle k|\hat{l}_y|l \rangle, \\
& \quad \langle k|\hat{l}_z|l \rangle^* = \langle k|\hat{l}_z|l \rangle; \\
& \langle k|\hat{\sigma}_x|l \rangle^* = \langle k|\hat{\sigma}_x|l \rangle, \quad \langle k|\hat{\sigma}_y|l \rangle^* = - \langle k|\hat{\sigma}_y|l \rangle, \\
& \quad \langle k|\hat{\sigma}_z|l \rangle^* = \langle k|\hat{\sigma}_z|l \rangle. \tag{ПЗ. А10}
\end{aligned}$$

Мультипольные и спин-мультипольные операторы определим следующим образом:

$$\begin{aligned}
\hat{M}_{\lambda\mu} &= \sum_{q_1\sigma_1 q_2\sigma_2} \langle q_1\sigma_1 | f(r) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) | q_2\sigma_2 \rangle a_{q_1\sigma_1}^+ a_{q_2\sigma_2}; \\
\hat{S}_{l\lambda\mu} &= \sum_{q_1\sigma_1 q_2\sigma_2} \langle q_1\sigma_1 | f(r) [\sigma \otimes Y_l(\hat{r})]_{\lambda\mu} | q_2\sigma_2 \rangle a_{q_1\sigma_1}^+ a_{q_2\sigma_2}, \tag{ПЗ. А11}
\end{aligned}$$

где $a_{q^+} \equiv a_q$ и $a_{q^-} \equiv a_{\bar{q}}$ и $f(r)$ – радиальная часть мультипольных взаимодействий, которая в общем различна для различных слагаемых. Эти мультипольные и спин-мультипольные операторы определим в терминах декартовых координат (см. [32]). Тогда получим для них следующие соотношения симметрии:

$$\begin{aligned}
\hat{M}_{\lambda\mu}^+ &= (-1)^\mu \hat{M}_{\lambda-\mu}, \quad \hat{T}^{-1} \hat{M}_{\lambda\mu} \hat{T} = (-1)^\mu \hat{M}_{\lambda-\mu}, \\
\hat{R}_1^{-1} \hat{M}_{\lambda\mu} \hat{R}_1 &= (-1)^\lambda \hat{M}_{\lambda-\mu}; \\
\hat{R}_2^{-1} \hat{M}_{\lambda\mu} \hat{R}_2 &= (-1)^{\lambda+\mu} \hat{M}_{\lambda-\mu}, \quad \hat{R}_3^{-1} \hat{M}_{\lambda\mu} \hat{R}_3 = (-1)^\mu \hat{M}_{\lambda\mu}; \\
\langle k | \hat{M}_{\lambda\mu} | l \rangle^* &= (-1)^\lambda \langle k | \hat{M}_{\lambda\mu} | l \rangle; \\
\hat{S}_{l\lambda\mu}^+ &= (-1)^{\lambda+l+\mu+1} \hat{S}_{l\lambda-\mu}, \quad \hat{T}^{-1} \hat{S}_{l\lambda\mu} \hat{T} = (-1)^{l+\lambda+\mu} \hat{M}_{l\lambda-\mu}, \\
\hat{R}_1^{-1} \hat{S}_{l\lambda\mu} \hat{R}_1 &= (-1)^\lambda \hat{M}_{l\lambda-\mu}; \\
\hat{R}_2^{-1} \hat{S}_{l\lambda\mu} \hat{R}_2 &= (-1)^{\lambda+\mu} \hat{S}_{l\lambda-\mu}, \quad \hat{R}_3^{-1} \hat{S}_{l\lambda\mu} \hat{R}_3 = (-1)^\mu \hat{S}_{l\lambda\mu},
\end{aligned}$$

$$\langle k|\hat{S}_{l\lambda\mu}|l\rangle^* = (-1)^l \langle k|\hat{S}_{l\lambda\mu}|l\rangle. \quad (\text{ПЗ. A12})$$

В дальнейшем будем предполагать, что сигнатура r является хорошим квантовым числом и введем следующие симметризованные операторы

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\lambda\mu}[r] &= \frac{i^{\lambda+\mu+\frac{r+3}{2}}}{\sqrt{2(1+\delta_{\mu 0})}} \left(\hat{M}_{\lambda\mu} + (-1)^{\lambda+\mu+\frac{r+3}{2}} \hat{M}_{\lambda-\mu} \right); \\ \hat{S}_{l\lambda\mu}[r] &= \frac{i^{l+\mu+\frac{r+3}{2}+1}}{\sqrt{2(1+\delta_{\mu 0})}} \left(\hat{S}_{l\lambda\mu} + (-1)^{\lambda+\mu+\frac{r+3}{2}} \hat{S}_{l\lambda-\mu} \right). \end{aligned} \quad (\text{ПЗ. A13})$$

Эти симметризованные операторы удовлетворяют следующим соотношениям симметрии:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\lambda\mu}^+[r] &= \hat{M}_{\lambda\mu}[r], \quad \hat{T}^{-1}\hat{M}_{\lambda\mu}[r]\hat{T} = \hat{M}_{\lambda\mu}[r], \\ \hat{R}_1^{-1}\hat{M}_{\lambda\mu}[r]\hat{R}_1 &= r\hat{M}_{\lambda\mu}[r]; \\ \langle k|\hat{M}_{\lambda\mu}[r]|l\rangle^* &= (-1)^{\mu+\frac{r+3}{2}} \langle k|\hat{M}_{\lambda\mu}[r]|l\rangle; \\ \hat{S}_{l\lambda\mu}^+{}^\tau &= \hat{S}_{l\lambda\mu}[r], \quad \hat{T}^{-1}\hat{S}_{l\lambda\mu}[r]\hat{T} = -\hat{S}_{l\lambda\mu}[r], \\ \hat{R}_1^{-1}\hat{S}_{l\lambda\mu}^-[r]\hat{R}_1 &= r\hat{S}_{l\lambda\mu}[r]; \\ \langle k|\hat{S}_{l\lambda\mu}[r]|l\rangle^* &= (-1)^{\mu+1+\frac{r+3}{2}} \langle k|\hat{S}_{l\lambda\mu}[r]|l\rangle, \end{aligned} \quad (\text{ПЗ. A14})$$

а также

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \hat{M}_{\lambda\mu}^+ \hat{M}_{\lambda\mu} &= \sum_{\mu=0}^{\lambda} \sum_{r=\pm} (\hat{M}_{\lambda\mu}[r])^2, \\ \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \hat{S}_{l\lambda\mu}^+ \hat{S}_{l\lambda\mu} &= \sum_{\mu=0}^{\lambda} \sum_{r=\pm} (\hat{S}_{l\lambda\mu}[r])^2. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ. A15})$$

С целью удовлетворения этим соотношениям симметрии, выберем одночастичный осцилляторный базис в форме

$$|Nl j m\rangle = i^l \sum_{\Lambda\Sigma} \left(l\Lambda \frac{1}{2}\Sigma |j m\rangle \right) |Nl\Lambda\Sigma\rangle. \quad (\text{ПЗ. A16})$$

Для данного базиса справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
 \overline{|Nljm\rangle} &= (-1)^{j+m} |Nlj - m\rangle, \\
 \hat{R}_2 |Nljm\rangle &= (-1)^{j+m} |Nljm\rangle, \\
 \hat{R}_3 |Nljm\rangle &= (-1)^m |Nljm\rangle, \\
 \hat{R}_1 |Nljm\rangle &= (-1)^{m-\frac{1}{2}} i \overline{|Nljm\rangle}.
 \end{aligned} \tag{ПЗ. А17}$$

С точки зрения инвариантности среднего поля относительно R -симметрии, удобно перейти к базису Гудмана с помощью преобразования ($m > 0$)

$$\begin{aligned}
 |Nljm\rangle_G &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|Nljm\rangle + i \hat{R}_1 |Nljm\rangle \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|Nljm\rangle + (-1)^{m+\frac{1}{2}} \overline{|Nljm\rangle} \right); \\
 \overline{|Nljm\rangle}_G &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{|Nljm\rangle} - (-1)^{m+\frac{1}{2}} |Nljm\rangle \right).
 \end{aligned} \tag{ПЗ. А18}$$

Одночастичные матричные элементы, выраженные в базисе Гудмана

$|Nljm\rangle_G$ и стандартном базисе $|Nljm\rangle$ связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned}
 {}_G \langle N'l'j'm' | \hat{G}[+] |Nljm\rangle_G &= \\
 &= \langle N'l'j'm' | \hat{G}[+] |Nljm\rangle \\
 -(-1)^{m-\frac{1}{2}} \langle N'l'j'm' | \hat{G}[+] | \overline{|Nljm\rangle} \rangle;
 \end{aligned} \tag{ПЗ. А19}$$

$$\begin{aligned}
 {}_G \langle N'l'j'm' | \hat{G}[+] | \overline{|Nljm\rangle}_G &= \\
 &= \langle N'l'j'm' | \hat{G}[+] | \overline{|Nljm\rangle} \rangle \\
 -(-1)^{m+\frac{1}{2}} \langle N'l'j'm' | \hat{G}[+] |Nljm\rangle;
 \end{aligned} \tag{ПЗ. А20}$$

$${}_G \langle N'l'j'm' | \hat{G}[-] |Nljm\rangle_G = {}_G \langle N'l'j'm' | \hat{G}[+] | \overline{|Nljm\rangle}_G = 0. \tag{ПЗ. А21}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ ПЗ.В МУЛЬТИПОЛЬ-МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

В данном приложении кратко рассмотрим основные идеи мультиполь-мультипольного разложения в применении его для случая остаточных взаимодействий в атомных ядрах.

Представим двухчастичный потенциал $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ в виде разложения:

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} V_{\lambda}(r_1, r_2) \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} Y_{\lambda\mu}^*(\hat{r}_1) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}_2), \quad (\text{ПЗ. В1})$$

где

$$V_{\lambda}(r_1, r_2) = 2\pi \int_{-1}^1 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) P_{\lambda}(\cos \vartheta_{12}) d \cos \vartheta_{12}. \quad (\text{ПЗ. В2})$$

Более того, вследствие симметричности координат \vec{r}_1 и \vec{r}_2 , выражение (ПЗ В.1) можно модифицировать следующим образом

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} f_{\lambda}(r_1) f_{\lambda}(r_2) \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} Y_{\lambda\mu}^*(\hat{r}_1) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}_2). \quad (\text{ПЗ. В3})$$

Теперь запишем остаточные взаимодействия в более общей форме:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{int} = & -\frac{1}{2} V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) (k_{\lambda}[0] + k_{\lambda}[1]) \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 - \\ & -\frac{1}{2} V_{\sigma}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) (k_{l\lambda}[0] + k_{l\lambda}[1]) \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2, \end{aligned} \quad (\text{ПЗ. В4})$$

здесь $k_{\lambda}[0]$, $k_{\lambda}[1]$, $k_{l\lambda}[0]$ и $k_{l\lambda}[1]$ - константы мультипольных взаимодействий (индексы [0], [1] указывают на значения изоспинов), \mathcal{T}_1 (соответственно $\vec{\sigma}_1$) - изоспиновые (соответственно спиновые) операторы в пространстве первой, а \mathcal{T}_2 (соответственно $\vec{\sigma}_2$) - в пространстве второй частиц. Функции $V(|\vec{r}_1 -$

$\vec{r}_2|)$ и $V_\sigma(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ будем раскладывать, используя соотношение (ПЗ B3):

$$\begin{aligned} \hat{V}_{int} = & -\frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k_\lambda[0] + k_\lambda[1] \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2) \times \\ & \times \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} (f_\lambda(r_1) Y_{\lambda\mu}(r_1))^* (f_\lambda(r_2) Y_{\lambda\mu}(r_2)) - \\ & -\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\lambda=l, l\pm 1} (k_\lambda[0] + k_\lambda[1] \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2) \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \left(f_l(r_1) [\sigma^{(1)} \otimes Y_l]_{\lambda\mu} \right)^* \times \\ & \times \left(f_l(r_2) [\sigma^{(2)} \otimes Y_l]_{\lambda\mu} \right). \end{aligned} \quad (\text{ПЗ. B5})$$

Далее, представим произведение $\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2$ в виде

$$\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_z^{(1)} \mathcal{T}_z^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\mathcal{T}_+^{(1)} \mathcal{T}_-^{(2)} \right), \quad (\text{ПЗ B.6})$$

где $\mathcal{T}_\pm \equiv \mathcal{T}_x \pm i\mathcal{T}_y$. После некоторых выкладок, пренебрегая вкладом членов $\mathcal{T}_+^{(1)} \mathcal{T}_-^{(2)} + \mathcal{T}_-^{(1)} \mathcal{T}_+^{(2)}$, перепишем выражение (ПЗ.B5) в следующей форме:

$$\begin{aligned} V_{int} = & -\frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} k_\lambda[0] \{ \hat{M}_{\lambda\mu}^+[p] \hat{M}_{\lambda\mu}[p] + \hat{M}_{\lambda\mu}^+[p] \hat{M}_{\lambda\mu}[n] + \\ & + \hat{M}_{\lambda\mu}^+[n] \hat{M}_{\lambda\mu}[p] + \hat{M}_{\lambda\mu}^+[n] \hat{M}_{\lambda\mu}[n] \} - \\ & -\frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} k_\lambda[1] \{ \hat{M}_{\lambda\mu}^+[p] \hat{M}_{\lambda\mu}[p] - \hat{M}_{\lambda\mu}^+[p] \hat{M}_{\lambda\mu}[n] - \\ & - \hat{M}_{\lambda\mu}^+[n] \hat{M}_{\lambda\mu}[p] + \hat{M}_{\lambda\mu}^+[n] \hat{M}_{\lambda\mu}[n] \} - \\ & -\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \sum_{\lambda=l, l\pm 1} k_{l\lambda}[0] \{ \hat{S}_{l\lambda\mu}^+[p] \hat{S}_{l\lambda\mu}[p] + \hat{S}_{l\lambda\mu}^+[p] \hat{S}_{l\lambda\mu}[n] + \\ & + \hat{S}_{l\lambda\mu}^+[n] \hat{S}_{l\lambda\mu}[p] + \hat{S}_{l\lambda\mu}^+[n] \hat{S}_{l\lambda\mu}[n] \} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \sum_{\lambda=l, l\pm 1} k_{l\lambda}[1] \{ \hat{S}_{l\lambda\mu}^+[p] \hat{S}_{l\lambda\mu}[p] - \hat{S}_{l\lambda\mu}^+[p] \hat{S}_{l\lambda\mu}[n] - \\
 & \quad - \hat{S}_{l\lambda\mu}^+[n] \hat{S}_{l\lambda\mu}[p] + \hat{S}_{l\lambda\mu}^+[n] \hat{S}_{l\lambda\mu}[n] \}, \quad (\text{Пз. B7})
 \end{aligned}$$

где мультипольные и спин-мультипольные операторы записаны в терминах вторичного квантования:

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_{\lambda\mu}[p] &= \sum_{q_1\sigma_1, q_2\sigma_2} \langle q_1\sigma_1 | f_{\lambda}(r) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) | q_2\sigma_2 \rangle a_{q_1\sigma_1}^+ a_{q_2\sigma_2}; \\
 M_{\lambda\mu}[n] &= \sum_{q_1\sigma_1, q_2\sigma_2} \langle q_1\sigma_1 | f_{\lambda}(r) Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) | q_2\sigma_2 \rangle a_{q_1\sigma_1}^+ a_{q_2\sigma_2}; \\
 S_{l\lambda\mu}[p] &= \sum_{q_1\sigma_1, q_2\sigma_2} \langle q_1\sigma_1 | f_l(r) [\sigma \otimes Y_l(\hat{r})]_{\lambda\mu} | q_2\sigma_2 \rangle a_{q_1\sigma_1}^+ a_{q_2\sigma_2}; \\
 S_{l\lambda\mu}[n] &= \sum_{q_1\sigma_1, q_2\sigma_2} \langle q_1\sigma_1 | f_l(r) [\sigma \otimes Y_l(\hat{r})]_{\lambda\mu} | q_2\sigma_2 \rangle a_{q_1\sigma_1}^+ a_{q_2\sigma_2}.
 \end{aligned} \quad (\text{Пз B.8})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ ПЗ.С МОМЕНТ ИНЕРЦИИ И ВЫСТРАИВАНИЕ В РАМКАХ МПВ

Начнем с рассмотрения невозмущенных систем в деформированном потенциале, которые заполняют уровень Ферми. Уровни, лежащие ниже поверхности Ферми соответствуют дыркам, а вышележащие – частицам. Обозначим волновую функцию, основанную на gr -состоянии через $|\Phi_0\rangle$, а на состоянии частица-дырка (ph) – через $|mi\rangle = a_m^+ a_i\rangle$ (где индекс m соответствует частичным состояниям, i – дырочным). Оператор возмущения $\omega \hat{I}_x$ является одночастичным оператором и поэтому может возбудить одновременно лишь одну ph -пару. Тогда волновую функцию в первом порядке можно записать в виде

$$\Phi = |\Phi_0\rangle + \omega \sum_{im} \frac{\langle mi | \hat{I}_x | \Phi_0 \rangle}{\epsilon_m - \epsilon_i} a_m^+ a_i |\Phi_0\rangle, \quad (\text{ПЗ. С1})$$

где ϵ_i и ϵ_m одночастичные энергии гамильтониана \hat{H} . Для спина можно записать следующее выражение

$$I = \langle \Phi | \hat{I}_x | \Phi \rangle = 2\omega \sum_{mi} \frac{|\langle mi | \hat{I}_x | \Phi_0 \rangle|^2}{\epsilon_m - \epsilon_i}. \quad (\text{ПЗ. С2})$$

откуда следует вместе с (3.1.13) выражение для момента инерции:

$$\mathfrak{S}_{Inglis} = 2 \sum_{mi} \frac{|\langle m | \hat{I}_x | i \rangle|^2}{\epsilon_m - \epsilon_i}, \quad (\text{ПЗ. С3})$$

которое известно в литературе как формула Инглиса для момента инерции [103]. Вычисленная по данной формуле величина момента инерции очень близка к моменту инерции жесткого ротатора.

Однако впоследствии было выяснено, что остается некоторое систематическое расхождение между экспериментальным моментом инерции четно-четного ядра и его расчетным значением. Для устранения этой неясности Бор и Моттelson [22] указали на возможную роль двухчастичных остаточных взаимодействий. Наиболее важное влияние на природу этих сил имеют парные корреляции сверхпроводящего типа, математическую основу которой составляет теория Бардина-Купера-Шриффера. С учетом таких парных корреляций Беляевым в [104] была усовершенствована формула Инглиса.

В этом случае волновая функция состоит из компонент функций gr -состояния и возбуждений двух $(\alpha_k^+ \alpha_{k'}^+ |\Phi\rangle)$, четырех и т.д. квазичастичных состояний. Аналогично (ПЗ. С1) можно получить возмущенную волновую функцию в виде

$$|\Phi\rangle = |\Phi_{BCS}\rangle + \omega \sum_{k,k'} \frac{\langle \Phi_{BCS} | \alpha_{k'} \alpha_k \hat{I}_1 | \Phi_{BCS} \rangle}{E_k + E_{k'}} \alpha_k^+ \alpha_{k'}^+ |\Phi_{BCS}\rangle, \quad (\text{ПЗ. С4})$$

где $E_k + E_{k'}$ энергии возбуждения квазичастичных пар k, k' , которые следуют из уравнения

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2}. \quad (\text{ПЗ С.5})$$

Поступая аналогично как и в случае формул (ПЗ. С2) и (ПЗ. С3), приходим к формуле для нахождения момента инерции

$$\mathfrak{S}_{Bel} = 2 \sum_{k < k'} \frac{|j_{x_{kk'}}^{20}|^2}{E_k + E_{k'}} \quad (\text{ПЗ. С6}).$$

Воспользовавшись известными выражениями для операторов в квазичастичном пространстве (см. например, [2]), находим j_x^{20} и получаем следующую формулу

$$\mathfrak{S}_{Bel} = 2 \sum_{k,k' > 0} \frac{|\langle k | j_x | k' \rangle|^2}{E_k + E_{k'}} (u_k v_{k'} - u_{k'} v_k)^2. \quad (\text{ПЗ. С7})$$

Эта формула для момента инерции находится в хорошем соответствии с экспериментом, по сравнению с (ПЗ.СЗ), что достигается за счет двух факторов:

- 1) энергии в знаменателе имеют намного большие значения чем одночастичные энергии частиц и дырок. Параметр Δ имеет щель по крайней мере $2\Delta \simeq 2$ МэВ для уровней в окрестности поверхности Ферми;
- 2) фактор $(u_k v_{k'} - u_{k'} v_k)^2$ обычно несколько меньше единицы.

Уменьшение момента инерции в теории БКШ по сравнению с твердотельным значением соответствует тому, что некоторое число нуклонов переходит из нормального в сверхтекучее состояние [2,104].

Для классификации вращающихся конфигураций оказывается удобным представление чисел заполнения, формализм которого несколько отличается от обычно используемого для классификации фермионных уровней. Каждому уровню с энергией E' на диаграмме зависимости квазичастичных энергий во вращающейся системе от ротационной частоты ω , соответствует сопряженный уровень $-E'$ так, что нижняя часть диаграмм получается отражением верхней относительно линии $E' = 0$. Если уровень E' занят, то сопряженный уровень с $-E'$ свободен, так что во всех конфигурациях половина уровней занята и половина свободна. При малых значениях ω в четно-четных ядрах основной конфигурации нуклонов (основной ротационной полосе) соответствует диаграмма со всеми свободными уровнями, имеющими положительную энергию. Возбужденные конфигурации четно-четного ядра получаются при заполнении одной или нескольких пар уровней с $E' > 0$ квазичастицами и освобождении сопряженных уровней с $E' < 0$. Энергия возбуждения относительно вакуума квазичастиц равна сумме энергий E' , занятых квазичастицами уровней с положительной энергией. Аналогично вычисляют значения других аддитивных величин (таких как угловой

момент I , число частиц N и т.п.): они равны полусумме вкладов от всех занятых уровней, включая уровни с положительной и отрицательной энергией.

Когда ω увеличивается настолько, что уровни с положительной и отрицательной энергией пересекаются, определение вакуума меняется: ему соответствует конфигурация, описывающая четную систему, с минимальной суммарной энергией занятых состояний. Важное свойство диаграмм следует из общего соотношения для собственных значений

$$\frac{dE'}{d\omega} = \left\langle \frac{\partial H'}{\partial \omega} \right\rangle. \quad (\text{Пз. } C8)$$

Правая часть этого уравнения равна взятой с обратным знаком величине $j_0 = \langle \hat{I}_1 \rangle$. Таким образом, наклон кривых равен выстроенному угловому моменту, т.е. компоненте углового момента вдоль оси x :

$$j_x = -\frac{dE'}{d\omega}. \quad (\text{Пз. } C9)$$

Принимая буквально постулаты модели независимых квазичастиц, можно было бы считать, что сумма выстроенных моментов всех занятых состояний равна полному угловому моменту состояния ядра. Такое допущение было бы справедливым, если модель была бы достаточно точной для описания инерционных характеристик системы в целом. Имея в виду возможные неточности в описании остова ядра, обычно в теорию вводят феноменологические параметры, описывающие момент инерции остова. Бенгтссон и др. [39] предлагают определить остов для четно-четного ядра в соответствии с методом переменного момента инерции [58], вводя эффективный момент инерции:

$$\mathfrak{I}(\omega) = I_x(\omega)/\omega = J_0 + \omega^2 J_1.$$

Используя линейную по ω^2 интерполяцию для момента инерции четно-четного ядра в области малых значений Ω , можно

фиксировать параметры J_0 и J_1 для четно-четных соседей.

Для энергии остова при этом получаем выражение

$$E'(\omega) = -\omega^2 J_0/2 - \omega^4 J_1/4 + (1/8)\hbar^2/J_0. \quad (\text{ПЗ. C10})$$

Энергию возбуждения внутреннего движения в ядре, определенную во вращающейся системе координат, можно записать в виде относительной величины

$$e'(\omega) \equiv E'(\omega) - E'(\omega), \quad (\text{ПЗ. C11})$$

где

$$E'(\omega) = [E(I + 1) + E(I - 1)] / 2 - \omega I_x - \quad (\text{ПЗ. C12})$$

энергия во вращающейся системе (раусиан). Экспериментальные значения угловой частоты вращения вычисляют по формуле

$$\omega(I) = \frac{E(I + 1) - E(I - 1)}{I_x(I + 1) - I_x(I - 1)}, \quad (\text{ПЗ. C13})$$

в которой $E(I + 1)$ и $E(I - 1)$ – энергии смежных уровней полосы с одинаковым значением сигнатуры; $\hat{I}_x(I)$ – проекция углового момента на ось ox :

$$\hat{I}_x(I) = \sqrt{\left(I + \frac{1}{2}\right)^2 - K^2}. \quad (\text{ПЗ. C14})$$

Бор и Моттelson [22] предложили интерпретировать разность

$$j(\omega) = \hat{I}_x(\omega) - \hat{I}(\omega) \quad (\text{ПЗ. C15})$$

как выстроенный угловой момент внутренних степеней свободы ядра.

Глава 4

МИКРОСКОПИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ВЫСОКОСПИНОВЫХ ЭКЗОТИЧЕСКИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

§4.1 Неаксиальные октупольные корреляции в быстровращающихся ядрах с $A \sim 160$

В главе 2 были исследованы вращательные свойства ядер, обладающих сильными октупольными корреляциями и которые характеризовались с определенной оболочечной структурой (преимущественно актинидная с $Z \approx 88$, $N \approx 134$ и $Ba - Sm$ области с $Z \approx 56$, $N \approx 88$), благодаря которой при определенных условиях, ядра могут обладать статической октупольной аксиально-симметричной деформацией. Было показано, что октупольная нестабильность возникает благодаря корреляциям между подоболочками с $\Delta j = 3$ и $\Delta l = 3$ и энергии таких состояний имеют коллективную природу в актинидной области и квазичастичную - в случае ядер с $A \sim 160$. В зависимости от частоты вращения, энергии таких октупольных возбуждений опускаются до уровней основной ротационной полосы, образуя вместе ротационную полосу с чередующейся четностью и последовательностью спинов.

В то же время недавние вычисления показали, что при высоких спинах в некоторых ядрах возникают также и неаксиальные октупольные деформации. Например, в работах [124-

128] было предсказано появление неаксиальной октупольной деформации для легких ядер (в рамках кренкинг(МПВ)+ХФБ вычислений с помощью взаимодействий Скирма и Гогни [124]). Такие экзотические формы ядер наблюдались также и в супердеформированной области, в частности, в области ядер $Hg - Pb$ [129-133].

Теоретическое и экспериментальное изучение неаксиальных коллективных вибраций позволяет понять многие особенности ядерной динамики. Например, мягкость квадрупольной вибрационной моды может привести к фазовому переходу формы ядра с аксиальной деформацией к неаксиальной (см. например, [134-138]). Для исследований данного круга вопросов, оболочечная кренкинг модель с использованием ПХФ, может проливать свет на многие свойства неустойчивости формы ядра по отношению к вибрационным возбуждениям (например, для случая октупольных корреляций см. [139,140]). В этой главе будем рассматривать круг вопросов связанных сильными октупольными корреляциями, которые возникают при больших частотах вращения ядра ω . Мы будем использовать метод, основанный на самосогласованных решениях кренкинг модели с потенциалом Нильссона и сепарабельными остаточными взаимодействиями, который был развит нами в [141] (см. также [142]).

§4.1.1 Модель

Будем исходить из гамильтониана

$$\hat{H}_\omega = \hat{H}_0(\omega) + V_{PP} + V_{FF}. \quad (4.1.1)$$

где $\hat{H}_0(\omega)$ – гамильтониан МПВ с потенциалом Нильссона, V_{PP} - протон-протонное и нейтрон-нейтронное монопольное спаривание (корреляции ближнего порядка), V_{FF} учитывает изоскалярные и изовекторные сепарабельные взаимодействия (корреляции дальнего порядка).

Кренкинг-член имеет следующую структуру

$$\hat{H}_0(\omega) = \hat{H}_0 - \sum_{\tau=n,p} \lambda_\tau \hat{\mathcal{N}}_\tau - \hbar\omega \hat{I}_1, \quad (4.1.2)$$

где \hat{H}_0 состоит из двух частей: первая представляет собой модифицированный гамильтониан трехосного гармонического осциллятора, частоты которого удовлетворяют условию сохранения объема

$$\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 = \Omega_0^3, \quad (4.1.3)$$

а вторая часть содержит слагаемые вида $l-s$, $l-l$ и член, восстанавливающий локальную галилеевскую инвариантность (см. §3.2.2). При $\omega = 0$, равновесная деформация может быть определена путем минимизации среднего значения одночастичного гамильтониана \hat{H}_0 . Двухчастичный сепарабельный потенциал имеет структуру

$$V = \sum_{\lambda\mu} \kappa_\lambda F_{\lambda\mu}''^2, \quad (4.1.4)$$

и включает квадруполь-квадрупольное, монопольное и спин-спиновые взаимодействия для состояний положительной четности и диполь-дипольные, октуполь-октупольные взаимодействия для полос отрицательной четности. Поля $F_{\lambda\mu}''$ имеют хорошие квантовые числа – изоспин \mathcal{T} и сигнатуру $r = \pm 1$ [143] и определены в «дважды масштабированных» координатах $x_i'' = (\Omega_i/\Omega_0) x_i$ (§3.2.2), которые в случае гармонического одночастичного гамильтониана обеспечивают условия самосогласования (что эквивалентно условию равновесия Хартри для того же случая гармонического осциллятора)

$$\langle Q_\mu'' \rangle = 0, \quad \mu = 0, 1, 2 \quad (4.1.5)$$

при квадрупольной равновесной деформации. Преимуществом условия (4.1.5) является то, что равновесная деформация взаимодействиями не нарушается, что позволяет разделять ложные и физические решения уравнений ПХФ.

Перепишав гамильтониан (4.1.1) в терминах квазичастичных операторов рождения и уничтожения, составим уравнения движения (см. например, [118,143])

$$\begin{aligned} [\hat{H}_\omega, \hat{\mathcal{P}}_\nu] &= i \hbar \Omega_\nu^2 \hat{X}_\nu, & [\hat{H}_\omega, \hat{X}_\nu] &= -i \hbar \hat{\mathcal{P}}_\nu, \\ [\hat{X}_\nu, \hat{\mathcal{P}}_{\nu'}] &= i \hbar \delta_{\nu\nu'}, \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

где $\hat{X}_\nu, \hat{\mathcal{P}}_\nu$ – соответственно коллективные координаты и сопряженные им обобщенные импульсы, которые являются линейными комбинациями двухквазичастичных операторов рождения и уничтожения. С помощью $(\hat{X}_\nu, \hat{\mathcal{P}}_\nu)$ фоновые операторы представляются в виде соотношения [119,144], (см. также гл. 3):

$$\hat{Q}_\nu^+ \equiv \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\Omega_\nu}{\hbar}} \hat{X}_\nu - \frac{i}{\sqrt{\hbar \Omega_\nu}} \hat{\mathcal{P}}_\nu \right] = \sum_\mu (\psi_\mu^\nu b_\mu^+ - \varphi_\mu^\nu b_\mu),$$

где $\mu = (ij)$ или $(ij, \bar{i}\bar{j})$ и $b_{ij}^+ = \alpha_i^+ \alpha_j^-$, $b_{ij}^- = \alpha_i^- \alpha_j^+$ or $b_{\bar{i}\bar{j}}^+ = \alpha_{\bar{i}}^+ \alpha_{\bar{j}}^-$ двухквазичастичные квазибозонные операторы.

Используя соотношения симметрии (учитывающие только бозонные коммутационные соотношения), гамильтониан МПВ можно переписать в рамках ПХФ и разрешить уравнения (4.1.6) по отдельности для для положительной и отрицательной сигнатур [143, 145] $\hat{H}_\omega(\pi=\pm)$,

$$\begin{aligned} \left[\hat{H}_\omega(\pi=+), \mathcal{N}_\tau \right] &= 0, & \left[\hat{H}_\omega(\pi=-), \hat{\mathcal{P}}_1 \right] &= 0, \\ \left[\hat{H}_\omega(\pi=+), I_1 \right] &= 0, & \left[\hat{H}_\omega(\pi=-), \Gamma^\dagger \right] &= \omega \Gamma^\dagger, \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

где $\tau = p, n$ и

$$\begin{aligned} \Gamma^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\langle I_1 \rangle}} (I_2 + iI_3) \\ \Gamma = (\Gamma^\dagger)^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\langle I_1 \rangle}} (I_2 - iI_3) \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\Gamma, \Gamma^\dagger] = 1. \quad (4.1.9)$$

Согласно уравнениям (4.1.7), имеем четыре моды Голдстоуновского типа [118], две из которых связаны с несохранением числа частиц (протонов и нейтронов), а две другие - с нарушением трансляционной и сферической симметрий. Последнее уравнение связано с решениями отрицательной сигнатуры с энергиями $\hbar\Omega_\lambda = \hbar\omega$, которые описывают коллективное вращение, возникающее из-за нарушения симметрии кренкинг-членом.

После нахождения решений ПХФ, МПВ-гамильтониан можно переписать в терминах обобщенных коллективных координат $(\hat{X}_\nu, \hat{\mathcal{P}}_\nu)$:

$$\begin{aligned} \hat{H}_\omega &= \frac{1}{2} \sum_\nu \left(\hat{\mathcal{P}}_\nu^2 + \Omega_\nu^2 \hat{X}_\nu^2 \right) = \\ &= \sum_{\nu(\Omega_\nu \neq 0)} \hbar\Omega_\nu \left(\hat{Q}_\nu^+ \hat{Q}_\nu + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} g_{I_1} \hat{I}_1^{(1)2} + \frac{1}{2} \sum_\tau g_{\mathcal{N}_\tau} \left(\hat{\mathcal{N}}_\tau^{(1)} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{\mathcal{P}_1} \left(\hat{\mathcal{P}}_1^{(1)} \right)^2 + \hbar\Omega \left(\Gamma^+ \Gamma + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

где часть гамильтониана

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu(\Omega_\nu \neq 0)} \left(\hat{P}_\nu^2 + \Omega_\nu^2 \hat{X}_\nu^2 \right),$$

отделена из вращательного и поступательного движений, а также из вращательного движения в изотопическом пространстве. В (4.1.10) величины $\hat{\mathcal{N}}_\tau^{(1)}$, $\hat{I}_1^{(1)}$, $\hat{\mathcal{P}}_1^{(1)}$ представляют собой соответственно операторов числа частиц \mathcal{N}_τ , проекций углового момента I_1 и обобщенного импульса \mathcal{P}_1 на первую ось, величины же $g_{I_1} = \frac{1}{\mathfrak{S}_{RPA}}$, $g_{\mathcal{N}_\tau}$ и $g_{\mathcal{P}_1}$ представляют соответственно момент инерции Таулеса-Валатина (см. по поводу определения и дальнейших ссылок гл.3), изоспиновую и эффективную массу ядра. Более полное определение двух последних параметров можно найти в работе [120].

Как уже было упомянуто в введении, вычисления, проведенные нами в рамках комбинированной самосогласованной модели кренкинг+ПХФ с потенциалом Нильссона, указывают на проявление при высоких частотах вращения сильных октупольных деформаций в *yrast*-состоянии (например, в ядрах ^{162}Yb , $^{164,166}\text{Hf}$). При решении данной задачи ХФБ во вращающейся системе координат мы использовали метод, предложенный в [146]. Согласно данному методу, кренкинг-гамильтониан представляем в форме

$$\hat{H}_{\Omega}^{(Sk)} = \hat{\mathcal{E}} + V + V_{coul} - \hbar\omega I_1, \quad (4.1.11)$$

где $\hat{\mathcal{E}}$ представляет оператор кинетической энергии, V - потенциал Скирма, V_{coul} - кулоновский потенциал. Детальное описание этих членов можно найти в работе [146]. Равновесные деформации (или мультипольные моменты) при каждой частоте вращения находятся путем минимизации энергии среднего поля

$$\langle HFB, \omega | \hat{H}_{\omega}^{(Sk)} | HFB, \omega \rangle$$

в пространствах квадрупольного

$$\langle HFB, \omega | \hat{Q}_{2\mu} | HFB, \omega \rangle$$

и октупольного

$$\langle HFB, \omega | \hat{Q}_{3\mu} | HFB, \omega \rangle$$

моментов. Здесь $|HFB, \omega \rangle$ - квазичастичный вакуум, т.е. состояние на *yrast*-линии при данной частоте вращения ω .

§4.1.2 Вероятности электромагнитных переходов

В длинноволновом приближении, электрические и магнитные мультипольные операторы можно представить в виде [22,147]

$$\hat{M}(E; \lambda\mu) = \sum_{i=1}^A e_{eff}^{(\lambda)}(i) r_i^{\lambda} Y_{\lambda\mu}(\hat{r}),$$

$$\begin{aligned} \hat{M}(M; \lambda\mu) = & \frac{\mu_N}{2} \sqrt{\lambda(\lambda+1)} \sum_{i=1}^A (g_{S,eff}^{(\lambda)}(i) [\sigma_i \otimes Y_{\lambda-1}(\hat{r}_i)]_{\lambda\mu} + \\ & + g_{l,eff}^{(\lambda)}(i) \frac{4}{\lambda+1} [l_i \otimes Y_{\lambda-1}(\hat{r}_i)]_{\lambda\mu}), \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

где $e_{eff}^{(\lambda)}(i)$ - эффективный заряд нуклона, $g_{S,eff}^{(\lambda)}(i)$ и $g_{l,eff}^{(\lambda)}(i)$ соответственно эффективный спин и орбитальное гироманнитное отношение, а μ_N - ядерный магнетон. Мультипольные операторы могут быть переписаны в виде суммы операторов с определенными сигнатурами

$$\begin{aligned} \hat{M}(X; \lambda\mu) = \\ = \sqrt{\frac{1+\delta_{\mu 0}}{2}} i^{\lambda+\mu} (-1)^{\lambda+\mu+1} \left(\hat{M}_{\lambda\mu}^{(X)}[r=+1] + i \hat{M}_{\lambda\mu}^{(X)}[r=-1] \right). \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Операторы перехода электрического $\hat{M}_{\lambda\mu}^{(E)}[r]$ и магнитного типов $\hat{M}_{\lambda\mu}^{(M)}[r]$ имеют такую же симметрию, что и поля соответственно $M_{\lambda\mu}[r]$ и $S_{l=\lambda-1\lambda\mu}[r]$ (см. приложение ПЗА). Поэтому они имеют те же квазичастичные представления:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\lambda\mu}^{(X)}[r=+1] = \sum_{ik} p_{ik}^{X\lambda\mu}[r=+1] [b_{ik}^+ + (-1)^\Sigma b_{i\bar{k}}], \\ \hat{M}_{\lambda\mu}^{(X)}[r=-1] = \frac{1}{2} \sum_{ik} p_{ik}^{X\lambda\mu}[r=-1] [b_{ik}^+ + (-1)^{\Sigma+1} b_{ik}] + \\ + p_{i\bar{k}}^{X\lambda\mu}[r=-1] [b_{i\bar{k}}^+ + (-1)^{\Sigma+1} b_{i\bar{k}}], \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

где $\Sigma = \mu$ для $X = E$ и $\Sigma = \mu + 1$ для $X = M$. Матричные элементы операторов перехода $p_{ik}^{X\lambda\mu}[r]$ имеют аналогичные соотношения, как и соотношения для мультипольных операторов. Обращая (3.2.52) и используя при этом (3.2.32), можно выразить бозонный оператор через фононный:

$$b_{i\bar{k}} = \sum_{\nu, \omega_\nu \neq 0} \{ [b_{i\bar{k}}, \hat{Q}_{\pi\nu}^{(+)*}] \hat{Q}_{\pi\nu}^{(+)} + [\hat{Q}_{\pi\nu}^{(+)}, b_{i\bar{k}}] \hat{Q}_{\pi\nu}^{(+)*} \}. \quad (4.1.15)$$

Подставляя (4.1.15) в (4.1.14) и пренебрегая членами, связанными с духовыми модами, получаем:

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_{\lambda\mu}^{(\mathcal{X})}[r = +1] &= \sum_{\nu} [\hat{Q}_{\pi\nu}^{(+)*} + (-1)^{\Sigma+\mu} \hat{Q}_{\pi\nu}^{(+)}] \times \\
 &\times \sum_{i\bar{k}} p_{i\bar{k}}^{\lambda\mu, \mathcal{X}}[r = +1] (-1)^{\mu} [\psi_{i\bar{k}}^{\nu} + (-1)^{\Sigma} \varphi_{i\bar{k}}^{\nu}], \\
 \hat{M}_{\lambda\mu}^{(\mathcal{X})}[r = -1] &= \sum_{\nu} [\hat{Q}_{\pi\nu}^{(-)*} + (-1)^{\Sigma+\mu+1} \hat{Q}_{\pi\nu}^{(-)}] \times \\
 &\times \sum_{i\bar{k}} \{ p_{i\bar{k}}^{\lambda\mu, \mathcal{X}}[r = -1] (-1)^{\mu} [\psi_{i\bar{k}}^{\nu} + (-1)^{\Sigma+1} \varphi_{i\bar{k}}^{\nu}] + \\
 &+ p^{\lambda\mu, \mathcal{X}}[r = -1] (-1)^{\mu} [\psi_{i\bar{k}}^{\nu} + (-1)^{\Sigma+1} \varphi_{i\bar{k}}^{\nu}] \}, \quad (4.1.16)
 \end{aligned}$$

где $\Sigma = \mu$ для $\mathcal{X} = E$ и $\Sigma = \mu + 1$ для $\mathcal{X} = M$. Волновые функции аксиально-симметричных ядер в пределе сильной связи можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 |\nu IMK^{\pi} \rangle &= \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{K0})}} (D_{MK}^I(\varpi) |\psi_{\nu\pi K} \rangle + \\
 &+ (-1)^I D_{M-K}^I(\varpi) R_1 |\psi_{\nu\pi K} \rangle), \quad (4.1.17)
 \end{aligned}$$

где $|\psi_{\nu\pi K} \rangle$ - однофононное внутреннее состояние, соответствующее ν -му корню ПХФ ($K = \mu, \pi = (-1)^{\lambda}$). Используя стандартные формулы (см. например, [22]), получаем вероятности переходов из основного состояния в возбужденные:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}(\mathcal{X}\lambda; gr \rightarrow \nu K^{\pi} I) &= \\
 &= \frac{2}{1+\delta_{K0}} \delta_{\lambda I} | \langle \psi_{\nu\pi K} | \hat{M}(\mathcal{X}\lambda, \mu = K) | RPA \rangle |^2. \quad (4.1.18)
 \end{aligned}$$

При $K = 0$ сигнатура и четность совпадают, поэтому внутреннее состояние является собственной функцией оператора сигнатуры \hat{R}_1 с собственным значением $r = \pi$. Следовательно,

$$|\psi_{\nu\pi K=0} \rangle = \hat{Q}_{\pi\nu K=0}^{(r=\pi)*} |RPA \rangle. \quad (4.1.19)$$

После подстановки вместо $\hat{M}(\mathcal{X}\lambda\mu)$ соотношений, определенных выражениями (4.1.13) и (4.1.16), получаем:

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}(E\lambda; gr \rightarrow \nu K^\pi = 0^+ I) = \\ & = \left| \sum_{kl} p_{kl}^{(EIK=0)} [r = \pi = +1] (\psi_{k\bar{l}\nu}^* + \varphi_{k\bar{l}\nu}^*) \right|^2, \\ & \mathcal{B}(E\lambda; gr \rightarrow \nu K^\pi = 0^- I) = \\ & = 4 \left| \sum_{kl} p_{kl}^{(EIK=0)} [r = \pi = -1] (\psi_{k\bar{l}\nu}^* - \varphi_{k\bar{l}\nu}^*) \right|^2. \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Однако необходимо отметить, что при $K = 0$ условие $r = \pi$ выполняется только при $r = (-1)^I$ и это приводит к тому, что магнитные переходы из основной (gr) полосы к однофононной ротационной полосе запрещены.

Для значений $K \neq 0$ и четности π внутренняя волновая функция в (4.1.17) имеет вид:

$$\begin{aligned} |\psi_{\nu\pi K} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q}_{\pi\nu K}^{(+)*} + \hat{Q}_{\pi\nu K}^{(-)*}) |RPA \rangle, \\ \hat{R}_1 |\psi_{\nu\pi K} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Q}_{\pi\nu K}^{(+)*} - \hat{Q}_{\pi\nu K}^{(-)*}) |RPA \rangle. \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

Также заметим, что $|\psi_{\nu\pi K} \rangle$ содержит примерно одинаковые доли фононов с противоположными четностями. Принимая во внимание, что уравнения движения для частей гамильтониана $\hat{H}_K^{(r=-1)}$ и $\hat{H}_K^{(r=+1)}$ ПХФ одинаковы, то можно ограничиться решением лишь для одной из них (например с $r = +1$). Тогда для приведенных вероятностей в случае $K \neq 0$ и четности π получаем выражение

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}\lambda; gr \rightarrow \nu K^\pi I_f) = \left| \sum_{kl} p_{k\bar{l}}^{(\mathcal{X}IK=0)} [r = +1] (\psi_{k\bar{l}\nu}^* + (-1)^\Sigma \varphi_{k\bar{l}\nu}^*) \right|^2. \quad (4.1.22)$$

§4.1.3 Метод силовых функций

Здесь мы в краткой форме рассмотрим основные моменты метода силовых функций, имеющего чрезвычайно важное значение при практических вычислениях.

Силовая функция $S(\Omega)$ некоторой физической величины $\mathcal{B}(\Omega_\nu)$ определяется как

$$S(\Omega) = \sum_{\nu} \mathcal{B}(\Omega_\nu) = \delta(\Omega - \Omega_\nu), \quad (4.1.23)$$

где Ω_ν - энергии уровней системы, $\delta(\Omega - \Omega_\nu)$ - дельта-функция Дирака. Метод силовых функций дает особые преимущества в области высоковозбужденных состояний, поскольку плотность уровней в этой области чрезмерно высока, а физическая информация, извлекаемая с помощью эксперимента, носит усредненный характер. В таких условиях практически невозможно решить секулярные уравнения ПХФ и получить двухквазичастичные амплитуды ψ_{ik}^ν и φ_{ik}^ν .

Подставляя вместо функции Дирака в (4.1.23) некоторую весовую функцию $\rho_\Delta(\Omega - \Omega_\nu)$, можно получить среднее взвешенное значение величины $\mathcal{B}(\Omega_\nu)$ по некоторому энергетическому интервалу Δ в окрестности точки Ω_i :

$$S(\Omega) \approx S_\Delta(\Omega) = \sum_{\nu} \mathcal{B}(\Omega_\nu) \rho_\Delta(\Omega - \Omega_\nu), \quad (4.1.24)$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho_\Delta(x) = 1, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \rho_\Delta(x) = \delta(x). \quad (4.1.25)$$

Обычно усредняющую функцию выбирают в виде Гауссовой или Лоренцевой формы, т.е. из класса быстроубывающих функций [148]. Следуя работам [22,143,149] выберем ее в виде Лоренцевой формы

$$\rho_\Delta(x) = \frac{\Delta}{2\pi} \frac{1}{x^2 + (\Delta/2)^2}, \quad (4.1.26)$$

который имеет два простых полюса. Это позволяет воспользоваться теоремой Коши и тем самым решить задачу без решения уравнений ПХФ на собственные значения.

Условием разрешимости системы однородных алгебраических уравнений (3.2.58) является обращение детерминанта системы в нуль:

$$\det(\hat{D}) = \sum_{j=1}^n D_{ij} |\hat{D}_{ij}| = 0, \quad (4.1.27)$$

где $i = 1, \dots, n$, и n - порядок системы уравнений. Величины $\det(\hat{D})$ и $|\hat{D}_{ij}|$ представляют соответственно определитель системы матриц \hat{D} и алгебраическое дополнение D_{ij} . Производя некоторые несложные выкладки (см. например, [143]), для силовой функции получаем следующее соотношение

$$S(\mathcal{X}\lambda; gr \rightarrow KI^\pi; \Omega) = \sum_{\nu} \frac{\mathcal{W}(\Omega_{\nu})}{\frac{\partial}{\partial \Omega} \det[\hat{D}(\Omega = \Omega_{\nu})]}, \quad (4.1.28)$$

где $\mathcal{W}(\Omega) = 2 \det[\hat{\mathcal{B}}(\Omega)]$.

Рассмотрим функцию комплексного переменного

$$f(z) = \frac{\mathcal{W}(z) \rho_{\Delta}(\Omega - z)}{\det[\hat{D}(z)]}. \quad (4.1.29)$$

Для $\rho_{\Delta}(\Omega - \Omega_{\nu})$ функция (4.1.29) на комплексной плоскости имеет полюс $z = \Omega \pm i(\Delta/2)$ лоренцевой функции $\rho_{\Delta}(\Omega - z)$ и полюса $z = \Omega_{\nu}$, ($\nu = 1, 2, \dots$) связанные с секулярным уравнением $\det[\hat{D}(z = \Omega_{\nu})] = 0$. А также имеются двухквaziчастичные полюса $z = \pm(\varepsilon_l + \varepsilon_p)$, связанные со структурами матриц $\mathcal{B}_{ij}(z)$ и D_{ij} . Кроме того, функция (4.1.29) удовлетворяет следующему условию:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{W}(z) \rho_{\Delta}(\Omega - z)}{\det[\hat{D}(z)]} = 0, \quad (4.1.30)$$

поэтому отрицательными полюсами можно пренебречь. Нас интересует силовая функция $S(\mathcal{X}\lambda; gr \rightarrow KI^\pi; \Omega)$ лишь на

положительной части оси ox , где отрицательные полюса отсутствуют. Поэтому усредняющий параметр можно выбрать так, чтобы его значение было маленьким.

Соотношение (4.1.28) можно рассматривать как результат интегрирования вдоль кривой, окружающей полюс $z = \Omega_\nu$ (используя теорему о вычетах). Интегралы над полюсами $z = \Omega \pm i(\Delta/2)$ и $z = \pm(\varepsilon_l + \varepsilon_p)$ также могут быть вычислены с помощью теоремы о вычетах. Окончательное выражение мы можем записать в виде

$$S(\mathcal{X}\lambda; gr \rightarrow KI^\pi; \Omega) = \frac{2}{\pi} \text{Im} \frac{\det[\hat{\mathcal{B}}(z)]}{\det[\hat{D}(z)]} \Big|_{z=\Omega+i(\Delta/2)} + \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{ij} (p_{ij}^{\mathcal{X}IK})^2 \times \left(\frac{1}{[(\varepsilon_i + \varepsilon_j) - \Omega]^2 + \Delta^2/4} - \frac{1}{[(\varepsilon_i + \varepsilon_j) - \Omega]^2 + \Delta^2/4} \right). \quad (4.1.31)$$

Из данного соотношения видно, что здесь отсутствуют корни ПХФ, поэтому для нахождения силовой функции $S(\mathcal{X}\lambda; gr \rightarrow KI^\pi; \Omega)$ достаточно знать лишь значения квазичастичных энергий и матричных элементов мультипольных операторов. Этот факт является большим преимуществом метода силовых функций.

§4.2 Сравнение с экспериментом

Для анализа экспериментальных данных о низколежащих состояниях вблизи *yra*st-линии, конструируем экспериментальные раусианы для каждой ротационной полосы ν ($\nu = \text{yra}st, \beta, \gamma, \dots$):

$$R_\nu(\omega) = E_\nu(\omega) - \hbar\omega_\nu I(\omega), \quad \hbar\omega_\nu(I) = \frac{E_\nu(I+2) - E_\nu(I)}{2}, \quad (4.2.1)$$

исходя из экспериментальных уровней полос. Тогда мы можем определять значения экспериментальных энергий во вра-

щающейся системе координат посредством $\hbar\Omega_\nu^{(exp)} = R_\nu(\omega) - R_{yr}(\omega)$ для каждого значения ω [36] с определенным шагом. Такие экспериментальные энергии оказываются непосредственно сравнимыми с решениями $\hbar\Omega_\nu$ уравнений ПХФ при соответствующих частотах вращения ω . Экспериментальные значения кинематического $\mathfrak{S}_{exp;\nu}^{(1)}$ и динамического $\mathfrak{S}_{exp;\nu}^{(2)}$ моментов инерций для каждой полосы ν могут быть определены с помощью стандартных соотношений

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{exp,\nu}^{(1)}(\omega(I)) &= \frac{\hbar I}{\omega_\nu(I)} = \frac{\hbar^2 2I}{E_\nu(I+2) - E_\nu(I)} \\ \mathfrak{S}_{exp,\nu}^{(2)}(\omega(I)) &= \hbar \frac{dI}{d\omega} = \frac{2\hbar}{\omega_\nu(I+2) - \omega_\nu(I)}.\end{aligned}\quad (4.2.2)$$

Экспериментальные данные по энергиям уровней $E_\nu(I)$ для всех наблюдаемых ротационных полос нами были взяты из Брукхейвенского архива NUDAT ([42]). Для ядра ^{162}Yb имеются шесть наблюдаемых ротационных полос, которые в соответствии с [42] пронумеруем как 1, ..., 6. Среди них ротационные полосы: 1 (*gr*-полоса), 2 (β -полоса), 3 уровни с четными спинами (γ -полоса). Полоса 4 относится к $(\pi, \alpha) = (+, 0)$ сектору с положительными четностью и сигнатурой. Один уровень с $I=3$ для γ полосы (3) относится к $(\pi, \alpha) = (+, 1)$ сектору с положительной четностью и отрицательной сигнатурой. Ротационная полоса 5 принадлежит к $(-, 1)$ сектору, а ротационная полоса 6 – к $(-, 0)$ сектору. Экспериментальные раусияны $R_\nu(\omega) - R_{yr}(\omega)$ для всех наблюдаемых полос $\nu = 1, 2, \dots, 6$, получены из экспериментальных уровней с помощью соотношения (4.2.1). Экспериментальное значение точки пересечения ротационной полосы 4 с основной (*gr*) полосой составляет $\hbar\omega = 0.265$ МэВ и при $\hbar\omega > 0.265$ МэВ эта полоса становится *yrast* полосой. Такое изменение структуры *yrast*-полосы при $\hbar\Omega = 0.265$ МэВ ассоциировано проявлением бэкбендинга (см. экспериментальные точки на рис. 4.1

для кинематического и динамического моментов инерций). Возникновение же сильных октупольных корреляций экспериментально можно наблюдать при $\hbar\omega \geq 0.45$ МэВ: полосы отрицательной четности (5 и 6) сильно опускаются по сравнению с основной полосой.

Одним из наилучших тестов на проверку самосогласованности микроскопических вычислений является сравнение динамического момента инерции

$$\mathfrak{S}_{HB}^{(2)} = -\frac{d^2 E_{HB}}{d\omega^2} = \frac{d \langle \hat{J}_x \rangle}{d\omega}, \quad (E_{HB} = \langle \hat{H}_\omega \rangle)$$

с моментом инерции Таулеса-Валатина \mathfrak{S}_{TV} , вычисляемого в рамках ПХФ. При подходящем самосогласованном выборе минимума среднего поля можно отделить духовые (ложные) решения от физических, и это приводит к совпадению двух указанных моментов инерций. Мода, ассоциированная с вращением вокруг оси ox позволяет определять момент инерции Таулесса-Валатина, используя член гамильтониана, соответствующего положительной сигнатуре следующим образом

$$[\hat{H}_{\omega(r=+)}^{(\pi=+)}, i\hat{\Phi}] = \frac{\hat{J}_x}{\mathfrak{S}_{TV}}, \quad [\hat{\Phi}, \hat{J}_x] = i, \quad (4.2.3)$$

где оператор поворота на определенный угол $\hat{\Phi}$ является канонически сопряженным оператору углового момента \hat{J}_x . На нижнем рисунке 4.2.1 показан динамический момент инерции, вычисленный на основе метода среднего поля и в рамках ПХФ для ядра ^{162}Yb , откуда видно их хорошее согласование. Нарушение аксиальной симметрии среднего поля возникает при частоте вращения $\hbar\Omega_c \approx 0.250$ МэВ, который в свою очередь, индуцирует наблюдаемый бэкбендинг. Также отметим, что теоретически вычисленное значение $\hbar\omega_c \approx 0.265$ МэВ точки перехода в триаксиальную форму, находится в хорошем согласии с указанным экспериментальным значением.

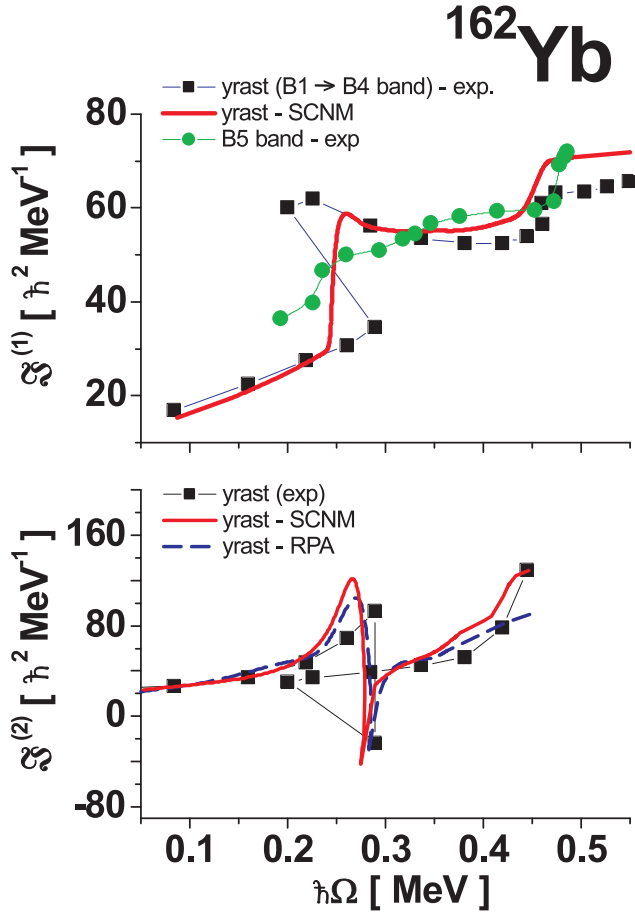


Рис. 4.2.1: Кинематический $\mathfrak{S}_1^{(1)}(\omega) = \langle \hat{J}_x \rangle / \omega$ (сверху) и динамический $\mathfrak{S}_1^{(2)}(\omega)$ (снизу) моменты инерций *yrast*-полосы (сплошные линии, в единицах \hbar^2/MeV) сравниваются с соответствующими экспериментальными значениями для ядра ^{162}Yb (темные квадратики, соединенные тонкими линиями). Прерывистой линией обозначены значения момента инерции Таулеса-Валатина, вычисленные в рамках ПХФ (кружочками на верхнем рисунке приведены экспериментальные значения кинематического момента инерции нижней полосы отрицательной четности).

Здесь важно подчеркнуть, что хорошее согласование моментов инерций с экспериментальными, было получено благодаря включению в гамильтониан (4.1.1) добавочного члена h_{add} , восстанавливающего галилеевскую инвариантность (§3.1.1). Для описания квазичастичной структуры вблизи точки перехода, мы рассматривали поведение квазичастичных орбиталей при вращении во вращающейся системе (раусианы) как функции равновесных параметров $(\varepsilon, \gamma, \Delta)$. При $\omega = 0$ орбитали характеризуются асимптотическими квантовыми числами, которые теряют смысл при вращении ядра из-за сильного кориолисова смешивания, поэтому в дальнейшем ими бу-

дем пользоваться лишь при допустимых случаях. На рисунке 4.2.2 представлены раусианы для нейтронов (верхняя часть) и протонов (нижняя часть). Из рисунков видно, что пересечение нижайших полос для ядра ^{162}Yb происходит при частотах $\hbar\omega \approx 0.245$ МэВ - для нейтронов и при $\hbar\omega \approx 0.410$ МэВ - для протонов.

Близость значений критической точки нарушения аксиальной симметрии ($\hbar\omega_c \approx 0.265$ МэВ) и точки квазипересечения нейтронной двухквазичастичной конфигурации ($\hbar\omega \approx 0.245$ МэВ) указывают на то, что механизмом, ответственным за нарушение аксиальной симметрии, является выстраивание пары $i_{13/3}$. Этот вывод находится в полном согласии с тем же выводом, сделанном нами в [88], в рамках полуфеноменологической модели. Из рисунка 4.2 также видно, что при частотах $\hbar\omega \approx 0.45 - 0.50$ МэВ происходит пересечение квазичастичных конфигураций положительной и отрицательной четностей вблизи поверхности Ферми. В частности, нейтронная конфигурация положительной четности из $i_{13/2}$ подболочки (А) пересекает конфигурацию отрицательной четности (С) из $h_{9/2}$ подболочки при $\hbar\omega \approx 0.45$ МэВ. Аналогичная картина наблюдается и в случае протонов: пересечение $h_{11/2}$ и $g_{7/2}$ (которые на нижнем рис.4.1 обозначены соответственно как Е и Н) конфигураций происходит при $\hbar\omega \approx 0.48$ МэВ.

Исчезновение энергетического интервала между нижайшими полосами (см. также [88]), имеющими отрицательные четность и сигнатуру и основной ротационной полосой при больших частотах вращения, указывают на возникновение октупольной деформации в *yrast*-состоянии. При дальнейшем возрастании частоты вращения наблюдается слияние таких полос ($\pi = -, r = -$) с основной ($\pi = +, r = +$) полосой, т.е. происходит формирование идеальной ротационной полосы с чередующейся четностью состояний с положительным симплексом $\sigma = \pi r = +1$.

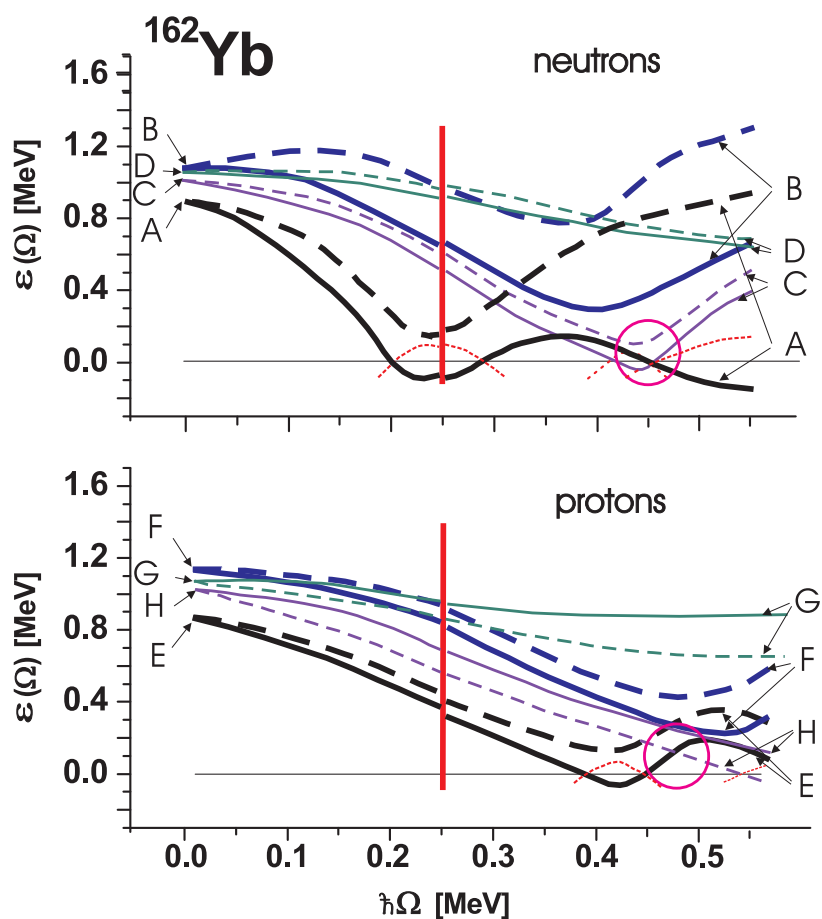


Рис. 4.2.2: Нижайшие квазинейтронные и квазипротонные энергии ядра ^{162}Yb в зависимости от частоты вращения ω . Кривые, соответствующие положительной сигнатуре, соединены сплошной линией, отрицательной – прерывистой. При $\omega = 0$ уровни A , B , C , D на верхней части рисунка соответствуют нейтронным состояниям соответственно $3/2[651]$ (подоболочка $i_{13/2}$), $1/2[660]$ (подоболочка $i_{13/2}$), $3/2[521]$ (подоболочка $h_{9/2}$), $5/2[521]$ (подоболочка $f_{7/2}$). Уровни E , F , G , H на нижней части рисунка соответствуют протонным состояниям соответственно $7/2[523]$ (подоболочка $h_{11/2}$), $9/2[514]$ (подоболочка $h_{11/2}$), $5/2[402]$ (подоболочка $d_{5/2}$), $7/2[404]$ (подоболочка $g_{7/2}$). Вертикальной линией указана точка перехода от аксиальной формы деформации к неаксиальной. В области пересечения квазичастичных орбиталей положительной и отрицательной четности (они обозначены кругами в обоих рисунках) происходят сильные октупольные корреляции.

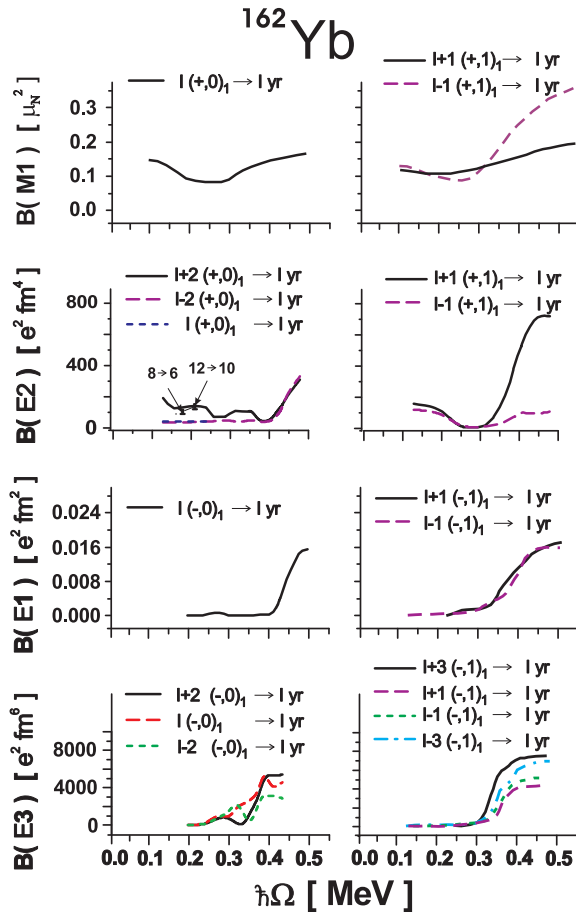


Рис. 4.2.3: Приведенные вероятности $B(E2)$, $B(E1)$ и $B(E3)$ переходов из нижайших однофононных полос к *yrast*-линии в ядре ^{162}Yb . Возбужденные состояния с угловыми моментами I характеризуются четностью $\pi = \pm$ и сигнатурой $\alpha = 0, 1$ (или, что эквивалентно, соответственно как $r = +1, -1$). Слева (справа) указаны переходы с четными (с нечетными) значениями ΔI из нижайших состояний положительной (отрицательной) сигнатуры, т.е. из состояний с $\alpha = 0(1)$.

Таблица 4.1: Структура нижайших фононов ($\nu = 1$) отрицательной четности с положительной $(-, 0)_{\nu=1}$ и отрицательной $(-, 1)_{\nu=1}$ сигнатурами при $\hbar\omega = 0.45$ МэВ для ^{162}Yb .

$(-, 0)_{\nu=1}$	$\bar{p}p \frac{7}{2}[404] \frac{7}{2}[523]$	$\bar{p}p \frac{7}{2}[404] \frac{9}{2}[514]$	$n\bar{n} \frac{3}{2}[651] \frac{3}{2}[521]$	$n\bar{n} \frac{1}{2}[660] \frac{3}{2}[521]$
$(-, 1)_{\nu=1}$	$\bar{p}\bar{p} \frac{7}{2}[404] \frac{7}{2}[523]$	$nn \frac{1}{2}[660] \frac{3}{2}[521]$	$pp \frac{7}{2}[404] \frac{9}{2}[514]$	$nn \frac{3}{2}[651] \frac{3}{2}[521]$

Результаты расчетов (рис.4.2.3) приведенных вероятностей $\mathcal{B}(E1)$ и $\mathcal{B}(E3)$ для переходов из нижайших фононных состояний на *yrast* состояние показывают, что при $\hbar\omega > 0.3$ МэВ наблюдаются сильные радиационные переходы указанных мультипольностей, которые также убедительно указывают на возникновение сильных октупольных корреляций в этой области. Отсюда также можно предположить, что такая сильная коллективизация низколежащих состояний отрицательной четности, указывает на переход ядра с квадрупольно деформированной формы на квадрупольно-октупольную форму.

Увеличение же вычисленных значений $\mathcal{B}(E2)$ переходов из состояний с положительной четностью на основную ротационную полосу, указывает на нарушение в этой области также и аксиальной симметрии ядра. Появление октупольной неаксиальности ($\langle Q_{31} \rangle \neq 0$) связано с октупольной деформацией минимума среднего поля Скирма. Это отражается также и в структуре низколежащих фононных возбуждений ПХФ отрицательной четности для обеих сигнатур $r = \pm 1$. Структуру таких фононов мы представили в таблице при $\hbar\omega = 0.45$ МэВ для ^{162}Yb . В таблице показан вклад двухквaziчастичных компонент $n_{i\bar{j}} = (\psi_{i\bar{j}}^{(\nu=1)})^2 - (\varphi_{i\bar{j}}^{(\nu=1)})^2$ для $(-, 0)_{\nu=1}$ фонона и $n_{ij} = (\psi_{ij}^{(\nu=1)})^2 - (\varphi_{ij}^{(\nu=1)})^2$, $n_{\bar{i}\bar{j}} = (\psi_{\bar{i}\bar{j}}^{(\nu=1)})^2 - (\varphi_{\bar{i}\bar{j}}^{(\nu=1)})^2$ для $(-, 1)_{\nu=1}$ фонона с нормировкой на $\sum_{ij} n_{i\bar{j}} = 1$ (для $r = 1$) и $\sum_{ij} (n_{ij} + n_{\bar{i}\bar{j}}) = 1$ (для $r = -1$). В соответствии с рис.4.2.3

для $\hbar\omega = 0.45$ МэВ $\mathcal{B}(E1)$ и $\mathcal{B}(E3)$ приведенные вероятности переходов с однофононных состояний к *yrast*-полосе увеличивается при значениях $\omega < 0.4$ МэВ, что указывает на увеличение коллективности низколежащих состояний отрицательной четности для обеих сигнатур. Из таблицы видно, что $(-, 0)_1$ и $(-, 1)_1$ фононы имеют несколько двухквазичастичных компонент, а октупольная неаксиальность проявляется в том, что следующие, после нижайших, двухквазичастичные компоненты для $(-, 0)_1$ и $(-, 1)_1$ фононов противоположных четностей начинаются при $\omega = 0$ из Нильссоновских состояний с $\Delta K = 1$.

§4.3 Нейтрон-протонные корреляции в ядрах

Согласно современным представлениям, атомные ядра представляют собой бинарные фермионные системы со сверхтекучими свойствами. Каждая куперовская пара в такой системе состоит из двух протонов или двух нейтронов, связанных в изоспин $\mathcal{T} = 1$. Однако такое монополярное изовекторное спаривание между идентичными нуклонами может при определенных условиях конкурировать с остаточными изоскалярными нейтрон-протонными (n-p) взаимодействиями с $\mathcal{T} = 0$ [13]. Важность учета изоскалярного спаривания проявляется в ядрах с $N \approx Z$ и прежде всего для ядер с $N = Z$, в которых происходит заполнение протонами и нейтронами тождественных орбиталей. Принцип Паули не запрещает парам, связанным в изоспин $\mathcal{T} = 0$, занимать такие состояния в силу нетождественности частиц [14].

По мере развития экспериментальной техники с применением высокочувствительных детекторов открылись также и экспериментальные возможности для выявления свойств сверхтекучей ядерной материи, образованной из нулевой компоненты изовекторного $\mathcal{T} = 1$ монополярного спаривания и $\mathcal{T} =$

0 изоскалярного n-p спаривания в ядрах с $N \approx Z$ [6,15]. При этом одна из возможностей обнаружения наряду с общеизвестной $\mathcal{T} = 1$ изовекторной модой, изоскалярного $\mathcal{T} = 0$ конденсата, состоит в исследовании поведения ядер с $N = Z$ и $N \pm 1, \pm 2 = Z$ при быстром вращении [150-162]. В случае, когда изоскалярное спаривание еще отсутствует при низких спинах, оно может быть индуцировано при высоких спинах благодаря эффекту кориолисова антиспаривания. Если же $\mathcal{T} = 0$ изоскалярный конденсат присутствует уже при низких спинах, то можно ожидать заметную инертность в процессе выстраивания благодаря особой устойчивости куперовских протон-нейтронных пар с параллельными спинами относительно упомянутого эффекта кориолисова антиспаривания [14,15,157]. Некоторыми авторами изучались также особенности изменения моментов инерций с ростом угловой частоты вращения $\mathcal{T} = 1$ и $\mathcal{T} = 0$ ротационных полос [160].

Однако, несмотря на серьезные обсуждения данной проблемы в литературе различными группами исследователей, по сей день не существует общепринятой точки зрения по факту существования чистой изоскалярной нейтрон-протонной $\mathcal{T} = 0$ пары [8,158]. Высказывается также точка зрения [158], что в ядрах с $N \approx Z$ (разумеется, за исключением случая $N = Z$) вообще не существует изоскалярного конденсата, а объяснение Вигнеровской энергии (энергии симметрии) можно дать с помощью RPA корреляционной энергии [161].

В то же время, известным фактом существования остаточных n-p взаимодействий являются нечетно-нечетные (н-н) ядра с $N \neq Z$. На необходимость учета взаимодействия между не спаренными нейтроном и протоном было высказано, по-видимому, впервые, де Шалитом и Гольдхабером [163]. Несколько позднее более подробные исследования были проведены Галаджером и Мошковским, а также Ньюбаем [164,165], которые установили спиновую зависимость n-p взаимодействий

в зависимости от частоты вращения ядра (эффекты Галаджера-Мошковского и Ньюбая). Самым примечательным и в то же время общим, не зависящим от заполнения оболочек свойством таких ядер, является возможность интерпретации их низколежащих спектров в терминах n - r мультиплетов [166]. Очевидно, что проявление наиболее ярких свойств n - r мультиплетов следует ожидать в n - n ядрах с дважды магическим остовом. В работе [167], в рамках модели оболочек, были проведены расчеты для ядер вблизи дважды магического ядра ^{208}Pb . Эти расчеты оказались весьма успешными как для интерпретации низколежащих спектров этих ядер, так и для определения параметров эффективного n - r взаимодействия.

Однако при увеличении числа нуклонов (или дырок) сверх заполненных оболочек ситуация сильно усложняется из-за необходимости учета всех взаимодействий между нейтронными и протонными конфигурациями. В этой связи отметим лишь, что в весьма упрощенном варианте построение модели для упомянутых n - n ядер, было предпринято в работах [168,169], которая хотя и дает хорошие предсказания относительно определения положения уровней n - r мультиплета, но приводит к большим трудностям и неоправданным усложнениям при попытках применения этой модели для решения задач о движении всех нуклонов сверх заполненных оболочек в поле остова. К ряду таких проблем следует отнести и рассмотрение вращения, поскольку анализ экспериментальных спектров низкоспиновой области редкоземельных ядер [170] показывает, что остаточные n - r взаимодействия в n - n ядрах могут быть сравнимы с энергией монопольного спаривания (могут составлять вплоть до 60% энергии монопольного спаривания) и следовательно, могут играть определенную роль в поведении уровней при быстром вращении [171-174].

В то же время представляет большой интерес рассмотрение вращения на единой самосогласованной основе, которое

бы позволяло учитывать все взаимодействия между нейтронными и протонными конфигурациями. Такое рассмотрение может позволить устранять перечисленные недостатки для нечетно-нечетных ядер с одной стороны, и описание нейтрон-протонных корреляций в ядрах с $N \approx Z$ - с другой, разработкой единой самосогласованной модели. Общепринятым методом для этого является метод Хартри-Фока-Боголюбова (ХФБ) в комбинации с моделью принудительного вращения (МПВ) [175]. Такая модель для учета влияния остаточного п-р спаривания на вращательные свойства ядер была предложена в [176] на основе МПВ в приближении (ХФБ). Здесь же мы предоставляем усовершенствованный вариант данной модели с учетом более реалистических гауссовых взаимодействий, и которую применяем для исследований влияния п-р взаимодействия на поведение квазичастичных уровней в зависимости от частоты вращения ядер с $A \approx Z$ (четно-четных изотопов $^{72-76}Kr$) и четно-четных и нечетно-нечетных ядер из области редких земель.

§4.3.1 Модель

Здесь мы изложим основные моменты МПВ+ХФБ с учетом п-р взаимодействий, аппроксимируя такое взаимодействие потенциалом Гаусса. При этом будем исходить из гамильтониана МПВ, определенного во вращающейся системе координат следующим образом:

$$\hat{H}' = \hat{H} - \sum_{\tau} \lambda_{\tau} \hat{\mathcal{N}}_{\tau} - \omega \hat{J}_x, \quad (4.3.1)$$

где \hat{H} - полный многочастичный гамильтониан в лабораторной системе, $\hat{\mathcal{N}}_{\tau}$ - оператор числа частиц (протонов $\tau = Z$ и нейтронов $\tau = N$), λ_{τ} - химический потенциал, ω - угловая частота вращения и \hat{J}_x - проекция полного углового момента

ядра на ось ox .

Будем исходить из деформированного среднего поля, а остаточные взаимодействия возьмем в виде монополярного спаривания и n - p взаимодействий. Тогда полный гамильтониан \hat{H} можно записать в виде

$$\hat{H} = \sum_k \varepsilon_k (\hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \hat{a}_{\bar{k}}^+ \hat{a}_{\bar{k}}) - \frac{1}{4} \sum_{\tau} G_{\tau} \hat{P}_{\tau}^+ \hat{P}_{\tau} - \hat{H}_{np}, \quad (4.3.2)$$

где

$$\hat{H}_{np} = \frac{1}{2} \sum_{\beta\gamma\xi\rho} \langle \beta\gamma | V_{np} | \xi\rho \rangle \hat{a}_{\beta}^+ \hat{a}_{\gamma}^+ \hat{a}_{\xi} \hat{a}_{\rho},$$

ε_k - одночастичные энергии в деформированном среднем поле, \hat{a}_k^+ , \hat{a}_k ($\hat{a}_{\bar{k}}^+$, $\hat{a}_{\bar{k}}$) соответственно операторы рождения и уничтожения частиц в состоянии k (\bar{k}), G_{τ} - константа спаривания ($\tau \in n, p$), $\hat{P}_{\tau}^+ = \sum_{k \in \tau} \hat{a}_k^+ \hat{a}_{\bar{k}}^+$ - оператор спаривания, а операторы \hat{a}_k^+ и $\hat{a}_{\bar{k}}^+$ связаны между собой оператором обращения времени \hat{K} соотношением:

$$\hat{a}_{\bar{k}}^+ = \hat{K} \hat{a}_k^+ \hat{K}^{-1}.$$

Здесь $\sum_{\beta\gamma\xi\rho} \langle \beta\gamma | V_{np} | \xi\rho \rangle$ представляют собой не антисимметризованные двухчастичные матричные элементы n - p взаимодействий, а греческие индексы пробегают все множество одночастичных состояний. Представим потенциал n - p взаимодействия в виде суммы

$$V_{np} = V_W + V_{\sigma}, \quad (4.3.3)$$

состоящей из Вигнеровской

$$V_W = -4\pi g(1 - \alpha)(-V_G) e^{\frac{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p|^2}{r_g^2}}, \quad (4.3.4)$$

и спин-спиновых частей

$$V_{\sigma} = -4\pi g\alpha(-V_G) e^{\frac{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p|^2}{r_g^2}} \sigma_n \sigma_p, \quad (4.3.5)$$

где $r_g = 1.4 \text{ MeV}$, g и α - некоторые константы, смысл и величины которых станут ясными при обсуждении результатов расчетов.

Потребуем выполнения ротационной и трансляционной инвариантности в общем гамильтониане, а также сохранения числа частиц, поскольку в решаемой нами задаче их количество не меняется. Следовательно,

$$[\hat{H}, \hat{J}_i] = [\hat{H}, \hat{\mathcal{P}}_i] = [\hat{H}, \hat{\mathcal{N}}_\tau] = 0. \quad (4.3.6)$$

Поскольку компоненты операторов полного углового момента \hat{J}_i , полного импульса $\hat{\mathcal{P}}_i$ и оператора числа частиц $\hat{\mathcal{N}}_\tau$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\hat{J}_i, \hat{\mathcal{P}}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{\mathcal{P}}_k; \quad [\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k, \quad (4.3.7)$$

$$[\hat{\mathcal{N}}_\tau, \hat{J}_i] = [\hat{\mathcal{N}}_\tau, \hat{\mathcal{P}}_i] = [\hat{\mathcal{P}}_i, \hat{\mathcal{P}}_j] = 0, \quad (4.3.8)$$

то отсюда с учетом (4.3.6) следует для гамильтониана МПВ, что

$$\begin{aligned} [\hat{H}', \hat{J}_x] &= 0; & [\hat{H}', \hat{\mathcal{P}}_x] &= 0; \\ [\hat{H}', \hat{J}_y] &= -i\omega\hat{J}_z; & [\hat{H}', \hat{\mathcal{P}}_y] &= -i\omega\hat{\mathcal{P}}_z; & [\hat{H}', \hat{\mathcal{N}}_\tau] &= 0; \\ [\hat{H}', \hat{J}_z] &= -i\omega\hat{J}_y; & [\hat{H}', \hat{\mathcal{P}}_z] &= -i\omega\hat{\mathcal{P}}_y. \end{aligned}$$

Кроме того, потребуем от гамильтониана \hat{H}' инвариантность относительно $\hat{R}_x(\pi)$ - симметрии:

$$[\hat{H}', \hat{R}_x(\pi)] = 0,$$

где $\hat{R}_x(\pi) = \exp(i\pi\hat{J}_x)$ - оператор поворота вокруг оси x на угол π . Это позволяет выбрать базис одночастичных состояний из условия, чтобы эти состояния были собственными векторами оператора $\hat{R}_x(\pi)$:

$$e^{i\pi\hat{J}_x} \begin{pmatrix} \hat{c}_k^+ \\ \hat{c}_k^- \end{pmatrix} e^{-i\pi\hat{J}_x} = \mp \begin{pmatrix} \hat{c}_k^+ \\ \hat{c}_k^- \end{pmatrix}. \quad (4.3.9)$$

Этот базис относительно $\hat{R}_x(\pi)$ -симметрии удовлетворяет соотношениям:

$$\hat{R}_x(\pi)|k \rangle_G = -i|k \rangle_{\bar{G}}, \quad \hat{R}_x(\pi)|\bar{k} \rangle_G = i|\bar{k} \rangle_G. \quad (4.3.10)$$

Такой базис $| \rangle_G$ впервые был введен Гудманом [177], поэтому называется базисом Гудмана. Следуя его работе, запишем операторы рождения и уничтожения в новом базисе:

$$\begin{aligned} \hat{a}_k^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{c}_k^+ - (-1)^{m+1/2}\hat{c}_{\bar{k}}^+); & \hat{a}_k &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{c}_k - (-1)^{m+1/2}\hat{c}_{\bar{k}}); \\ \hat{a}_{\bar{k}}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{c}_{\bar{k}}^+ - (-1)^{-m+1/2}\hat{c}_k^+); & \hat{a}_{\bar{k}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{c}_{\bar{k}} - (-1)^{-m+1/2}\hat{c}_k). \end{aligned}$$

Из (4.3.9) и (4.3.10) также видно, что одночастичные состояния $c_k^+|0 \rangle$ имеют положительную сигнатуру, а $c_{\bar{k}}^+|0 \rangle$ - отрицательную.

Потенциал n -р взаимодействий инвариантен относительно вращений, поэтому

$$\hat{R}_x(\pi)V_{np}\hat{R}_x(\pi)^{-1} = V_{np}. \quad (4.3.11)$$

Тогда используя (4.3.10) и (4.3.11), а также предполагая инвариантность V_{np} относительно обращения времени, можно показать, что двухчастичный потенциал V_{np} в базисе Гудмана может быть записан в виде

$$\begin{aligned} V_{np} &= \frac{1}{2} \sum_{klpn} [\langle kl|V_{np}|pn \rangle_G (c_k^+ c_l^+ c_n c_p + c_{\bar{k}}^+ c_{\bar{l}}^+ c_{\bar{n}} c_{\bar{p}}) + \\ &+ \langle kl|V_{np}|\bar{p}\bar{n} \rangle_G (c_{\bar{k}}^+ c_{\bar{l}}^+ c_n c_p + c_k^+ c_l^+ c_{\bar{n}} c_{\bar{p}}) + \\ &+ (\langle k\bar{l}|V_{np}|p\bar{n} \rangle - \langle k\bar{l}|V_{np}|\bar{n}p \rangle_G) (c_k^+ c_{\bar{l}}^+ c_{\bar{n}} c_p + c_{\bar{k}}^+ c_l^+ c_n c_{\bar{p}})], \end{aligned}$$

где согласно (4.3.3)

$$\langle kl|V_{np}|pn \rangle_G = \langle kl|V_{(np)W}|pn \rangle_G + \langle kl|V_{(np)\sigma}|pn \rangle_G.$$

Двухчастичные матричные элементы соответственно равны:

$$\langle kl|V_{(np)W}|pn \rangle = g(1 - \alpha) \sum_{q=0}^{\infty} (F_q(n'_p l'_p; n'_n l'_n | n_p l_p; n_n l_n) \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \sqrt{(2l_p + 1)(2l_n + 1)(2l_k + 1)(2l_l + 1)} \times \\
 & \times \sum_{\mu_p \mu_k} \sum_{\Sigma_p \Sigma_k} \sum_{\mu_l \mu_n} \sum_{\Sigma_l \Sigma_n} C_{l_k \mu_k \frac{1}{2} \Sigma_k}^{j k m_k} C_{l_l \mu_l \frac{1}{2} \Sigma_l}^{j l m_l} C_{l_p \mu_p \frac{1}{2} \Sigma_p}^{j p m_p} C_{l_n \mu_n \frac{1}{2} \Sigma_n}^{j n m_n} \times \\
 & \quad \times \sum_L (-1)^{L+l+l_n} \left\{ \begin{matrix} l_k & l_p & q \\ l_n & l_l & L \end{matrix} \right\} \times \\
 & \times C_{l_k \mu_k l_l \mu_l}^{LM_L} C_{l_p \mu_p l_n \mu_n}^{LM_L} C_{l_p 0 l_n 0}^{q 0} C_{l_k 0 l_l 0}^{q 0} \sum_S C_{\frac{1}{2} \Sigma_k \frac{1}{2} \Sigma_l}^{SM_S} C_{\frac{1}{2} \Sigma_p \frac{1}{2} \Sigma_n}^{SM_S}; \quad (4.3.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle kl | V_{(np)\sigma} | mn \rangle &= g\alpha \sum_{q=0}^{\infty} (F_q(n'_p l'_p; n'_n l'_n | n_p l_p; n_n l_n) \times \\
 & \quad \times \sqrt{(2l_p + 1)(2l_n + 1)(2l_k + 1)(2l_l + 1)} \times \\
 & \quad \times \sum_{\mu_p \mu_k} \sum_{\Sigma_p \Sigma_k} \sum_{\mu_l \mu_n} \sum_{\Sigma_l \Sigma_n} C_{l_k \mu_k \frac{1}{2} \Sigma_k}^{j k m_k} C_{l_l \mu_l \frac{1}{2} \Sigma_l}^{j l m_l} C_{l_p \mu_p \frac{1}{2} \Sigma_p}^{j p m_p} C_{l_n \mu_n \frac{1}{2} \Sigma_n}^{j n m_n} \times \\
 & \quad \times \sum_L (-1)^{L+l+l_n} \left\{ \begin{matrix} l_k & l_p & q \\ l_n & l_l & L \end{matrix} \right\} \times \\
 & \quad \times C_{l_k \mu_k l_l \mu_l}^{LM_L} C_{l_p \mu_p l_n \mu_n}^{LM_L} C_{l_p 0 l_n 0}^{q 0} C_{l_k 0 l_l 0}^{q 0} \sum_S C_{\frac{1}{2} \Sigma_k \frac{1}{2} \Sigma_l}^{SM_S} C_{\frac{1}{2} \Sigma_p \frac{1}{2} \Sigma_n}^{SM_S} \mathcal{S}. \quad (4.3.13)
 \end{aligned}$$

Здесь $F_q(n'_p l'_p; n'_n l'_n | n_p l_p; n_n l_n)$ представляет собой интеграл, вычисление которого приведено в приложении, $\mathcal{S} = (2S(S+1) - 3)$ и V_q^G - радиальная часть потенциала Гаусса (в фиг. скобках даны бј символы).

При вычислении $\langle k\bar{l} | V_{np} | p\bar{n} \rangle$ в (4.3.12), (4.3.13) нужно добавить фазовый множитель $(-1)^{m_l + l_l + m_n + l_n}$ и кроме того, произвести замену:

$$\begin{aligned}
 C_{l_k \mu_k l_l \mu_l}^{LM_L} &\rightarrow C_{l_k \mu_k l_l - \mu_l}^{LM_L}, & C_{l_p \mu_p l_n \mu_n}^{LM_L} &\rightarrow C_{l_p \mu_p l_n - \mu_n}^{LM_L}; \\
 C_{\frac{1}{2} \Sigma_k \frac{1}{2} \Sigma_l}^{SM_S} &\rightarrow C_{\frac{1}{2} \Sigma_k \frac{1}{2} - \Sigma_l}^{SM_S}, & C_{\frac{1}{2} \Sigma_p \frac{1}{2} \Sigma_n}^{SM_S} &\rightarrow C_{\frac{1}{2} \Sigma_p \frac{1}{2} - \Sigma_n}^{SM_S}.
 \end{aligned}$$

При расчете $\langle k\bar{l}|V_{np}|\bar{n}p \rangle$, необходимо в выражении для $\langle k\bar{l}|V_{np}|p\bar{n} \rangle$ заменить

$$C_{l_p\mu_p l_n-\mu_n}^{LM_L} \rightarrow (-1)^{l_n+l_p-L} C_{l_p\mu_p l_n-\mu_n}^{LM_L};$$

$$C_{\frac{1}{2}\Sigma_p \frac{1}{2}-\Sigma_n}^{SM_S} \rightarrow (-1)^{1-S} C_{\frac{1}{2}\Sigma_p \frac{1}{2}-\Sigma_n}^{SM_S}$$

и поменять местами индексы n и p .

Далее, используя преобразование Боголюбова, перейдем от одночастичных операторов c_k^+, c_k к операторам квазичастиц α_k^+, α_k :

$$c_k = \sum_i (A_k^i \alpha_i + B_k^{\bar{i}} \alpha_i^+); \quad c_k^+ = \sum_i (A_k^i \alpha_i^+ + B_k^{\bar{i}} \alpha_i), \quad (4.3.14)$$

$$c_{\bar{k}} = \sum_i (A_{\bar{k}}^{\bar{i}} \alpha_i + B_{\bar{k}}^i \alpha_i^+); \quad c_{\bar{k}}^+ = \sum_i (A_{\bar{k}}^{\bar{i}} \alpha_i^+ + B_{\bar{k}}^i \alpha_i). \quad (4.3.15)$$

Здесь коэффициенты преобразования удовлетворяют следующим соотношениям симметрии:

$$\sum_k (A_k^i A_k^j + B_k^{\bar{i}} B_k^{\bar{j}}) = \delta_{ij}; \quad \sum_k (A_{\bar{k}}^{\bar{i}} A_{\bar{k}}^{\bar{j}} + B_{\bar{k}}^i B_{\bar{k}}^j) = \delta_{ij}; \quad (4.3.16)$$

$$\sum_i (B_k^{\bar{i}} B_l^{\bar{i}} + A_k^i A_l^i) = \delta_{kl}; \quad \sum_i (B_{\bar{k}}^i B_l^i + A_{\bar{k}}^{\bar{i}} A_l^{\bar{i}}) = \delta_{kl}; \quad (4.3.17)$$

$$\sum_i (A_{\bar{k}}^{\bar{i}} B_l^{\bar{i}} + A_l^i B_{\bar{k}}^i) = 0. \quad (4.3.18)$$

Перепишав гамильтониан через квазичастичные операторы и воспользовавшись преобразованиями (4.3.14), (4.3.15), а также учитывая соотношения симметрии (4.3.16)-(4.3.18), с помощью вариационного принципа приходим к самосогласованным уравнениям для определения коэффициентов $A_k^i, A_{\bar{k}}^{\bar{i}}, B_k^i, B_{\bar{k}}^{\bar{i}}$:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}^{(1)} & \Delta^{(1)} \\ \Delta^{(2)} & \mathcal{N}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k^i \\ B_{\bar{k}}^i \end{pmatrix} = E_i \begin{pmatrix} A_k^i \\ B_{\bar{k}}^i \end{pmatrix} \quad (4.3.19)$$

и

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}^{(1)} & \Delta^{(1)} \\ \Delta^{(2)} & \mathcal{N}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{\bar{k}}^{\bar{i}} \\ A_{\bar{k}}^{\bar{i}} \end{pmatrix} = E^{\bar{i}} \begin{pmatrix} B_{\bar{k}}^{\bar{i}} \\ A_{\bar{k}}^{\bar{i}} \end{pmatrix}, \quad (4.3.20)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{kl}^{(1)} &= \delta_{kl}(\varepsilon_k - \lambda) - \Omega \langle k | \hat{J}_x | l \rangle_G + \frac{1}{4} G \sum_j B_{\bar{k}}^j B_{\bar{l}}^j + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{mn} \left(\sum_i B_{\bar{m}}^i B_{\bar{n}}^i \right) [\langle k\bar{m} | V_{np} | l\bar{n} \rangle_G - \\ &- \langle k\bar{m} | V_{np} | \bar{n}l \rangle_G + \langle l\bar{m} | V_{np} | k\bar{n} \rangle_G - \\ &- \langle l\bar{m} | V_{np} | \bar{n}k \rangle_G + \langle m\bar{k} | V_{np} | n\bar{l} \rangle_G - \langle m\bar{k} | V_{np} | \bar{l}n \rangle_G + \\ &+ \langle m\bar{l} | V_{np} | n\bar{k} \rangle_G - \langle m\bar{l} | V_{np} | \bar{k}n \rangle_G] + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{lm} \left(\sum_i B_{\bar{m}}^i B_{\bar{n}}^i \right) [\langle km | V_{np} | ln \rangle_G - \\ &- \langle km | V_{np} | nl \rangle_G + \langle lm | V_{np} | kn \rangle_G - \langle lm | V_{np} | nk \rangle_G + \\ &+ \langle mk | V_{np} | nl \rangle_G - \langle mk | V_{np} | ln \rangle_G + \\ &+ \langle ml | V_{np} | nk \rangle_G - \langle ml | V_{np} | kn \rangle_G]; \\ \mathcal{N}_{kl}^{(2)} &= -\delta_{kl}(\varepsilon_k - \lambda) - \Omega \langle k | \hat{J}_x | l \rangle - \frac{1}{4} G \sum_j B_{\bar{k}}^{\bar{j}} B_{\bar{l}}^{\bar{j}} - \\ &- \frac{1}{4} \sum_{mn} \left(\sum_i B_{\bar{m}}^i B_{\bar{n}}^i \right) [\langle km | V_{np} | ln \rangle_G - \\ &- \langle km | V_{np} | nl \rangle_G + \langle lm | V_{np} | kn \rangle_G - \\ &- \langle lm | V_{np} | nk \rangle_G + \langle mk | V_{np} | nl \rangle_G - \langle mk | V_{np} | ln \rangle_G + \\ &+ \langle ml | V_{np} | nk \rangle_G - \langle ml | V_{np} | kn \rangle_G] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \sum_{mn} \left(\sum_i B_m^{\bar{i}} B_n^{\bar{i}} \right) [\langle k\bar{m} | V_{np} | l\bar{n} \rangle_G - \\
& - \langle k\bar{m} | V_{np} | \bar{n}l \rangle_G + \langle l\bar{m} | V_{np} | k\bar{n} \rangle_G - \\
& - \langle l\bar{m} | V_{np} | \bar{n}k \rangle_G + \langle m\bar{k} | V_{np} | n\bar{l} \rangle_G - \langle m\bar{k} | V_{np} | \bar{l}n \rangle_G + \\
& + \langle m\bar{l} | V_{np} | n\bar{k} \rangle_G - \langle m\bar{l} | V_{np} | \bar{k}n \rangle_G]; \\
& \Delta_{kl}^{(1)} = -\frac{1}{4} G_\tau (\delta_{kl} \sum_{jm} B_{\bar{m}}^j A_m^j) - \\
& -\frac{1}{4} \sum_{mn} \left(\left(\sum_j B_{\bar{m}}^j A_n^j \right) (\langle k\bar{l} | V_{np} | n\bar{m} \rangle_G - \langle k\bar{l} | V_{np} | \bar{m}n \rangle_G + \right. \\
& + \langle n\bar{m} | V_{np} | k\bar{l} \rangle_G - \langle n\bar{m} | V_{np} | \bar{l}k \rangle_G + \\
& + \langle l\bar{k} | V_{np} | m\bar{n} \rangle_G - \langle l\bar{k} | V_{np} | \bar{n}m \rangle_G + \\
& \left. + \langle m\bar{n} | V_{np} | l\bar{k} \rangle_G - \langle m\bar{n} | V_{np} | \bar{k}l \rangle_G \right), \\
& \Delta_{kl}^{(2)} = \Delta_{lk}^{(1)}.
\end{aligned}$$

§4.3.2 Ядра с $\mathcal{A} \sim 70$

Ядра из массовых областей с $\mathcal{A} \sim 70$ являются переходными, в которых при малых значениях частоты вращения наблюдается сосуществование вытянутой и сплюснутой форм деформации (см. например, [151,152,178]). Такая смешанная конфигурация сосуществующих форм ответственна за сложность поведения в частности четно-четных ядер из рассматриваемой области. В рамках описанного формализма нами были решены уравнения (4.3.19),(4.3.20) при каждой частоте вращения, с шагом, равным 0.02 МэВ. Однако при вычислении матричных элементов нейтрон-протонных взаимодействий, учитываемых последним слагаемым гамильтониана (4.3.2), сталкиваемся с серьезной проблемой: количество состояний при учете всех оболочек ядра невообразимо велико, и вычисление всех двухчастичных матричных элементов

создает практические трудности даже при использовании современных компьютеров. В связи с этим мы ограничили базис состояниями из оболочек с $N=3,4$, вполне достаточных для рассматриваемых ядер. Константы в формулах (4.3.4), (4.3.5) перенормировали и положили равными единице при значении параметра $\alpha = 0.3$, как это принято в работе [176].

Из расчетов следует, что частота пересечения в нижней квазинейтронной полосе сдвинута в область больших частот ($\omega \sim 0.8$ МэВ) по сравнению со случаем отсутствия n - p взаимодействий. Это можно объяснить тем, что учет монополярного $\mathcal{T} = 0$ спаривания может увеличить энергетическую щель при низких частотах и тем самым привести к смещению частоты пересечения полос. В случае ядра ${}^{74}\text{Kr}$ учет нейтрон-протонных корреляций значительно усложняет поведение нижайших нейтронных и протонных состояний $[4\ 4\ 9/2\ 1/2]$, поэтому мы вынуждены были не рассматривать поведение этих состояний при больших частотах (при $\omega > 0.52$ МэВ). Для этой области характерно сосуществование форм со сплюсщенной и продолговатой деформациями вплоть до больших частот вращения, что сказывается на периодическом изменении параметра деформации β , и связано, по-видимому, с тем, что квазинейтронная пара дестабилизирует поляризационное действие на остров. В ядре ${}^{76}\text{Kr}$ для состояний с минимальными значениями проекции j (наиболее выстроенные состояния) n - p взаимодействия, по-видимому, играют менее существенную роль. Однако в поведении состояний $[3\ 3\ 5/2\ 5/2]$ они сказываются до значений $\omega \sim 0.54$ МэВ. Также следует отметить, что в данном ядре n - p взаимодействие сдвигает расстояние между нижайшими нейтронными и протонными уровнями (порядка 400-500 кэВ).

§4.3.3 Ядра с $A \sim 160$

В связи с огромным количеством состояний при учете всех оболочек ядер из данной области мы вынуждены были ограничить базис состояниями из $\pi h_{11/2}$ и $\nu i_{13/3}$ подоболочек соответственно для протонных и нейтронных систем. Параметры деформированного потенциала Нильссона взяты из [121], константы в формулах (4.3.4) и (4.3.5) мы перенормировали и положили равной единице в связи с отсутствием однозначных экспериментальных данных относительно констант нейтрон-протонных взаимодействий.

В целях изучения влияния нейтрон-протонного спаривания на поведение квазичастичных уровней в четно-четной и нечетно-нечетной системах мы рассматривали соответственно ядра ^{158}Er и ^{158}Tm редкоземельной области.

В этих ядрах нейтрон-протонное взаимодействие существенно (400 кэВ) сдвигает по энергии уровень $[NLjm]=[6\ 6\ 13/2\ 3/2]$ и с ростом частоты вращения он начинает сильно опускаться. Однако в отличие от случая отсутствия п-р взаимодействий, при котором суммарный спин каждой пары составляет $S = 0$, бэкбендинг происходит достаточно гладко и в общем, частота вращения ядра, при котором проявится бэкбендинг, смещена в более высокую область ($\omega \geq 0.25$) МэВ. Также можно заметить слабое расщепление нижайших уровней $[5\ 3\ 7/2\ 5/2]$ с разными сигнатурами (10-15 кэВ) при $\omega = 0$, и величина такого расщепления возрастает с ростом угловой частоты вращения ядра достаточно быстро по сравнению со случаем отсутствия п-р взаимодействий, несмотря на большое значение проекции его углового момента.

В случае нечетно-нечетной системы нейтрон-протонное взаимодействие также приводит к очень легкому сдвигу расстояний между нижайшими квазичастичными уровнями $[5\ 3\ 7/2\ 3/3]$ с разными сигнатурами. Сдвиг же между квазинейтрон-

ными и квазипротонными уровнями $[6\ 6\ 13/2\ 3/2]$ и $[5\ 3\ 7/2\ 3/2]$, как и в предыдущем случае большой, что свидетельствует о большом перекрытии их волновых функций. Для квазипротонного $[6\ 6\ 13/2\ 3/2]$ и квазинейтронного $[5\ 3\ 7/2\ 3/2]$ состояний n -р взаимодействия также сильно сказываются при $\omega > 0.3$ МэВ: частота пересечения уровней происходит при $\omega \sim 0.32 - 0.34$, что находится в определенном согласии с результатами работы авторов [179].

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ 4

ПРИЛОЖЕНИЕ П4.А ОСТАТОЧНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СВЯЗАННОМ СФЕРИЧЕСКОМ БАЗИСЕ

Определим остаточные взаимодействия V_{res} в связанном базисе (см. (4.1.1))

$$\begin{aligned}
 & |a\ j_a\ m_a ; b\ j_b\ m_b \rangle = \\
 & = \sum_{J=|j_a-j_b|}^{j_a+j_b} (j_a\ m_a\ j_b\ m_b | J\ m_a + m_b) |(j_a\ j_b)\ J\ M \rangle: \quad (\text{П4.А1}) \\
 & V_{res} = \frac{1}{4} \sum_{abcd} \langle ab | G | cd \rangle a_a^+ a_b^+ a_d a_c = \\
 & = \frac{1}{4} \sum_{\substack{j_a j_b j_c j_d \\ m_a m_b m_c m_d}} \langle j_a m_a ; j_b m_b | G | j_c m_c ; j_d m_d \rangle \times \\
 & \quad \times a_{j_a m_a}^+ a_{j_b m_b}^+ a_{j_d m_d} a_{j_c m_c} = \\
 & = \frac{1}{4} \sum_{j_a j_b j_c j_d} \sum_J \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \langle (j_a j_b)\ J || G || (j_c j_d)\ J \rangle \\
 & \quad \sum_{m_a m_b m_c m_d} (j_a m_a j_b m_b | J M) a_{j_a m_a}^+ a_{j_b m_b}^+ (j_c m_c j_d m_d | J M) a_{j_d m_d} a_{j_c m_c}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{j_a j_b j_c j_d} \sum_J G_J(j_a j_b j_c j_d) \sum_{M=-J}^J A_{JM}^+(j_a j_b) A_{JM}(j_c j_d) \quad (\text{П4.А2})$$

где $J = \max(|j_a - j_b|, |j_c - j_d|), \dots, \min(j_a + j_b, j_c + j_d)$, и

$$G_J(j_a j_b j_c j_d) = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \langle (j_a j_b) J || G || (j_c j_d) J \rangle. \quad (\text{П4.А3})$$

$$A_{JM}^+(j_a j_b) = \sum_{\substack{m_a m_b \\ M=m_a+m_b}} (j_a m_a j_b m_b | JM) a_{j_a m_a}^+ a_{j_b m_b}^+. \quad (\text{П4.А4})$$

Рассматривая также и изоспиновый формализм, (П4.А1) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} & |a j_a m_a \tau_a; b j_b m_b \tau_b \rangle = \\ &= \sum_{J=|j_a-j_b|}^{j_a+j_b} \sum_{\mathcal{T}=0,1} (j_a m_a j_b m_b | JM = m_a + m_b) \times \\ & \times \left(\frac{1}{2} \tau_a \frac{1}{2} \tau_b | \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} = \tau_a + \tau_b \right) | (j_a j_b) JM = m_a + m_b, \\ & \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} = \tau_a + \tau_b \rangle, \end{aligned} \quad (\text{П4.А5})$$

где \mathcal{T} – полный изоспин двух частиц, τ_a, τ_b – проекции изоспинов данных частиц. В таком базисе соотношение для V_{res} примет следующий вид:

$$\begin{aligned} V_{res} &= \frac{1}{4} \sum_{abcd} \langle ab | G | cd \rangle a_a^+ a_b^+ a_d a_c = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{j_a j_b j_c j_d \\ m_a m_b m_c m_d}} \sum_{\tau_a \tau_b \tau_c \tau_d} \langle j_a m_a \tau_a; j_b m_b \tau_b | G | j_c m_c \tau_c; j_d m_d \tau_d \rangle \times \\ & \quad \times a_{j_a m_a \tau_a}^+ a_{j_b m_b \tau_b}^+ a_{j_d m_d \tau_d} a_{j_c m_c \tau_c} = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j_a j_b j_c j_d} \sum_{J\mathcal{T}} \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{T}+1}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \langle (j_a j_b) J; \left(\frac{11}{22}\right) \mathcal{T} ||| G ||| (j_c j_d) J; \left(\frac{11}{22}\right) \mathcal{T} \rangle \times \\
& \times \sum_{m_a m_b m_c m_d} \sum_{\tau_a \tau_b \tau_c \tau_d} (j_a m_a j_b m_b | JM) \left(\frac{1}{2} \tau_a \frac{1}{2} \tau_b | \mathcal{T} M_{\mathcal{T}}\right) a_{j_a m_a \tau_a}^+ a_{j_b m_b \tau_b}^+ \\
& \times (j_c m_c j_d m_d | JM) \left(\frac{1}{2} \tau_c \frac{1}{2} \tau_d | \mathcal{T} M_{\mathcal{T}}\right) a_{j_c m_c \tau_c} a_{j_d m_d \tau_d} = \\
& = \sum_{j_a j_b j_c j_d} \sum_{J \mathcal{T}} G_{J \mathcal{T}}(j_a j_b j_c j_d) \sum_{M=-J}^J \\
& \times \sum_{M_{\mathcal{T}}=-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} A_{JM, \mathcal{T} M_{\mathcal{T}}}^+(j_a j_b) A_{JM, \mathcal{T} M_{\mathcal{T}}}(j_c j_d) \quad (\text{П4.А6})
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
& G_{J \mathcal{T}}(j_a j_b j_c j_d) = \\
& = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{T}+1}} \\
& \times \langle (j_a j_b) J; \left(\frac{11}{22}\right) \mathcal{T} ||| G ||| (j_c j_d) J; \left(\frac{11}{22}\right) \mathcal{T} \rangle \quad (\text{П4.А7})
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& A_{JM, \mathcal{T} M_{\mathcal{T}}}^+(j_a j_b) = \\
& = \sum_{m_a m_b} \sum_{\tau_a \tau_b} (j_a m_a j_b m_b | JM) \\
& \quad \quad \quad M=m_a+m_b \quad M_{\mathcal{T}}=\tau_a+\tau_b \\
& \times \left(\frac{1}{2} \tau_a \frac{1}{2} \tau_b | \mathcal{T} M_{\mathcal{T}}\right) a_{j_a m_a \tau_a}^+ a_{j_b m_b \tau_b}^+. \quad (\text{П4.А8})
\end{aligned}$$

Также имеем

$$\begin{aligned}
& |(j_a j_b) JM; \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} \rangle = A_{JM; \mathcal{T} M_{\mathcal{T}}}^+(j_a j_b) | \rangle = \\
& = \sum_{m_a m_b} \sum_{\tau_a \tau_b} (j_a m_a j_b m_b | JM) \\
& \quad \quad \quad M=m_a+m_b \quad M_{\mathcal{T}}=\tau_a+\tau_b \\
& \times \left(\frac{1}{2} \tau_a \frac{1}{2} \tau_b | \mathcal{T} M_{\mathcal{T}}\right) a_{j_a m_a \tau_a}^+ a_{j_b m_b \tau_b}^+ \quad (\text{П4.А9})
\end{aligned}$$

И

$$\begin{aligned}
 |(j_a j_b)JM; \mathcal{T} = 1 M_{\mathcal{T}} = 0 \rangle &= \sum_{\substack{m_a m_b \\ M=m_a+m_b}} (j_a m_a j_b m_b | JM) \times \\
 &\times \left[\left(\frac{111}{222} - \frac{1}{2} |00 \right) a_{j_a m_a; n}^+ a_{j_b m_b; p}^+ \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{1}{2} - \frac{111}{222} |00 \right) a_{j_a m_a; p}^+ a_{j_b m_b; n}^+ \right] = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{m_a m_b \\ M=m_a+m_b}} (j_a m_a j_b m_b | JM) \\
 &\times \left[a_{j_a m_a; n}^+ a_{j_b m_b; p}^+ - a_{j_a m_a; p}^+ a_{j_b m_b; n}^+ \right] | \rangle, \quad (\text{П4.A10a})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |(j_a j_b)JM; \mathcal{T}=1 M_{\mathcal{T}} = 0 \rangle &= \sum_{\substack{m_a m_b \\ M=m_a+m_b}} (j_a m_a j_b m_b | JM) \times \\
 &\times \left[\left(\frac{111}{222} - \frac{1}{2} |10 \right) a_{j_a m_a; n}^+ a_{j_b m_b; p}^+ + \left(\frac{1}{2} - \frac{111}{222} |10 \right) a_{j_a m_a; p}^+ a_{j_b m_b; n}^+ \right] = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{m_a m_b \\ M=m_a+m_b}} (j_a m_a j_b m_b | JM) \\
 &\times \left[a_{j_a m_a; n}^+ a_{j_b m_b; p}^+ + a_{j_a m_a; p}^+ a_{j_b m_b; n}^+ \right] | \rangle, \quad (\text{П4.A10b})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &|(j_a j_b)JM; \mathcal{T} = 1 M_{\mathcal{T}} = 1 \rangle = \\
 &= \sum_{\substack{m_a m_b \\ M=m_a+m_b}} (j_a m_a j_b m_b | JM), \left(\frac{1111}{2222} |11 \right) a_{j_a m_a; n}^+ a_{j_b m_b; n}^+ = \\
 &= \sum_{\substack{m_a m_b \\ M=m_a+m_b}} (j_a m_a j_b m_b | JM) a_{j_a m_a; n}^+ a_{j_b m_b; n}^+ | \rangle, \quad (\text{П4.A10c})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &|(j_a j_b)JM; \mathcal{T} = M_{\mathcal{T}} = -1 \rangle = \\
 &= \sum_{\substack{m_a m_b \\ M=m_a+m_b}} (j_a m_a j_b m_b | JM) \left(\frac{1}{2} - \frac{11}{22} - \frac{1}{2} |1-1 \right) a_{j_a m_a; n}^+ a_{j_b m_b; n}^+
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{m_a m_b \\ M=m_a+m_b}} (j_a m_a j_b m_b | JM) a_{j_a m_a; p}^+ a_{j_b m_b; p}^+ | \rangle. \quad (\text{П4.A10d})$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned} & \langle (j_a j_b) JM; \mathcal{T} = M_{\mathcal{T}} = 0 | V_{res} | (j_c j_d) JM; T = M_T = 0 \rangle = \\ & = \frac{1}{2} \left[\langle (j_a^{(n)} j_b^{(p)}) JM | - \langle (j_a^{(p)} j_b^{(n)}) JM | \right] \\ & \times G \left[| (j_c^{(n)} j_d^{(p)}) JM \rangle - | (j_c^{(p)} j_d^{(n)}) JM \rangle \right] = \\ & = \frac{1}{2} \left[\langle (j_a^{(n)} j_b^{(p)}) JM | G | (j_c^{(n)} j_d^{(p)}) JM \rangle \right. \\ & \quad + \langle (j_a^{(p)} j_b^{(n)}) JM | G | (j_c^{(p)} j_d^{(n)}) JM \rangle \\ & \quad - \langle (j_a^{(n)} j_b^{(p)}) JM | G | (j_c^{(p)} j_d^{(n)}) JM \rangle \\ & \quad \left. - \langle (j_a^{(p)} j_b^{(n)}) JM | G | (j_c^{(n)} j_d^{(p)}) JM \rangle \right]; \quad (\text{П4.A11a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle (j_a j_b) JM; \mathcal{T} = 1 M_{\mathcal{T}} = 0 | V_{res} | (j_c j_d) JM; \mathcal{T} = 1 M_{\mathcal{T}} = 0 \rangle = \\ & = \frac{1}{2} \left[\langle (j_a^{(n)} j_b^{(p)}) JM | \right. \\ & \left. + \langle (j_a^{(p)} j_b^{(n)}) JM | \right] G \left[| (j_c^{(n)} j_d^{(p)}) JM \rangle + | (j_c^{(p)} j_d^{(n)}) JM \rangle \right] = \\ & = \frac{1}{2} \left[\langle (j_a^{(n)} j_b^{(p)}) JM | G | (j_c^{(n)} j_d^{(p)}) JM \rangle \right. \\ & \quad + \langle (j_a^{(p)} j_b^{(n)}) JM | G | (j_c^{(p)} j_d^{(n)}) JM \rangle + \\ & \quad + \langle (j_a^{(n)} j_b^{(p)}) JM | G | (j_c^{(p)} j_d^{(n)}) JM \rangle + \\ & \quad \left. + \langle (j_a^{(p)} j_b^{(n)}) JM | G | (j_c^{(n)} j_d^{(p)}) JM \rangle \right]; \quad (\text{П4.A11b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle (j_a j_b) JM; \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} | V_{res} | (j_c j_d) JM; \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} \rangle = \\ & = \langle (j_a^{(n)} j_b^{(n)}) JM | G | (j_c^{(n)} j_d^{(n)}) JM \rangle; \quad (\text{П4.A11c}) \\ & \langle (j_a j_b) JM; \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} | V_{res} | (j_c j_d) JM; \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} \rangle = \end{aligned}$$

$$= \langle (j_a^{(p)} j_b^{(p)}) JM | G | (j_c^{(p)} j_d^{(p)}) JM \rangle. \quad (\text{П4.А11d})$$

Предполагаем, что потенциал V_{res} является зарядово независимым:

$$\hat{O}_\tau^{-1} V_{res} \hat{O}_\tau = V_{res} \quad (\text{П4.А12})$$

где \hat{O}_τ -зарядовообменный оператор:

$$\hat{O}_\tau |(j_c^{(n)} j_d^{(p)}) JM \rangle = |(j_c^{(p)} j_d^{(n)}) JM \rangle. \quad (\text{П4.А13})$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \langle (j_a^{(p)} j_b^{(n)}) JM | G | (j_c^{(p)} j_d^{(n)}) JM \rangle = \\ & = \langle (j_a^{(n)} j_b^{(p)}) JM | G | (j_c^{(n)} j_d^{(p)}) JM \rangle; \\ & \langle (j_a^{(p)} j_b^{(n)}) JM | G | (j_c^{(n)} j_d^{(p)}) JM \rangle = \\ & = \langle (j_a^{(n)} j_b^{(p)}) JM | G | (j_c^{(p)} j_d^{(n)}) JM \rangle. \end{aligned} \quad (\text{П4.А14})$$

Следовательно, (П4.А11) может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned} & G_{J\mathcal{T}M_{\mathcal{T}}}(j_a j_b j_c j_d) \equiv \\ & \equiv \langle (j_a j_b) JM; \mathcal{T} = M_{\mathcal{T}} | V_{res} | (j_c j_d) JM; \mathcal{T} = M_{\mathcal{T}} \rangle = \\ & = \langle (j_a^{(n)} j_b^{(p)}) JM | V_{res} | (j_c^{(n)} j_d^{(p)}) JM \rangle - \\ & - \langle (j_a^{(n)} j_b^{(p)}) JM | V_{res} | (j_c^{(p)} j_d^{(n)}) JM \rangle, \end{aligned} \quad (\text{П4.А15a})$$

$$\begin{aligned} & G_{J\mathcal{T}M_{\mathcal{T}}}(j_a j_b j_c j_d) \equiv \\ & \equiv \langle (j_a j_b) JM; \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} | V_{res} | (j_c j_d) JM; \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} \rangle = \\ & = \langle (j_a^{(n)} j_b^{(p)}) JM | V_{res} | (j_c^{(n)} j_d^{(p)}) JM \rangle \\ & + \langle (j_a^{(n)} j_b^{(p)}) JM | V_{res} | (j_c^{(p)} j_d^{(n)}) JM \rangle, \end{aligned} \quad (\text{П4.А15b})$$

$$\begin{aligned} & G_{J\mathcal{T}M_{\mathcal{T}}=1}(j_a j_b j_c j_d) \equiv \\ & \equiv \langle (j_a j_b) JM; \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} | V_{res} | (j_c j_d) JM; \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} \rangle = \\ & = \langle (j_a^{(n)} j_b^{(n)}) JM | V_{res} | (j_c^{(n)} j_d^{(n)}) JM \rangle, \end{aligned} \quad (\text{П4.А15c})$$

$$G_{J\mathcal{T}M_{\mathcal{T}}}(j_a j_b j_c j_d) \equiv$$

$$\begin{aligned} &\equiv \langle (j_a j_b) JM; \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} | V_{res} | (j_c j_d) JM; \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} \rangle = \\ &= \langle (j_a^{(p)} j_b^{(p)}) JM | V_{res} | (j_c^{(p)} j_d^{(p)}) JM \rangle, \quad (\text{П4.А15d}) \end{aligned}$$

или наоборот (используя свойство зарядовой независимости V_{res}):

$$\begin{aligned} &\langle (j_a^{(p)} j_b^{(p)}) JM | V_{res} | (j_c^{(p)} j_d^{(p)}) JM \rangle = \\ &= \langle (j_a^{(n)} j_b^{(n)}) JM | V_{res} | (j_c^{(n)} j_d^{(n)}) JM \rangle = \\ &= G_{J\mathcal{T}=1 M_{\mathcal{T}}=\pm 1}(j_a j_b j_c j_d), \quad (\text{П4.А16a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\langle (j_a^{(n)} j_b^{(p)}) JM | V_{res} | (j_c^{(n)} j_d^{(p)}) JM \rangle = \\ &= \langle (j_a^{(p)} j_b^{(n)}) JM | V_{res} | (j_c^{(p)} j_d^{(n)}) JM \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left[G_{J\mathcal{T}=1 M_{\mathcal{T}}=0}(j_a j_b j_c j_d) + G_{J\mathcal{T}=0 M_{\mathcal{T}}=0}(j_a j_b j_c j_d) \right], \quad (\text{П4.А16b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\langle (j_a^{(n)} j_b^{(p)}) JM | V_{res} | (j_c^{(p)} j_d^{(n)}) JM \rangle = \\ &= \langle (j_a^{(p)} j_b^{(n)}) JM | V_{res} | (j_c^{(n)} j_d^{(p)}) JM \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left[G_{J\mathcal{T}=1 M_{\mathcal{T}}=0}(j_a j_b j_c j_d) - G_{J\mathcal{T}=0 M_{\mathcal{T}}=0}(j_a j_b j_c j_d) \right]. \quad (\text{П4.А16c}) \end{aligned}$$

Состояние (П4.А9) имеет следующую симметрию:

$$\begin{aligned} &|(j_b j_a) JM; \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} \rangle = \\ &= \sum_{\substack{m_a m_b \\ M=m_a+m_b}} \sum_{\substack{\tau_a \tau_b \\ M_{\mathcal{T}}=\tau_a+\tau_b}} (j_b m_b j_a m_a | JM) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2} \tau_b \frac{1}{2} \tau_a | \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} \right) a_{j_b m_b \tau_b}^+ a_{j_a m_a \tau_a}^+ | \rangle = \\ &= \sum_{\substack{m_a m_b \\ M=m_a+m_b}} \sum_{\substack{\tau_a \tau_b \\ M_{\mathcal{T}}=\tau_a+\tau_b}} (-1)^{j_a+j_b-J+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\mathcal{T}+1} (j_a m_a j_b m_b | JM) \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2} \tau_a \frac{1}{2} \tau_b | \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} \right) a_{j_a m_a \tau_a}^+ a_{j_b m_b \tau_b}^+ | \rangle = \\ &= (-1)^{j_a+j_b+J+\mathcal{T}} |(j_a j_b) JM; \mathcal{T} M_{\mathcal{T}} \rangle, \quad (\text{П4.А17}) \end{aligned}$$

Поэтому из (П4.А17) следует, что:

$$\begin{aligned}
 G_{J\mathcal{T}M_{\mathcal{T}}}(j_b j_a j_c j_d) &= \\
 &= (-1)^{j_a + j_b + J + \mathcal{T}} G_{J\mathcal{T}M_{\mathcal{T}}}(j_a j_b j_c j_d) = \\
 &= (-1)^{j_c + j_d + J + \mathcal{T}} G_{J\mathcal{T}M_{\mathcal{T}}}(j_b j_a j_d j_c) = \\
 &= (V_{res}^+ = V_{res}) = G_{J\mathcal{T}M_{\mathcal{T}}}(j_c j_d j_b j_a). \tag{П4.А18}
 \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ П4.В

СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ ДВУХЧАСТИЧНЫЕ МУЛЬТИПОЛЬ-МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

П4.В1 - двухчастичные матричные элементы сепарабельных взаимодействий.

Как обычно, будем исходить из гамильтониана, представленного в виде суммы гамильтонианов среднего поля и остаточных взаимодействий (предполагая при этом инвариантность полного гамильтониана относительно операции отражения времени):

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \sum_{i\tau_i} e_{i\tau_i} \sum_{\sigma_i = \pm} a_{i\sigma_i\tau_i}^+ a_{i\sigma_i\tau_i} + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{abcd} \sum_{\substack{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d \\ \tau_a\tau_b\tau_c\tau_d}} \langle a\sigma_a\tau_a, b\sigma_b\tau_b | V_{res} | c\sigma_c\tau_c, d\sigma_d\tau_d \rangle \times \\
 &\times a_{a\sigma_a\tau_a}^+ a_{b\sigma_b\tau_b}^+ a_{d\sigma_d\tau_d} a_{c\sigma_c\tau_c} \tag{П4.В1}
 \end{aligned}$$

где $a_{i\sigma_i\tau_i}^+$ - оператор рождения нуклона ($\tau_i = n$ - нейтрон, $\tau_i = p$ - протон) в одночастичном состоянии $|i\tau_i\rangle$, а индекс σ_i связан с операцией отражения времени:

$$\hat{T}^{-1} a_{i,\sigma_i=+,\tau_i}^+ \hat{T} = a_{i,\sigma_i=-,\tau_i}^+; \quad \hat{T}^{-1} a_{i,\sigma_i=-,\tau_i}^+ \hat{T} = -a_{i,\sigma_i=+,\tau_i}^+ \tag{П4.В2}$$

Обычно одночастичные состояния в деформированном базисе представляются в виде разложения по состояниям сферического базиса $|NljK\rangle$. Следовательно, для этих матричных элементов $\langle a\sigma_a\tau_a, b\sigma_b\tau_b|V_{res}|c\sigma_c\tau_c, d\sigma_d\tau_d\rangle$ можем записать разложение $\langle N_a l_a j_a K_a \tau_a, N_b l_b j_b K_b \tau_b|V_{res}|N_c l_c j_c K_c \tau_c, N_d l_d j_d K_d \tau_d\rangle$ в сферическом базисе

$$G_{JTM_T}(N_a j_a \tau_a, N_b j_b \tau_b, N_c j_c \tau_c, N_d j_d \tau_d).$$

Выберем остаточные взаимодействия в сепарабельной форме, включающей монопольное спаривание, монополь-монопольное, квадруполь-квадрупольное, диполь-дипольное, изоскаляр диполь-изоскаляр дипольное и октуполь-октупольное взаимодействия:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{i\tau_i} e_{i\tau_i} \sum_{\sigma_i=\pm} a_{i\sigma_i\tau_i}^+ a_{i\sigma_i\tau_i} - \sum_{\tau=prot,neut} G_\tau \hat{P}_\tau^+ \hat{P}_\tau - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{T}=0,1} \kappa_{20}[\mathcal{T}] M_{200}^{\prime\prime+}[\mathcal{T}] M_{200}^{\prime\prime}[\mathcal{T}] - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{T}=0,1} \kappa_{22}[\mathcal{T}] \sum_{\mu=-2}^2 M_{22\mu}^{\prime\prime+}[\mathcal{T}] M_{22\mu}^{\prime\prime}[\mathcal{T}] - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{T}=0,1} \kappa_{11}[\mathcal{T}] \sum_{\mu=-1}^1 M_{11\mu}^{\prime\prime+}[\mathcal{T}] M_{11\mu}^{\prime\prime}[\mathcal{T}] - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{T}=0,1} \kappa_{31}[\mathcal{T}] \sum_{\mu=-1}^1 M_{31\mu}^{\prime\prime+}[\mathcal{T}] M_{31\mu}^{\prime\prime}[\mathcal{T}] - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{T}=0,1} \kappa_{33}[\mathcal{T}] \sum_{\mu=-3}^3 M_{33\mu}^{\prime\prime+}[\mathcal{T}] M_{33\mu}^{\prime\prime}[\mathcal{T}] \quad (\text{П4.В3}) \end{aligned}$$

где

$$M_{l\lambda\mu}^{\prime\prime}[\mathcal{T}=0] = M_{l\lambda\mu}^{\prime\prime}[n] + M_{l\lambda\mu}^{\prime\prime}[p],$$

$$M''_{i\lambda\mu}[\mathcal{T} = 1] = M''_{i\lambda\mu}[n] - M''_{i\lambda\mu}[p] - \quad (\text{П4.В4})$$

«дважды масштабированные» изоскалярное и изовекторное мультипольные операторы,

$$M''_{i\lambda\mu}[\tau] = \sum_{\substack{i\sigma_i \\ j\sigma_j}} \langle i\sigma_i\tau | r''^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{r}'') | j\sigma_j\tau \rangle a_{i\sigma_i\tau}^+ a_{j\sigma_j\tau}, \quad (\text{П4.В5})$$

а

$$\hat{P}_\tau^+ = \sum_i a_{i,\sigma_i=+,\tau}^+ a_{i,\sigma_i=-,\tau} - \quad (\text{П4.В6})$$

оператор спаривания.

Вместо изоскалярных и изовекторных одночастичных операторов можно использовать в (П4.В3) нейтронные и протонные. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{i\tau_i} e_{i\tau_i} \sum_{\sigma_i=\pm} a_{i\sigma_i\tau_i}^+ a_{i\sigma_i\tau_i} - \sum_{\tau=prot,neut} G_\tau \hat{P}_\tau^+ \hat{P}_\tau \\ & - \frac{1}{2} \kappa_{20} \left[M''_{200}(n) M''_{200}(n) + M''_{200}(p) M''_{200}(p) \right] \\ & - \frac{1}{2} \kappa_{20}[np] \left[M''_{200}(p) M''_{200}(n) + M''_{200}(n) M''_{200}(p) \right] \\ & - \frac{1}{2} \kappa_{22} \sum_{\mu=-2}^2 \left[M''_{22\mu}(n) M''_{22\mu}(n) + M''_{22\mu}(p) M''_{22\mu}(p) \right] \\ & - \frac{1}{2} \kappa_{11}[np] \sum_{\mu=-1}^1 \left[M''_{11\mu}(p) M''_{11\mu}(n) + M''_{11\mu}(n) M''_{11\mu}(p) \right] \\ & - \frac{1}{2} \kappa_{11} \sum_{\mu=-1}^1 \left[M''_{11\mu}(n) M''_{11\mu}(n) + M''_{11\mu}(p) M''_{11\mu}(p) \right] \\ & - \frac{1}{2} \kappa_{11}[np] \sum_{\mu=-1}^1 \left[M''_{11\mu}(p) M''_{11\mu}(n) + M''_{11\mu}(n) M''_{11\mu}(p) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \kappa_{31} \sum_{\mu=-1}^1 \left[M_{31\mu}''+(n) M_{31\mu}''(n) + M_{31\mu}''+(p) M_{31\mu}''(p) \right] \\
& -\frac{1}{2} \kappa_{31}[np] \sum_{\mu=-1}^1 \left[M_{31\mu}''+(p) M_{31\mu}''(n) + M_{31\mu}''+(n) M_{31\mu}''(p) \right] \\
& -\frac{1}{2} \kappa_{33} \sum_{\mu=-3}^3 \left[M_{33\mu}''+(n) M_{33\mu}''(n) + M_{33\mu}''+(p) M_{33\mu}''(p) \right] \\
& -\frac{1}{2} \kappa_{33}[np] \sum_{\mu=-3}^3 \left[M_{33\mu}''+(p) M_{33\mu}''(n) \right. \\
& \quad \left. + M_{33\mu}''+(n) M_{33\mu}''(p) \right], \tag{П4.В7}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\kappa_{l\lambda} &= \kappa_{l\lambda}[nn] = \kappa_{l\lambda}[pp] = \kappa_{l\lambda}[0] + \kappa_{l\lambda}[1], \\
\kappa_{l\lambda}[np] &= \kappa_{l\lambda}[0] - \kappa_{l\lambda}[1].
\end{aligned}$$

Если среднее поле исследуемых ядер обладает R -симметрией, то удобно работать в сигнатурном базисе Гудмана, который удовлетворяет следующим соотношениям симметрии:

$$\hat{R}_1^{-1} a_i^+ \hat{R}_1 = -i a_i^+, \quad \hat{R}_1^{-1} a_{\bar{i}}^+ \hat{R}_1 = i a_{\bar{i}}^+, \tag{П4.В8}$$

где \hat{R}_1 – оператор ращения на угол π вокруг первой оси. Теперь следующим шагом, введем симметризованные мультипольные операторы ($\mu \geq 0$, $r = \pm 1$):

$$M_{l\lambda\mu}[r] = \frac{i^{\lambda+\mu+\frac{r+3}{2}}}{\sqrt{2(1+\delta_{\mu 0})}} \left(M_{l\lambda\mu} + (-1)^{\lambda+\frac{r+3}{2}} M_{l\lambda-\mu} \right) \tag{П4.В9}$$

удовлетворяющие условиям симметрии (см. также приложение П3А):

$$\begin{aligned}
\hat{R}_1^{-1} M_{l\lambda\mu}[r] \hat{R}_1 &= r M_{l\lambda\mu}[r]; & \hat{T}^{-1} M_{l\lambda\mu}[r] \hat{T} &= M_{l\lambda\mu}[r]; \\
M_{l\lambda\mu}^+[r] &= M_{l\lambda\mu}[r]; \\
\langle i | M_{l\lambda\mu}[r] | j \rangle^* &= (-1)^{\mu+\frac{r+3}{2}} \langle i | M_{l\lambda\mu}[r] | j \rangle. \tag{П4.В10}
\end{aligned}$$

Основным преимуществом использования базиса Гудмана и симметризованных мультипольных операторов является простота выражений

$$\begin{aligned}
 & M_{l\lambda\mu}[r = +1] = \\
 & = \sum_{kl} \langle k | M_{l\lambda\mu}[r = +1] | l \rangle \left(a_k^+ a_l + (-1)^\mu a_{\bar{k}}^+ a_{\bar{l}} \right) \\
 & M_{l\lambda\mu}[r = -1] = \\
 & = \sum_{kl} \langle k | M_{l\lambda\mu}[r = -1] | \bar{l} \rangle \left(a_k^+ a_{\bar{l}} + (-1)^\mu a_{\bar{k}}^+ a_l \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, сепарабельные остаточные взаимодействия теперь можем записать в виде суммы четырех слагаемых, с учетом четности π и сигнатуры r :

$$\hat{H} = \sum_{i\tau_i} e_{i\tau_i} \sum_{\sigma_i=\pm} a_{i\sigma_i\tau_i}^+ a_{i\sigma_i\tau_i} + \sum_{\pi=\pm 1} \sum_{r=\pm 1} V \left[\begin{matrix} r \\ \pi \end{matrix} \right], \quad (\text{П4.В11})$$

где

$$\begin{aligned}
 V \left[\begin{matrix} r=+1 \\ \pi=+1 \end{matrix} \right] & = \sum_{\tau=\substack{neut \\ prot}} G_\tau \hat{P}_\tau^+ \hat{P}_\tau \\
 & - \frac{1}{2} \kappa_{20} \left[\left(M_{200}''^{(n)}[+] \right)^2 + \left(M_{200}''^{(p)}[+] \right)^2 \right] \\
 & - \frac{1}{2} \kappa_{20} [np] \left[M_{200}''^{(p)}[+] M_{200}''^{(n)}[+] + M_{200}''^{(n)}[+] M_{200}''^{(p)}[+] \right] \\
 & - \frac{1}{2} \kappa_{22} \sum_{\mu=0}^2 \left[\left(M_{22\mu}''^{(n)}[+] \right)^2 + \left(M_{22\mu}''^{(p)}[+] \right)^2 \right] \\
 & - \frac{1}{2} \kappa_{22} [np] \sum_{\mu=0}^2 \left[M_{22\mu}''^{(p)}[+] M_{22\mu}''^{(n)}[+] + M_{22\mu}''^{(n)}[+] M_{22\mu}''^{(p)}[+] \right] \\
 V \left[\begin{matrix} r=-1 \\ \pi=+1 \end{matrix} \right] & = - \frac{1}{2} \kappa_{22} \sum_{\mu=1}^2 \left[\left(M_{22\mu}''^{(n)}[-] \right)^2 + \left(M_{22\mu}''^{(p)}[-] \right)^2 \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \kappa_{22} [np] \sum_{\mu=1}^2 \left[M_{22\mu}''^{(p)}[-] M_{22\mu}''^{(n)}[-] + M_{22\mu}''^{(n)}[-] M_{22\mu}''^{(p)}[-] \right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{\left[\begin{smallmatrix} r=\pm 1 \\ \pi=-1 \end{smallmatrix}\right]} &= \frac{1}{2} \delta_{r,-1} \sum_{l\lambda=11,31,33} \kappa_{l\lambda} \left[\left(M_{l\lambda 0}^{(n)}[r] \right)^2 + \left(M_{l\lambda 0}^{(p)}[r] \right)^2 \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \delta_{r,-1} \sum_{l\lambda=11,31,33} \kappa_{l\lambda}[np] \left[M_{l\lambda 0}^{(p)}[r] M_{l\lambda 0}^{(n)}[r] + \right. \\
 &\quad \quad \left. + M_{l\lambda 0}^{(n)}[r] M_{l\lambda 0}^{(p)}[r] \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{l\lambda=11,31,33} \kappa_{l\lambda} \sum_{\mu=1}^{\lambda} \left[\left(M_{l\lambda\mu}^{(n)}[r] \right)^2 + \left(M_{l\lambda\mu}^{(p)}[r] \right)^2 \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{l\lambda=11,31,33} \kappa_{l\lambda}[np] \sum_{\mu=1}^{\lambda} \left[M_{l\lambda\mu}^{(p)}[r] M_{l\lambda\mu}^{(n)}[r] + \right. \\
 &\quad \quad \left. + M_{l\lambda\mu}^{(n)}[r] M_{l\lambda\mu}^{(p)}[r] \right].
 \end{aligned}$$

Теперь вычислим матричные элементы

$$\langle a\sigma_a\tau_a, b\sigma_b\tau_b | V_{\left[\begin{smallmatrix} r \\ \pi \end{smallmatrix}\right]} | c\sigma_c\tau_c, d\sigma_d\tau_d \rangle$$

и определим выражение:

$$\begin{aligned}
& \langle a\sigma_a\tau_a, b\sigma_b\tau_b | G_{[r']}^{(\tau')} G_{[r]}^{(\tau)} | c\sigma_c\tau_c, d\sigma_d\tau_d \rangle = (\rightarrow (\text{П4.В4})) = \\
& = \sum_{\substack{i\sigma_i \\ j\sigma_j}} \sum_{\substack{k\sigma_k \\ l\sigma_l}} \langle j\sigma_j\tau' | G_{[r']}^{(\tau')} | i\sigma_i\tau' \rangle \langle k\sigma_k\tau | G_{[r]}^{(\tau)} | l\sigma_l\tau \rangle \times \\
& \times \langle a\sigma_a\tau_a, b\sigma_b\tau_b | a_{j\sigma_j\tau'}^+ a_{i\sigma_i\tau'} a_{k\sigma_k\tau}^+ a_{l\sigma_l\tau} | c\sigma_c\tau_c, d\sigma_d\tau_d \rangle = \\
& = \sum_{i\sigma_i} \langle a\sigma_a\tau' | G_{[r']}^{(\tau')} | i\sigma_i\tau' \rangle \langle i\sigma_i\tau' | G_{[r']}^{(\tau')} | c\sigma_c\tau' \rangle \times \\
& \quad \times \delta_{b\sigma_b\tau_b, d\sigma_d\tau_d} \delta_{\tau\tau'} \delta_{\sigma_a\cdot\sigma_i, r'} \delta_{\sigma_c\cdot\sigma_i, r} \\
& - \sum_{i\sigma_i} \langle a\sigma_a\tau' | G_{[r']}^{(\tau')} | i\sigma_i\tau' \rangle \langle i\sigma_i\tau' | G_{[r']}^{(\tau')} | d\sigma_d\tau' \rangle \times \\
& \quad \times \delta_{b\sigma_b\tau_b, c\sigma_c\tau_c} \delta_{\tau\tau'} \delta_{\sigma_a\cdot\sigma_i, r'} \delta_{\sigma_d\cdot\sigma_i, r} \\
& - \sum_{i\sigma_i} \langle b\sigma_b\tau' | G_{[r']}^{(\tau')} | i\sigma_i\tau' \rangle \langle i\sigma_i\tau' | G_{[r']}^{(\tau')} | c\sigma_c\tau' \rangle \times \\
& \quad \times \delta_{a\sigma_a\tau_a, d\sigma_d\tau_d} \delta_{\tau\tau'} \delta_{\sigma_b\cdot\sigma_i, r'} \delta_{\sigma_c\cdot\sigma_i, r} \\
& + \sum_{i\sigma_i} \langle b\sigma_b\tau' | G_{[r']}^{(\tau')} | i\sigma_i\tau' \rangle \langle i\sigma_i\tau' | G_{[r']}^{(\tau')} | d\sigma_d\tau' \rangle \times \\
& \quad \times \delta_{a\sigma_a\tau_a, c\sigma_c\tau_c} \delta_{\tau\tau'} \delta_{\sigma_b\cdot\sigma_i, r'} \delta_{\sigma_d\cdot\sigma_i, r} \\
& - \langle a\sigma_a\tau' | G_{[r']}^{(\tau')} | d\sigma_d\tau' \rangle \langle b\sigma_b\tau | G_{[r]}^{(\tau)} | c\sigma_c\tau \rangle \times \\
& \quad \times \delta_{\tau_a\tau'} \delta_{\tau_b\tau} \delta_{\tau_c\tau'} \delta_{\tau_d\tau'} \delta_{\sigma_a\cdot\sigma_d, r'} \delta_{\sigma_c\cdot\sigma_b, r} \\
& + \langle a\sigma_a\tau' | G_{[r']}^{(\tau')} | c\sigma_c\tau' \rangle \langle b\sigma_b\tau | G_{[r]}^{(\tau)} | d\sigma_d\tau \rangle \times \\
& \quad \times \delta_{\tau_a\tau'} \delta_{\tau_b\tau} \delta_{\tau_c\tau'} \delta_{\tau_d\tau} \delta_{\sigma_a\cdot\sigma_c, r'} \delta_{\sigma_b\cdot\sigma_d, r} \\
& + \langle b\sigma_b\tau' | G_{[r']}^{(\tau')} | d\sigma_d\tau' \rangle \langle a\sigma_a\tau | G_{[r]}^{(\tau)} | c\sigma_c\tau \rangle \times \\
& \quad \times \delta_{\tau_a\tau} \delta_{\tau_b\tau'} \delta_{\tau_c\tau} \delta_{\tau_d\tau'} \delta_{\sigma_b\cdot\sigma_d, r'} \delta_{\sigma_a\cdot\sigma_c, r} \\
& - \langle b\sigma_b\tau' | G_{[r']}^{(\tau')} | c\sigma_c\tau' \rangle \langle a\sigma_a\tau | G_{[r]}^{(\tau)} | d\sigma_d\tau \rangle \times \\
& \quad \times \delta_{\tau_a\tau} \delta_{\tau_b\tau'} \delta_{\tau_c\tau'} \delta_{\tau_d\tau} \delta_{\sigma_b\cdot\sigma_c, r'} \delta_{\sigma_a\cdot\sigma_d, r}, \\
& \hspace{15em} (\text{П4.В12})
\end{aligned}$$

где $G_{[r]}^{(\tau)}$ – одночастичный оператор с сигнатурой r соответственно нейтронной ($\tau = n$) или протонной ($\tau = p$) систем.

Для слагаемого, соответствующего спариванию, имеем:

$$\begin{aligned}
 & \langle a\sigma_a\tau_a, b\sigma_b\tau_b | \hat{P}_\tau^+ \hat{P}_\tau | c\sigma_c\tau_c, d\sigma_d\tau_d \rangle = \\
 & = \sum_{ik} \langle a\sigma_a\tau_a, b\sigma_b\tau_b | a_{i,+,\tau}^+ a_{i,-,\tau}^+ a_{k,-,\tau} a_{k,+,\tau} | c\sigma_c\tau_c, d\sigma_d\tau_d \rangle = \\
 & = \delta_{a\tau_a, b\tau_b} \delta_{\sigma_a,+} \delta_{\sigma_b,-} \delta_{c\sigma_c, d\sigma_d} \delta_{\sigma_c,+} \delta_{\sigma_d,-} - \\
 & - \delta_{a\tau_a, b\tau_b} \delta_{\sigma_a,+} \delta_{\sigma_b,-} \delta_{c\sigma_c, d\sigma_d} \delta_{\sigma_c,-} \delta_{\sigma_d,+} - \\
 & - \delta_{a\tau_a, b\tau_b} \delta_{\sigma_a,-} \delta_{\sigma_b,+} \delta_{c\sigma_c, d\sigma_d} \delta_{\sigma_c,+} \delta_{\sigma_d,-} + \\
 & + \delta_{a\tau_a, b\tau_b} \delta_{\sigma_a,-} \delta_{\sigma_b,+} \delta_{c\sigma_c, d\sigma_d} \delta_{\sigma_c,-} \delta_{\sigma_d,+}. \quad (\text{П4.В13})
 \end{aligned}$$

Таким образом, двухчастичные матричные элементы остаточных взаимодействий гамильтониана (П4.В8) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & \langle a\sigma_a\tau_a, b\sigma_b\tau_b | V_{[\pi=+]}^{[r=+]} | c\sigma_c\tau_c, d\sigma_d\tau_d \rangle = \\
 & = \sum_{\tau=\substack{neut \\ prot}} G_\tau \delta_{\tau_a,\tau} \delta_{\tau_b,\tau} \delta_{\tau_c,\tau} \delta_{\tau_d,\tau} \delta_{a,b} \delta_{c,d} [\delta_{\sigma_a,+} \delta_{\sigma_b,-} \delta_{\sigma_c,+} \delta_{\sigma_d,-} - \\
 & - \delta_{\sigma_a,+} \delta_{\sigma_b,-} \delta_{\sigma_c,-} \delta_{\sigma_d,+} - \delta_{\sigma_a,-} \delta_{\sigma_b,+} \delta_{\sigma_c,+} \delta_{\sigma_d,-} - \\
 & + \delta_{\sigma_a,-} \delta_{\sigma_b,+} \delta_{\sigma_c,-} \delta_{\sigma_d,+} \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{\tau, \tau'=\substack{neut \\ prot}} \sum_{l\lambda=00,22} \kappa_{l\lambda}[\tau, \tau'] \sum_{\mu=0}^{\lambda} \\
 & \left[\langle a\sigma_a\tau' | M_{l\lambda\mu}^{''(\tau')} [+] | c\sigma_c\tau' \rangle \langle b\sigma_b\tau | M_{l\lambda\mu}^{''(\tau)} [+] | d\sigma_d\tau \rangle \times \right. \\
 & \quad \times \delta_{\tau_a,\tau'} \delta_{\tau_b,\tau} \delta_{\tau_c,\tau'} \delta_{\tau_d,\tau} \delta_{\sigma_a \cdot \sigma_c, +1} \delta_{\sigma_b \cdot \sigma_d, +1} - \\
 & - \langle a\sigma_a\tau' | M_{l\lambda\mu}^{''(\tau')} [+] | d\sigma_d\tau' \rangle \langle b\sigma_b\tau | M_{l\lambda\mu}^{''(\tau)} [+] | c\sigma_c\tau \rangle \times \\
 & \quad \times \delta_{\tau_a,\tau'} \delta_{\tau_b,\tau} \delta_{\tau_c,\tau} \delta_{\tau_d,\tau'} \delta_{\sigma_a \cdot \sigma_d, +1} \delta_{\sigma_b \cdot \sigma_c, +1} - \\
 & - \langle b\sigma_b\tau' | M_{l\lambda\mu}^{''(\tau')} [+] | c\sigma_c\tau' \rangle \langle a\sigma_a\tau | M_{l\lambda\mu}^{''(\tau)} [+] | d\sigma_d\tau \rangle \times \\
 & \quad \times \delta_{\tau_a,\tau} \delta_{\tau_b,\tau'} \delta_{\tau_c,\tau'} \delta_{\tau_d,\tau} \delta_{\sigma_b \cdot \sigma_c, +1} \delta_{\sigma_a \cdot \sigma_d, +1} + \\
 & + \langle b\sigma_b\tau' | M_{l\lambda\mu}^{''(\tau')} [+] | d\sigma_d\tau' \rangle \langle a\sigma_a\tau | M_{l\lambda\mu}^{''(\tau)} [+] | c\sigma_c\tau \rangle \times \\
 & \quad \left. \times \delta_{\tau_a,\tau} \delta_{\tau_b,\tau'} \delta_{\tau_c,\tau} \delta_{\tau_d,\tau'} \delta_{\sigma_b \cdot \sigma_d, +1} \delta_{\sigma_a \cdot \sigma_c, +1} \right]; \quad (\text{П4.В14a})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle a\sigma_a\tau_a, b\sigma_b\tau_b | V_{[\pi=+]}^{[r=-]} | c\sigma_c\tau_c, d\sigma_d\tau_d \rangle = \\
& = -\frac{1}{2} \sum_{\tau, \tau' = \substack{neut \\ prot}} \kappa_{22}[\tau, \tau'] \sum_{\mu=1}^2 \\
& \left[\langle a\sigma_a\tau' | M_{22\mu}^{''(\tau')}[-] | c\sigma_c\tau' \rangle \langle b\sigma_b\tau | M_{22\mu}^{''(\tau)}[-] | d\sigma_d\tau \rangle \times \right. \\
& \times \delta_{\tau_a, \tau'} \delta_{\tau_b, \tau} \delta_{\tau_c, \tau'} \delta_{\tau_d, \tau} \delta_{\sigma_a \cdot \sigma_c, -1} \delta_{\sigma_b \cdot \sigma_d, -1} \\
& - \langle a\sigma_a\tau' | M_{22\mu}^{''(\tau')}[-] | d\sigma_d\tau' \rangle \langle b\sigma_b\tau | M_{22\mu}^{''(\tau)}[-] | c\sigma_c\tau \rangle \times \\
& \times \delta_{\tau_a, \tau'} \delta_{\tau_b, \tau} \delta_{\tau_c, \tau} \delta_{\tau_d, \tau'} \delta_{\sigma_a \cdot \sigma_d, -1} \delta_{\sigma_b \cdot \sigma_c, -1} \\
& - \langle b\sigma_b\tau' | M_{22\mu}^{''(\tau')}[-] | c\sigma_c\tau' \rangle \langle a\sigma_a\tau | M_{22\mu}^{''(\tau)}[-] | d\sigma_d\tau \rangle \times \\
& \times \delta_{\tau_a, \tau} \delta_{\tau_b, \tau'} \delta_{\tau_c, \tau'} \delta_{\tau_d, \tau} \delta_{\sigma_b \cdot \sigma_c, -1} \delta_{\sigma_a \cdot \sigma_d, -1} \\
& + \langle b\sigma_b\tau' | M_{22\mu}^{''(\tau')}[-] | d\sigma_d\tau' \rangle \langle a\sigma_a\tau | M_{22\mu}^{''(\tau)}[-] | c\sigma_c\tau \rangle \times \\
& \left. \times \delta_{\tau_a, \tau} \delta_{\tau_b, \tau'} \delta_{\tau_c, \tau} \delta_{\tau_d, \tau'} \delta_{\sigma_b \cdot \sigma_d, -1} \delta_{\sigma_a \cdot \sigma_c, -1} \right];
\end{aligned}$$

(Π4.B14b)

$$\begin{aligned}
& \langle a\sigma_a\tau_a, b\sigma_b\tau_b | V_{[\pi=-]}^{[r=\pm]} | c\sigma_c\tau_c, d\sigma_d\tau_d \rangle = \\
& = -\frac{1}{2} \sum_{\tau, \tau' = \substack{neut \\ prot}} \sum_{l\lambda=11, 31, 33} \kappa_{l\lambda}[\tau, \tau'] \delta_{r,-} \\
& \left[\langle a\sigma_a\tau' | M_{l\lambda 0}''^{(\tau')}[-] | c\sigma_c\tau' \rangle \langle b\sigma_b\tau | M_{l\lambda 0}''^{(\tau)}[-] | d\sigma_d\tau \rangle \times \right. \\
& \times \delta_{\tau_a, \tau'} \delta_{\tau_b, \tau} \delta_{\tau_c, \tau'} \delta_{\tau_d, \tau} \delta_{\sigma_a \cdot \sigma_c, -1} \delta_{\sigma_b \cdot \sigma_d, -1} \\
& - \langle a\sigma_a\tau' | M_{l\lambda 0}''^{(\tau')}[-] | d\sigma_d\tau' \rangle \langle b\sigma_b\tau | M_{l\lambda 0}''^{(\tau)}[-] | c\sigma_c\tau \rangle \times \\
& \times \delta_{\tau_a, \tau'} \delta_{\tau_b, \tau} \delta_{\tau_c, \tau} \delta_{\tau_d, \tau'} \delta_{\sigma_a \cdot \sigma_d, -1} \delta_{\sigma_b \cdot \sigma_c, -1} \\
& - \langle b\sigma_b\tau' | M_{l\lambda 0}''^{(\tau')}[-] | c\sigma_c\tau' \rangle \langle a\sigma_a\tau | M_{l\lambda 0}''^{(\tau)}[-] | d\sigma_d\tau \rangle \times \\
& \times \delta_{\tau_a, \tau} \delta_{\tau_b, \tau'} \delta_{\tau_c, \tau'} \delta_{\tau_d, \tau} \delta_{\sigma_b \cdot \sigma_c, -1} \delta_{\sigma_a \cdot \sigma_d, -1} \\
& + \langle b\sigma_b\tau' | M_{l\lambda 0}''^{(\tau')}[-] | d\sigma_d\tau' \rangle \langle a\sigma_a\tau | M_{l\lambda 0}''^{(\tau)}[-] | c\sigma_c\tau \rangle \times \\
& \left. \times \delta_{\tau_a, \tau} \delta_{\tau_b, \tau'} \delta_{\tau_c, \tau} \delta_{\tau_d, \tau'} \delta_{\sigma_b \cdot \sigma_d, -1} \delta_{\sigma_a \cdot \sigma_c, -1} \right] \\
& - \frac{1}{2} \sum_{\tau, \tau' = \substack{neut \\ prot}} \sum_{l\lambda=11, 31, 33} \kappa_{l\lambda}[\tau, \tau'] \sum_{\mu=1}^{\lambda} \\
& \left[\langle a\sigma_a\tau' | M_{l\lambda\mu}''^{(\tau')}[r] | c\sigma_c\tau' \rangle \langle b\sigma_b\tau | M_{l\lambda\mu}''^{(\tau)}[r] | d\sigma_d\tau \rangle \times \right. \\
& \times \delta_{\tau_a, \tau'} \delta_{\tau_b, \tau} \delta_{\tau_c, \tau'} \delta_{\tau_d, \tau} \delta_{\sigma_a \cdot \sigma_c, r} \delta_{\sigma_b \cdot \sigma_d, r} \\
& - \langle a\sigma_a\tau' | M_{l\lambda\mu}''^{(\tau')}[r] | d\sigma_d\tau' \rangle \langle b\sigma_b\tau | M_{l\lambda\mu}''^{(\tau)}[r] | c\sigma_c\tau \rangle \times \\
& \times \delta_{\tau_a, \tau'} \delta_{\tau_b, \tau} \delta_{\tau_c, \tau} \delta_{\tau_d, \tau'} \delta_{\sigma_a \cdot \sigma_d, r} \delta_{\sigma_b \cdot \sigma_c, r} \\
& - \langle b\sigma_b\tau' | M_{l\lambda\mu}''^{(\tau')}[r] | c\sigma_c\tau' \rangle \langle a\sigma_a\tau | M_{l\lambda\mu}''^{(\tau)}[r] | d\sigma_d\tau \rangle \times \\
& \times \delta_{\tau_a, \tau} \delta_{\tau_b, \tau'} \delta_{\tau_c, \tau'} \delta_{\tau_d, \tau} \delta_{\sigma_b \cdot \sigma_c, r} \delta_{\sigma_a \cdot \sigma_d, r} \\
& + \langle b\sigma_b\tau' | M_{l\lambda\mu}''^{(\tau')}[r] | d\sigma_d\tau' \rangle \langle a\sigma_a\tau | M_{l\lambda\mu}''^{(\tau)}[r] | c\sigma_c\tau \rangle \times \\
& \left. \times \delta_{\tau_a, \tau} \delta_{\tau_b, \tau'} \delta_{\tau_c, \tau} \delta_{\tau_d, \tau'} \delta_{\sigma_b \cdot \sigma_d, r} \delta_{\sigma_a \cdot \sigma_c, r} \right].
\end{aligned}$$

(Π4.B14c)

П4.В2 - Квазичастичное представление мультипольных взаимодействий.

Одночастичный оператор \hat{G} , удовлетворяющий соотношениям симметрии ПЗ.А2, имеет в одночастичном базисе Гудмана следующий вид:

$$\begin{aligned}\hat{G}^{(\tau)}[r = +1] &= \sum_{kl \in \tau} \langle k | \hat{G}[+] | l \rangle (a_k^+ a_l + \gamma_T \gamma_c a_k^+ a_{\bar{l}}), \\ \hat{G}^{(\tau)}[r = -1] &= \sum_{kl \in \tau} \langle k | \hat{G}[+] | \bar{l} \rangle (a_k^+ a_{\bar{l}} - \gamma_T \gamma_c a_k^+ a_l). \quad (\text{П4.В15})\end{aligned}$$

Это можно переписать в виде одного соотношения:

$$\hat{G}^{(\tau)}[r] = \sum_{\substack{k\sigma_k \in \tau \\ l\sigma_l \in \tau}} \delta_{\sigma_k \cdot \sigma_l, r} \langle k \sigma_k | \hat{G}^{(\tau)}[r] | l \sigma_l \rangle a_{k\sigma_k \tau}^+ a_{l\sigma_l \tau}, \quad (\text{П4.В16})$$

где

$$\begin{aligned}a_{k\sigma \tau}^+ &= \sum_{i \in \tau} \left(U_{k\sigma, i\sigma}^{(\tau)} \alpha_{i\sigma}^+ + V_{k\sigma, i-\sigma}^{(\tau)} \alpha_{i-\sigma} \right) \\ a_{k\sigma \tau} &= \sum_{i \in \tau} \left(U_{k\sigma, i\sigma}^{(\tau)*} \alpha_{i\sigma} + V_{k\sigma, i-\sigma}^{(\tau)*} \alpha_{i-\sigma}^+ \right). \quad (\text{П4.В17})\end{aligned}$$

В дальнейшем будем предполагать, что амплитуды U и V вещественны.

Благодаря использованию одночастичного базиса Гудмана, который удовлетворяет (П4.В5), квазичастичные операторы удовлетворяют условию:

$$\hat{R}_1^{-1} \alpha_{k\sigma \tau}^+ \hat{R}_1 = -i \sigma \alpha_{k\sigma \tau}^+. \quad (\text{П4.В18})$$

Подставляя (П4.В17) в (П4.В15) получаем:

$$\begin{aligned}\hat{G}^{(\tau)}[r] &= \delta_{r,+} \langle HFB | \hat{G}^{(\tau)}[+] | HFB \rangle \\ &+ \hat{G}^{(\tau)(1)}[r] + \hat{G}^{(\tau)(2)}[r]. \quad (\text{П4.В19})\end{aligned}$$

где

$$\langle HFB | \hat{G}^{(\tau)}[+] | HFB \rangle =$$

$$= \sum_{kl \in \tau} \langle k+ | \hat{G}^{(\tau)}[+] | l+ \rangle \sum_{i \in \tau} \left(V_{k+, i-}^{(\tau)} V_{l+, i-}^{(\tau)} + \gamma_T \gamma_C V_{k-, i+}^{(\tau)} V_{l-, i+}^{(\tau)} \right),$$

$$\hat{G}^{(\tau)(1)}[r] = \sum_{\substack{i \sigma_i \in \tau \\ j \sigma_j \in \tau}} \delta_{\sigma_i \cdot \sigma_j, r} g_{i \sigma_i, j - \sigma_j}^{(\tau)(1)}[r] \left(\alpha_{i \sigma_i \tau}^+ \alpha_{j - \sigma_j \tau}^+ + \gamma_C \gamma_H \alpha_{j - \sigma_j \tau} \alpha_{i \sigma_i \tau} \right),$$

$$\hat{G}^{(\tau)(2)}[r] = \sum_{\substack{i \sigma_i \in \tau \\ j \sigma_j \in \tau}} \delta_{\sigma_i \cdot \sigma_j, r} g_{i \sigma_i, j \sigma_j}^{(\tau)(2)}[r] \alpha_{i \sigma_i \tau}^+ \alpha_{j \sigma_j \tau}, \quad (\text{П4.В20})$$

с

$$g_{i \sigma_i, j - \sigma_j}^{(\tau)(1)}[r] = \delta_{\sigma_i \cdot \sigma_j, r} \sum_{kl \in \tau} \langle k \sigma_i | \hat{G}^{(\tau)}[r] | l \sigma_j \rangle U_{k \sigma_i, i \sigma_i}^{(\tau)} V_{l \sigma_j, j - \sigma_j}^{(\tau)}$$

$$g_{i \sigma_i, j \sigma_j}^{(\tau)(2)}[r] = \delta_{\sigma_i \cdot \sigma_j, r} \sum_{kl \in \tau} \langle k \sigma_i | \hat{G}^{(\tau)}[r] | l \sigma_j \rangle \times$$

$$\times \left(U_{k \sigma_i, i \sigma_i}^{(\tau)} U_{l \sigma_j, j \sigma_j}^{(\tau)} - r \gamma_T \gamma_H V_{k - \sigma_i, i \sigma_i}^{(\tau)} V_{l - \sigma_j, j \sigma_j}^{(\tau)} \right), \quad (\text{П4.В21})$$

где $\gamma_T, \gamma_H, \gamma_C$ ($\gamma_H = \gamma_T = +1, \gamma_C = (-1)^{\mu + \frac{r+3}{2}}$).

Из (П4.В11) мы видим, что для квазичастичного представления остаточных взаимодействий $\sum_{r=\pm} \sum_{\pi=\pm} V_{[\pi]}^r$, квазичастичное представление должно иметь следующую структуру:

$$\hat{G}^{(\tau')}[r] \hat{G}^{(\tau)}[r] =$$

$$= \left(\langle HFB | \hat{G}^{(\tau')}[+] | HFB \rangle \delta_{r,+} + \hat{G}^{(\tau')(1)}[r] + \hat{G}^{(\tau')(2)}[r] \right) \times$$

$$\times \left(\langle HFB | \hat{G}^{(\tau)}[+] | HFB \rangle \delta_{r,+} + \hat{G}^{(\tau)(1)}[r] + \hat{G}^{(\tau)(2)}[r] \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\delta_{r,+} \langle HFB | \hat{G}^{(\tau')}[+] | HFB \rangle \langle HFB | \hat{G}^{(\tau)}[+] | HFB \rangle + \\
&\quad + \delta_{r,+} \left(\langle HFB | \hat{G}^{(\tau')}[+] | HFB \rangle \hat{G}^{(\tau)}[+] + \right. \\
&\quad \left. + \langle HFB | \hat{G}^{(\tau)}[+] | HFB \rangle \hat{G}^{(\tau')}[+] \right) + \\
&\quad + G^{(\tau')(1)}[r] G^{(\tau)(1)}[r] + G^{(\tau')(2)}[r] G^{(\tau)(1)}[r] + \\
&\quad + G^{(\tau')(1)}[r] G^{(\tau)(2)}[r] + G^{(\tau')(2)}[r] G^{(\tau)(2)}[r]. \quad (\text{П4.В22})
\end{aligned}$$

Аналогично, как и для $\hat{G}^{(\tau)}[r]$, преобразуем в квазичастичное представление и оператор спаривания \hat{P}_τ^+ ($\hat{R}_1^{-1} \hat{P}_\tau^+ \hat{R}_1 = \hat{P}_\tau^+ \Rightarrow r = +1$ для оператора спаривания)

$$\begin{aligned}
\hat{P}_\tau^+ &= \sum_{k \in \tau} a_{k, \sigma=+, \tau}^+ a_{k, \sigma=-, \tau} = \\
&= \langle HFB | \hat{P}_\tau^+ | HFB \rangle + \hat{P}_\tau^{(1)+} + \hat{P}_\tau^{(1)+},
\end{aligned}$$

где

$$\langle HFB | \hat{P}_\tau^+ | HFB \rangle = \sum_{ki \in \tau} V_{k+, i-}^{(\tau)} U_{k-, i-}^{(\tau)},$$

$$\hat{P}_\tau^{(1)+} = \sum_{\substack{i\sigma_i \in \tau \\ j\sigma_j \in \tau}} \delta_{\sigma_i \cdot \sigma_j, +} \left(p_{i\sigma_i, j-\sigma_j}^{(\tau)(1)} \alpha_{i\sigma_i \tau}^+ \alpha_{j-\sigma_j \tau}^+ + \bar{p}_{i\sigma_i, j-\sigma_j}^{(\tau)(1)} \alpha_{j-\sigma_j \tau} \alpha_{i\sigma_i \tau} \right),$$

$$\hat{P}_\tau^{(2)+} = \sum_{\substack{i\sigma_i \in \tau \\ j\sigma_j \in \tau}} \delta_{\sigma_i \cdot \sigma_j, +} p_{i\sigma_i, j\sigma_j}^{(\tau)(2)} \alpha_{i\sigma_i \tau}^+ \alpha_{j\sigma_j \tau}$$

с

$$\begin{aligned}
 p_{i\sigma_i, j-\sigma_j}^{(\tau)(1)} &= \delta_{\sigma_i, +} \delta_{\sigma_j, +} \sum_k U_{k+, i+}^{(\tau)} U_{k-, j-}^{(\tau)}; \\
 \bar{p}_{i\sigma_i, j-\sigma_j}^{(\tau)(1)} &= \delta_{\sigma_i, +} \delta_{\sigma_j, +} \sum_k V_{k-, i+}^{(\tau)} V_{k+, j-}^{(\tau)}; \\
 p_{i\sigma_i, j\sigma_j}^{(\tau)(2)} &= \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \sigma_i \sum_k V_{k-, i+}^{(\tau)} V_{k+, j-}^{(\tau)}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, часть гамильтониана, соответствующая спариванию

$$\sum_{\tau} G_{\tau} \hat{P}_{\tau}^{+} \hat{P}_{\tau},$$

имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_{\tau}^{+} \hat{P}_{\tau} &= \left(\langle HFB | \hat{P}_{\tau}^{+} | HFB \rangle + \hat{P}_{\tau}^{(1)+} + \hat{P}_{\tau}^{(2)+} \right) \times \\
 &\times \left(\langle HFB | \hat{P}_{\tau} | HFB \rangle + \hat{P}_{\tau}^{(1)} + \hat{P}_{\tau}^{(2)} \right) = \\
 &= - \langle HFB | \hat{P}_{\tau}^{+} | HFB \rangle \langle HFB | \hat{P}_{\tau}^{+} | HFB \rangle \\
 &+ \langle HFB | \hat{P}_{\tau}^{+} | HFB \rangle \left(\hat{P}_{\tau}^{+} + \hat{P}_{\tau} \right) + \\
 &+ \hat{P}_{\tau}^{(1)+} \hat{P}_{\tau}^{(1)} + \hat{P}_{\tau}^{(2)+} \hat{P}_{\tau}^{(1)} + \hat{P}_{\tau}^{(1)+} \hat{P}_{\tau}^{(2)} + \hat{P}_{\tau}^{(2)+} \hat{P}_{\tau}^{(2)}. \quad (\text{П4.В23})
 \end{aligned}$$

Отметим, что монопольное спаривание дает вклад лишь в $V_{[\tau=+]}^{[r=+]}$ часть взаимодействия.

Далее рассмотрим гамильтониан, включающий члены, соответствующие кинетической энергии, монопольному спари-

ванию и мультиполь-мультипольным взаимодействиям:

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = & \sum_{\substack{\tau=neut \\ prot}} \sum_{\substack{i\sigma_i\epsilon\tau \\ j\sigma_j\epsilon\tau}} \langle i\sigma_i\tau | \hat{T}_{kin} | j\sigma_j\tau \rangle a_{i\sigma_i\tau}^+ a_{j\sigma_j\tau} - \sum_{\tau} G_{\tau} \hat{P}_{\tau}^+ \hat{P}_{\tau} \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{r=\pm} \sum_{\substack{\tau,\tau'=neut \\ prot}} \sum_{l\lambda=20,22,11,31,33} \kappa_{l\lambda}[\tau',\tau] \times \\
 & \times \sum_{\mu=0}^{\lambda} M_{l\lambda\mu}^{(\tau')} [r] M_{l\lambda\mu}^{(\tau)} [r] \tag{П4.В24}
 \end{aligned}$$

с

$$\begin{aligned}
 \kappa_{l\lambda}[p,p] &= \kappa_{l\lambda}[n,n] = \kappa_{l\lambda}[\mathcal{T}=0] + \kappa_{l\lambda}[\mathcal{T}=1] \\
 \kappa_{l\lambda}[n,p] &= \kappa_{l\lambda}[p,n] = \kappa_{l\lambda}[\mathcal{T}=0] - \kappa_{l\lambda}[\mathcal{T}=1]. \tag{П4.В25}
 \end{aligned}$$

В (П4.В24) $M_{l\lambda\mu}^{(\tau)} [r]$ – симметризованные мультипольные операторы, имеющие хорошую сигнатуру (не «дважды масштабированные»), а $a_{i\sigma_i\tau}^+$, $a_{i\sigma_i\tau}$ – операторы рождения и уничтожения, соответствующие базису Гудмана, имеющего сферическую симметрию (т.е. сферический базис гармонического осциллятора, удовлетворяющий (П4.В8)). После решения уравнений ХФБ, гамильтониан (П4.В24) может быть переписан в виде:

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = & \langle HFB | \hat{H} | HFB \rangle + \sum_{\tau} \sum_{i\epsilon\tau} \epsilon_{i\tau} \sum_{\sigma_i=\pm} \alpha_{i\sigma_i\tau}^+ \alpha_{i\sigma_i\tau} \\
 & - \sum_{\tau} G_{\tau} \left(\hat{P}_{\tau}^{(1)+} \hat{P}_{\tau}^{(1)} + \hat{P}_{\tau}^{(2)+} \hat{P}_{\tau}^{(1)} + \hat{P}_{\tau}^{(1)+} \hat{P}_{\tau}^{(2)} + \hat{P}_{\tau}^{(2)+} \hat{P}_{\tau}^{(2)} \right) \\
 & - \sum_{r=\pm} \sum_{\tau,\tau'} \sum_{l\lambda=20,22,11,31,33} \kappa_{l\lambda}[\tau',\tau] \times
 \end{aligned}$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\lambda} [\hat{M}_{l\lambda\mu}^{(\tau')(1)}[r] \hat{M}_{l\lambda\mu}^{(\tau)(1)}[r] + \hat{M}_{l\lambda\mu}^{(\tau')(2)}[r] \hat{M}_{l\lambda\mu}^{(\tau)(1)}[r]$$

$$+ \hat{M}_{l\lambda\mu}^{(\tau')(1)}[r] \hat{M}_{l\lambda\mu}^{(\tau)(2)}[r] + \hat{M}_{l\lambda\mu}^{(\tau')(2)}[r] \hat{M}_{l\lambda\mu}^{(\tau)(2)}[r]]. \quad (\text{П4.В26})$$

Члены в (П4.В22) и (П4.В23) включающие средние значения $\langle HFB | \hat{G}^{(\tau)}[+] | HFB \rangle$ и $\langle HFB | \hat{P}_{\tau}^{+} | HFB \rangle$ дают вклад в среднее поле. Средние значения $\langle HFB | \hat{G}^{(\tau)}[+] | HFB \rangle$ по «дважды масштабированным» мультипольным операторам по квазичастичному вакууму $|HFB\rangle$ равны нулю, поэтому можем подставить $\hat{M}_{l\lambda\mu}^{(\tau)}[r]$ в остаточные взаимодействия, получая при этом $\hat{M}''_{l\lambda\mu}^{(\tau)}[r]$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \langle HFB | \hat{H} | HFB \rangle + \sum_{\tau} \sum_{i \in \tau} \epsilon_{i\tau} \sum_{\sigma_i = \pm} \alpha_{i\sigma_i\tau}^{+} \alpha_{i\sigma_i\tau} \\ &\quad - \sum_{\tau} G_{\tau} \left(\hat{P}_{\tau}^{(1)+} \hat{P}_{\tau}^{(1)} + \hat{P}_{\tau}^{(2)+} \hat{P}_{\tau}^{(1)} + \hat{P}_{\tau}^{(1)+} \hat{P}_{\tau}^{(2)} + \hat{P}_{\tau}^{(2)+} \hat{P}_{\tau}^{(2)} \right) \\ &\quad - \sum_{r=\pm} \sum_{\tau, \tau'} \sum_{l\lambda=20, 22, 11, 31, 33} \kappa_{l\lambda}[\tau', \tau] \sum_{\mu=0}^{\lambda} \\ &\quad \left[\hat{M}''_{l\lambda\mu}^{(\tau')(1)}[r] \hat{M}''_{l\lambda\mu}^{(\tau)(1)}[r] + \hat{M}''_{l\lambda\mu}^{(\tau')(2)}[r] \hat{M}''_{l\lambda\mu}^{(\tau)(1)}[r] + \right. \\ &\quad \left. + \hat{M}''_{l\lambda\mu}^{(\tau')(1)}[r] \hat{M}''_{l\lambda\mu}^{(\tau)(2)}[r] + \hat{M}''_{l\lambda\mu}^{(\tau')(2)}[r] \hat{M}''_{l\lambda\mu}^{(\tau)(2)}[r] \right] = \\ &= \langle HFB | \hat{H} | HFB \rangle + \sum_{\tau} \sum_{i \in \tau} \epsilon_{i\tau} \sum_{\sigma_i = \pm} \alpha_{i\sigma_i\tau}^{+} \alpha_{i\sigma_i\tau} + \\ &\quad + \sum_{r=\pm} \sum_{\pi=\pm} V_{[\pi]}^r, \end{aligned} \quad (\text{П4.В27})$$

где

$$V_{[\pi]}^r = -\delta_{r,+} \delta_{\pi,+} \sum_{\tau} G_{\tau} \left(\hat{P}_{\tau}^{(1)+} \hat{P}_{\tau}^{(1)} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \hat{P}_\tau^{(2)+\hat{P}_\tau^{(1)} + \hat{P}_\tau^{(1)+\hat{P}_\tau^{(2)} + \hat{P}_\tau^{(2)+\hat{P}_\tau^{(2)}} \\
 & - \sum_{\tau, \tau'} \sum_{\substack{l\lambda \\ (-1)^\lambda = \pi}} \kappa_{l\lambda}[\tau', \tau] \sum_{\mu=0}^{\lambda} \\
 & \left[\hat{M}_{l\lambda\mu}^{''(\tau')(1)}[r] \hat{M}_{l\lambda\mu}^{''(\tau)(1)}[r] + \hat{M}_{l\lambda\mu}^{''(\tau')(2)}[r] \hat{M}_{l\lambda\mu}^{''(\tau)(1)}[r] \right. \\
 & \left. + \hat{M}_{l\lambda\mu}^{''(\tau')(1)}[r] \hat{M}_{l\lambda\mu}^{''(\tau)(2)}[r] + \hat{M}_{l\lambda\mu}^{''(\tau')(2)}[r] \hat{M}_{l\lambda\mu}^{''(\tau)(2)}[r] \right].
 \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ П4.С

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА

Представим потенциал Гаусса в виде

$$V(r) = -V_{\Gamma} e^{-\frac{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n|^2}{r_g^2}} = -V_{\Gamma} e^{-\frac{r_p^2 + r_n^2}{r_g^2} + \frac{2r_p r_n}{r_g^2} \cos(\vartheta)}$$

(где $r_g = 1.4 \text{ ФМ}$). Последнее слагаемое в показателе экспоненты преобразуем следующим образом:

$$e^{\frac{2r_p r_n}{r_g^2} \cos(\vartheta)} = e^{i(-\frac{2i r_p r_n}{r_g r_g} \cos(\vartheta))} = e^{-i\mathbf{q}_p \mathbf{q}_n} = e^{i(-\mathbf{q}_p \mathbf{q}_n)}.$$

Далее, используя разложение

$$e^{i\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) i^k j_k(x_1 x_2) P_k(\cos \vartheta),$$

где $j_K(x_1 x_2)$ -сферическая функция Бесселя, получим

$$e^{i(-\mathbf{q}_p) \mathbf{q}_n} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) i^k j_k(q_p q_n) P_k(\cos \vartheta_q),$$

где

$$P_k(\cos \vartheta_q) = P_k(\cos(\pi - \vartheta)) = P_k(-\cos \vartheta) = (-1)^k P_k(\cos \vartheta).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} e^{\frac{2r_p r_n}{r_g^2} \cos(\vartheta)} &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) i^k j_k\left(i \frac{2r_p r_n}{r_g^2}\right) (-1)^k P_k(\cos \vartheta) = \\ &= 4\pi \sum_k i^k (-1)^k j_k\left(i \frac{2r_p r_n}{r_g^2}\right) \sum_{q=-k}^k (-1)^q Y_{kq}(\mathbf{r}_p) Y_{k-q}(\mathbf{r}_n). \end{aligned}$$

Для выражения $j_k\left(i \frac{2r_p r_n}{r_g^2}\right)$ используем следующее разложение:

$$j_k(ix) = (ix)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{|ix|^2}{2}\right)^l}{l!(2k+2l+1)!!} = i^k x^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(-\frac{x^2}{2}\right)^l}{l!(2k+2l+1)!!} =$$

$$= i^k x^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^l}{l!(2k+2l+1)!!}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} e^{\frac{2r_p r_n}{r_g^2} \cos(\vartheta)} &= 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} i^k (-1)^k i^k \left(\frac{2r_p r_n}{r_g^2}\right)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2r_p^2 r_n^2}{r_g^4}\right)^l}{l!(2k+2l+1)!!} \times \\ &\times \sum_{q=-k}^k (-1)^q Y_{kq}(\mathbf{r}_p) Y_{k-q}(\mathbf{r}_n) = \\ &= 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2r_p r_n}{r_g^2}\right)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2r_p^2 r_n^2}{r_g^4}\right)^l}{l!(2k+2l+1)!!} \sum_{q=-k}^k (-1)^q Y_{kq}(\mathbf{r}_p) Y_{k-q}(\mathbf{r}_n). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n|^2}{r_g^2}} &= 4\pi e^{-\frac{r_p^2 + r_n^2}{r_g^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2r_p r_n}{r_g^2}\right)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2r_p^2 r_n^2}{r_g^4}\right)^l}{l!(2k+2l+1)!!} \times \\ &\times \sum_{q=-k}^k (-1)^q Y_{kq}(\mathbf{r}_p) Y_{k-q}(\mathbf{r}_n). \quad (\text{П4.C1}) \end{aligned}$$

Выбрав начало координат в центре инерции ядра, разложим двухчастичный потенциал в ряд по полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) &= \sum_{k=0}^{\infty} V_k(r_i, r_j) P_k(\cos \vartheta_{ij}) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2k+1} V_k(r_i, r_j) \sum_{q=-k}^k (-1)^q Y_{kq}(\mathbf{r}_p) Y_{k-q}(\mathbf{r}_n). \quad (\text{П4.C2}) \end{aligned}$$

Из сравнения выражений (П4.C1) и (П4.C2) следует, что:

$$V_k^{Gauss}(r_p, r_n)$$

$$\begin{aligned}
 &= (2k + 1)e^{-\frac{r_p^2+r_n^2}{r_g^2}} \left(\frac{2r_p r_n}{r_g^2}\right)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2r_p^2 r_n^2}{r_g^4}\right)^l}{l!(2k + 2l + 1)!!} (-V_{\Gamma}) \\
 &= (-V_{\Gamma})(2k + 1)i^k e^{-\frac{r_p^2+r_n^2}{r_g^2}} j_k\left(i\frac{2r_p r_n}{r_g^2}\right).
 \end{aligned}$$

Выберем волновые функции в виде

$$R_{nl}(r) = \sum_{k=0}^n a_k(nl) e^{-\frac{\lambda r^2}{2}} r^{2k+l} \lambda^{\frac{l}{2}+k+3/4},$$

где $R_{nl}(r)$ - нормированная радиальная часть волновой функции изотропного гармонического осциллятора, а

$$a_k(nl) \equiv a_{nlk} = (-1)^k \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \frac{\sqrt{2^{n+l} n! (2n + 2l + 1)!!}}{2^{n-k} (n - k)! (2l + 2k + 1)!! k!}, \quad \lambda = \frac{m\omega}{\hbar}.$$

Здесь m масса нуклона, ω – осцилляторная частота. Следовательно, матричные элементы можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 &\langle n'_p l'_p, n'_n l'_n | V_k^{Gauss}(r_p r_n) | n_p l_p, n_n l_n \rangle = \\
 &= -V_{\Gamma}(2k + 1)i^k \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} R_{n'_p l'_p}(r_p) R_{n'_n l'_n}(r_n) e^{-\frac{r_p^2+r_n^2}{r_g^2}} j_k\left(i\frac{2r_p r_n}{r_g^2}\right) \times \\
 &\quad \times R_{n_p l_p}(r_p) R_{n_n l_n}(r_n) r_p^2 r_n^2 dr_p dr_n = \\
 &= -V_{\Gamma}(2k + 1) \sum_{k'_p k'_n k_p k_n}^{n'_p n'_n n_p n_n} a_{n'_p l'_p k'_p} a_{n'_n l'_n k'_n} a_{n_p l_p k_p} a_{n_n l_n k_n} \times \\
 &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dr_p dr_n e^{-\frac{\lambda r_p^2}{2}} e^{-\frac{\lambda r_n^2}{2}} r_p^{2k'_p+l'_p} r_n^{2k'_n+l'_n} \lambda^{\frac{l'_p}{2}+k'_p+\frac{3}{4}} \lambda^{\frac{l'_n}{2}+k'_n+\frac{3}{4}} \times \\
 &\quad \times e^{-\frac{r_p^2+r_n^2}{r_g^2}} \left(\frac{2r_p r_n}{r_g^2}\right)^k \frac{\left(\frac{2r_p^2 r_n^2}{r_g^4}\right)^j}{j!(2k + 2j + 1)!!} \times \\
 &\quad \times e^{-\frac{\lambda r_p^2}{2}} e^{-\frac{\lambda r_n^2}{2}} r_p^{2k_p+l_p} r_n^{2k_n+l_n} r_p^2 r_n^2 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -V_{\Gamma}(2k+1) \frac{2^k}{r_g^{2k}} \sum_{k'_p k'_n k_p k_n}^{n'_p n'_n n_p n_n} a_{n'_p l'_p k'_p} a_{n'_n l'_n k'_n} a_{n_p l_p k_p} a_{n_n l_n k_n} \times \\
 &\times \lambda^{\frac{l_p + l'_p + l_n + l'_n}{2} + k_p + k'_p + k_n + k'_n + 3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{r_g^{4j} j! (2k + 2j + 1)!!} \times \\
 &\times \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda + \frac{1}{r_g^2}) r_p^2} e^{-(\lambda + \frac{1}{r_g^2}) r_n^2} r_p^{2(k_p) + (l_p) + k + 2j + 2} \times \\
 &\times r_n^{2(k_n) + (l_n) + k + 2j + 2} dr_p dr_n;
 \end{aligned}$$

Здесь $(k_p) = k_p + k'_p$, $(l_p) = l_p + l'_p$, $(k_n) = k_n + k'_n$, $(l_n) = l_n + l'_n$.

Используя известное выражение

$$\int_0^{\infty} e^{-ar^2} r^{2m} dr = \frac{(2m-1)!! \sqrt{\pi}}{2^{m+1} a^{m+1/2}},$$

ИМЕЕМ

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda + \frac{1}{r_g^2}) r_p^2} e^{-(\lambda + \frac{1}{r_g^2}) r_n^2} r_p^{2(k_p) + (l_p) + k + 2j + 2} \times \\
 &\times r_n^{2(k_n) + (l_n) + k + 2j + 2} dr_p dr_n = \\
 &= \frac{(2(k_p) + (l_p) + 2j + k + 1)!! \sqrt{\pi}}{2^{(k_p) + \frac{(l_p)}{2} + j + \frac{k}{2} + 2} (\lambda + \frac{1}{r_g^2})^{(k_p) + \frac{(l_p)}{2} + j + \frac{k}{2} + \frac{3}{2}}} \times \\
 &\times \frac{(2(k_n) + (l_n) + 2j + k + 1)!! \sqrt{\pi}}{2^{(k_n) + \frac{(l_n)}{2} + j + \frac{k}{2} + 2} (\lambda + \frac{1}{r_g^2})^{(k_n) + \frac{(l_n)}{2} + j + \frac{k}{2} + \frac{3}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 &\langle n'_p l'_p, n'_n l'_n | V_k^{Gauss}(r_p r_n) | n_p l_p, n_n l_n \rangle = \\
 &= -V_{\Gamma}(2k+1) \frac{2^k}{r_g^{2k}} \pi \sum_{k'_p k'_n k_p k_n}^{n'_p n'_n n_p n_n} \lambda^{(k) + \frac{l}{2} + 3} a_{n'_p l'_p k'_p} a_{n'_n l'_n k'_n} a_{n_p l_p k_p} a_{n_n l_n k_n} \times \\
 &\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{r_g^{4j} j! (2k + 2j + 1)!!} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{(2(k_p) + (l_p) + 2j + k + 1)!!(2(k_n) + (l_n) + 2j + k + 1)!!}{2^{(k) + \frac{(l)}{2} + 2j + k + 4} (\lambda + \frac{1}{r_g^2})^{(k) + \frac{(l)}{2} + 2j + k + 3}} = \\
 & = -V_\Gamma(2k + 1)\pi \sum_{\substack{n'_p n'_n n_p n_n \\ k'_p k'_n k_p k_n}} \lambda^{(k) + \frac{l}{2} + 3} a_{n'_p l'_p k'_p} a_{n'_n l'_n k'_n} a_{n_p l_p k_p} a_{n_n l_n k_n} \times \\
 & \quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{k+j}}{r_g^{2k+4j} (\lambda + \frac{1}{r_g^2})^{(k) + \frac{(l)}{2} + 2j + k + 3} j! (2k + 2j + 1)!!} \times \\
 & \quad \times \frac{(2(k_p) + (l_p) + 2j + k + 1)!! (2(k_n) + (l_n) + 2j + k + 1)!!}{2^{(k_p) + \frac{(l_p)}{2} + j + \frac{k}{2} + 2} 2^{(k_n) + \frac{(l_n)}{2} + j + \frac{k}{2} + 2}}.
 \end{aligned} \tag{П4.C3}$$

где $(l_p) = l_{p'} + l_p$, $(k_n) = k_{n'} + k_n$, $(k) = k_{p'} + k_p + k_{n'} + k_n$,
 $(k_p) = k_{p'} + k_p$, $(l_n) = l_{n'} + l_n$, $(l) = l_{p'} + l_p + l_{n'} + l_n$.

Глава 5

квазиклассическая модель при статистически равновесном вращении

§5.1 Квазиклассическая теория оболочечной структуры ядер

Многие сложные закономерности коллективной ядерной динамики, такие как особенности деления, образование сильнодеформированных состояний при быстром вращении, имеющие прямое отношение к проблемам, связанными с моментом инерции и др. во многом удастся существенно упростить в рамках квазиклассических подходов. Это связано с тем, что многие фундаментальные явления (несферичность формы определенных ядер, существование квазистационарного промежуточного состояния при делении ядер, аномалии масс и моментов инерции и других фактов) связаны с проявлениями оболочечных эффектов, учитываемых методом оболочечных поправок Струтинского.

Главным и мощным методом вычисления оболочечных поправок является теория периодических орбит, основанная на квазиклассическом представлении функции Грина [180]. Общее квазиклассическое решение задачи при этом можно получить в рамках метода стационарности фазы [181] или метода перевала [182], используя фейнмановские интегралы по траекториям [183] для вычисления пропагатора $K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t)$, Фурье-преобразование которого дает функцию Грина. Рас-

пределение одночастичных уровней и пространственное распределение частиц получаются интегрированием функции Грина по пространственным или энергетическим переменным.

Эти подходы позволяют многие физические величины, такие как энергия, плотность одночастичных уровней, момент инерции и др. разделить на гладкую (усредненную) и флуктуирующую (оболочечную) части [184,185].

Важный шаг в этом направлении был сделан Струтинским и Магнером, которые расширили квазиклассическую теорию Гуцвиллера на континуальные симметрии [186] и явления бифуркации [187]. В рамках такого обобщения, осциллирующую часть момента инерции можно получить с помощью мощной теории периодических орбит, не опирающуюся на классическую теорию возмущений и поэтому работающую тем лучше, чем больше число частиц в ядре при заданном его угловом моменте. При этом гладкий компонент простым образом был получен на основе приближения расширенного Томаса-Ферми [188].

Здесь в рамках МПВ мы развиваем аналитические методы вычисления моментов инерции конечных Ферми-систем для получения оболочечных поправки к ним с помощью квазиклассической теории, основанной на траекторном разложении Гуцвиллера. Показывается, что при статистически равновесном вращении, когда момент инерции совпадает с твердотельным, его оболочечные компоненты выражаются через оболочечные поправки к свободной энергии ядра в адиабатическом приближении [189]. В случае среднего поля в виде гармонического осциллятора эти соотношения становятся точными. В неадиабатическом случае предложено обобщение кватомеханической формулы Зелевинского для момента инерции аксиально-симметричного гармонического осциллятора на случай конечных температур [190]. Аналитически показано, что момент инерции МПВ можно понимать в

обобщенном смысле, выходящим за рамки квантовой теории возмущения, как имеющий правильный сферический предел выстраивания индивидуальных угловых моментов нуклонов [191]. Такой предел получен также независимым методом, не использующим квантовую теорию возмущений. Отметим, что рассматриваемое обобщение особенно важно для решения задач физики высоких спинов в случаях, когда можно сомневаться в применимости квантовых критериев теории возмущений.

§5.2 Локальная составляющая момента инерции

Целью этого параграфа является вычисление локальной, т.е. усредненной, составляющей момента инерции $\Theta_x^{(00)}$. Существенным моментом здесь является отделение локальной части момента инерции от нелокальной (осциллирующей) части, обусловленной оболочечными поправками. Это может быть осуществлено путем усреднения в фазовом пространстве, аналогично тому, как капельную модель можно получить из модели конечной Ферми-системы с сильным взаимодействием между частицами. Для этого в дальнейшем мы будем пользоваться локальным приближением $S_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \varepsilon_F)/\hbar = k_F \mathcal{L}_\alpha \sim 1$, где S_α – действие вдоль траектории α , \mathcal{L}_α – длина локальной (прямолинейной, т.е. без отражений от стенок потенциальной ямы) траектории α , $k_F = \sqrt{2m(\varepsilon_F - V(\mathbf{r}))}$ – импульс Ферми (в ед. \hbar), m – масса нуклона, $V(\mathbf{r})$ – потенциал среднего поля.

§5.2.1 Момент инерции как отклик на принудительное вращение

В рамках МПВ вращение аксиально-симметричного ядра вокруг оси ox , перпендикулярной оси симметрии oz (коллек-

тивное вращение), формально можно рассматривать решая задачу на собственные значения и собственные векторы одночастичного возмущенного гамильтониана (раусиана):

$$\hat{H}_\omega = \hat{H} - \omega \hat{l}_x, \quad (5.2.1)$$

где \hat{H} – невозмущенный одночастичный гамильтониан, \hat{l}_x – проекция углового момента на ось ox , ω – множитель Лагранжа – частота вращения связанной с ядром системы координат. Усредненная по всем проекциям угловых моментов величина $\langle \hat{l}_x \rangle^\omega$ определяется как

$$\langle \hat{l}_x \rangle_\omega \equiv d_s \sum_i n_i \langle \hat{l}_x \rangle_i^\omega = \hat{I}_x, \quad (5.2.2)$$

и задает проекцию углового момента \hat{I}_x на ось ox . Здесь $\psi_i^\omega(\mathbf{r})$ – собственные функции и ϵ_i^ω собственные значения \hat{H}_ω в (5.2.1), n_i – фермиевские числа заполнения одночастичных состояний i , а d_s учитывает спиновое или спин-изоспиновое вырождение. В соответствии с [188] мы будем рассматривать момент инерции Θ_x как отклик величины $\delta \langle \hat{l}_x \rangle_\omega$, определяемой выражением (5.2.2) по отношению к внешнему принудительному вращению $-\omega \hat{l}_x$:

$$\delta \langle \hat{l}_x \rangle_\omega = \Theta_x \delta \omega. \quad (5.2.3)$$

Здесь

$$\Theta_x = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty d\varepsilon n(\varepsilon) \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 l_{x1} l_{x2} \text{Re } G \text{ Im } G, \quad (5.2.4)$$

$$G \equiv G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) = \sum_i \frac{\psi_i(\mathbf{r}_1) \psi_i(\mathbf{r}_2)}{\varepsilon - \varepsilon_i + i\Gamma},$$

$\Gamma \rightarrow +0$ в приближении среднего поля, $\hat{l}_x \equiv l_x(\mathbf{r})$ – проекция углового момента частицы в точке \mathbf{r} , $n(\varepsilon)$ – фермиевские числа заполнения, $n(\varepsilon) = 1 / \{1 + \exp[(\varepsilon - \lambda)/T]\}$, λ – химический потенциал и T – температура, $\lambda \approx \varepsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$, и k_F

– соответственно энергия уровня Ферми и соответствующий импульс, а m – масса нуклона. Множитель 2 учитывает спиновое вырождение. Ради удобства, обычно фигурирующую в кренкинг-формулах постоянную \hbar^2 , мы включили в фактор \hat{l}_x^2 . Собственные функции ψ_i и собственные значения ε_i определены с помощью гамильтониана \hat{H}_ω при $\omega = 0$ с учетом лишь первого порядка в разложении по малому параметру $\omega/\varepsilon_F \ll 1$. Подставляя второе из уравнений (5.2.4) в первое, получаем хорошо известную формулу (Инглиса) для определения момента инерции [22,97],

$$\Theta_x = \sum_{i j} \frac{(n_i - n_j) |\langle \hat{l}_x \rangle_{ij}|^2}{\varepsilon_j - \varepsilon_i - i\Gamma}. \quad (5.2.5)$$

Здесь $n_i = n(\varepsilon_i)$ – числа заполнения одночастичных состояний $|i\rangle$ с собственными функциями ψ_i и собственными значениями ε_i раусиана \hat{H}_ω в низжайшем порядке разложения по теории возмущений. Здесь $|\langle \hat{l}_x \rangle_{ij}|$ – матричные элементы проекции оператора углового момента \hat{l}_x для переходов между одночастичными состояниями $|i\rangle$ и $|j\rangle$ при $\omega = 0$. Этот формализм легко обобщается для произвольных значений частоты вращения ω с помощью формальной замены $\psi_i \rightarrow \psi_i^\omega$, $\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_i^\omega$, где ψ_i^ω и ε_i^ω , являются собственными функциями и собственными значениями \hat{H}_ω при конечных значениях ω . Поэтому можно рассматривать малые возмущения $\delta\omega l_x$ и повторяя эту процедуру шаг за шагом, получить момент инерции $\Theta_x(\omega)$ при каждом значении ω .

§5.2.2 Квазиклассическое траекторное разложение Гуцвиллера

Функция Грина $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon)$ в квазиклассическом приближении была найдена Гуцвиллером в рамках формализма инте-

грала по траекториям [180,183]

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) &= \sum_{\alpha} G_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) = \\
 &= -\frac{1}{2\pi\hbar^2} \sum_{\alpha} |J_{\alpha}(\mathbf{p}_1, t_{\alpha}; \mathbf{r}_2, \varepsilon)|^{1/2} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) - \frac{i\pi}{2} \mu_{\alpha} \right],
 \end{aligned}
 \tag{5.2.6}$$

где индекс α пробегает все классические пути при данном потенциале, соединяющие точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 при заданной энергии ε . Здесь μ_{α} – так называемый индекс Маслова, учитывающий все каустики и количество точек поворотов на орбите α [192,193]. Амплитуда в (5.2.6) зависит от стабильности классической траектории и учитывается якобианом $J_{\alpha}(\mathbf{p}_1, t_{\alpha}; \mathbf{r}_2, \varepsilon)$ преобразования от переменных $(\mathbf{p}_1, t_{\alpha})$ к переменным $(\mathbf{r}_2, \varepsilon)$. Для замкнутых орбит α , $\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ и при этом через заданную точку \mathbf{r} проходит двухпараметрическое семейство периодических орбит [18]. Для таких семейств амплитуды соответствующих слагаемых в квазиклассическом выражении для функции Грина G_{α} увеличиваются множителем, пропорциональным $\hbar^{-1/2}$.

Среди всех классических траекторий α , мы можем выделить траекторию α_0 длина которой обращается в нуль, когда \mathbf{r}_1 приближается к \mathbf{r}_2 , то есть траекторию, которая соединяет эти две точки, не испытывая отражения от стенок потенциальной ямы. Поэтому выражение для функции Грина можно записать в виде двух слагаемых $G = G_{\alpha_0} + G_{\text{osc}}$, позволяющих представить плотность уровней $g(\varepsilon)$, состоящей из гладкой части, соответствующей статистической модели Томаса-Ферми $g_{\text{TF}}(\varepsilon)$ и осциллирующей, связанной с периодическими траекториями $g_{\text{osc}}(\varepsilon)$: $g(\varepsilon) = g_{\text{TF}}(\varepsilon) + g_{\text{osc}}(\varepsilon)$. Мы будем использовать более точное выражение для гладкой части плотности уровней – расширенной формулой $g_{\text{ETF}}(\varepsilon)$, включающей поправки, соответствующие поверхностным эффектам

и связанными с ее кривизной [192]. Сумма по всем периодическим орбитам учитывает оболочечные поправки $g_{\text{osc}}(\varepsilon)$ при описании одночастичного спектра. Такое представление плотности уровней $g(\varepsilon, \mu) = g_{\text{TF}}(\varepsilon, \mu) + g_{\text{osc}}(\varepsilon, \mu)$ с фиксированной проекцией углового момента μ к оси симметрии, было предложено в [191] в целях квазиклассического исследования свойств *yrast*-области, в том числе для описания оболочечных эффектов, связанных с выстраиванием одночастичных угловых моментов в выражении для момента инерции сферического ядра.

Для вычисления квазиклассического момента инерции ядра Θ_x необходимо подставить разложение функции (5.2.6) в (5.2.4). Отметим, что в отличие от случая плотности уровней здесь наряду с замкнутыми траекториями ($\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$) нужно рассматривать также и такие траектории α , для которых ($\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$).

При вычислении момента инерции ограничимся бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной ямой, подобной аксиально-симметричной сфероидальной яме и рассмотрим два случая [194]:

- (1) *локальный* вклад, $S_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon_F)/\hbar = k_F L_\alpha \sim l1$, и
- (2) *нелокальный* вклады $k_F L_\alpha \gg 1$,

где L_α – длина траектории α в сфероидальной яме, k_F – импульс Ферми в единицах \hbar и $k_F = \sqrt{2m\varepsilon_F}/\hbar$.

В случае (1) наибольший вклад дают траектории $\alpha = \alpha' = \alpha_0$, имеющие наименьшую длину $L_{\alpha_0} = s = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \sim l1/k_F \ll R$, $k_F R \gg 1$, где R – радиус ядра. В целях упрощения вычислений в случае (1), подставляя $\alpha = \alpha' = \alpha_0$ в выражение для момента инерции Θ_x , переменные $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ преобразуем в переменные $\{\bar{\mathbf{r}}, \mathbf{s}\}$, где $\bar{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, $\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Функцию Грина G_{α_0} в новых переменных $\bar{\mathbf{r}}, \mathbf{s}$ для траекторий наименьшей длины α_0 ($s/R \ll 1$), можно представить в

простой аналитической форме

$$G_{\alpha 0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) \approx G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 s} \exp(iks), \quad s = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|,$$

$$k = \sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}}. \quad (5.2.7)$$

Это соотношение для функции Грина мы будем использовать в локальном приближении (1) при выводе гладкой части момента инерции (5.2.4).

§5.2.3 Гладкая составляющая момента инерции

После перехода от переменных интегрирования \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 в терминах $\alpha = \alpha' = \alpha_0$ в (5.2.4) к новым переменным $\bar{\mathbf{r}}$ и \mathbf{s} , можно вычислить выражение для момента инерции Θ_x аналитически в локальном приближении (5.2.7): $G_{\alpha 0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) \approx G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) \equiv G_0(s, \varepsilon)$, $l_{x1}l_{x2} \approx l_x^2$,

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_x &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\varepsilon n(\varepsilon) \int d\mathbf{r}_1 \int d\vec{r}_2 l_{x1} l_{x2} \times \\ &\quad \times [G_{\alpha 0}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \varepsilon - \hbar\omega) |m G_{\alpha 0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \varepsilon) \\ &\quad + G_{\alpha 0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \varepsilon + \hbar\omega) |m G_{\alpha 0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \varepsilon)] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\varepsilon n(\varepsilon) \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 l_{x1} l_{x2} \times \\ &\quad \times \left[-\frac{m}{2\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\hbar^2} e^{-\frac{i}{\hbar}|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|p(\mathbf{r})} - \frac{m}{2\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar}|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|p(\mathbf{r})} \right] \times \\ &\quad \times \left(-\frac{m}{2\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\hbar^2} \right) \sin \left(\frac{1}{\hbar}|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|p(\mathbf{r}) \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\varepsilon n(\varepsilon) \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 l_{x1} l_{x2} \frac{m^2}{4\pi^2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2\hbar^4} \\ &\quad \times \sin \left(\frac{1}{\hbar}|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|p(\mathbf{r}) \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[\cos \left(\frac{1}{\hbar} |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| p(\mathbf{r}) \right) - i \sin \left(\frac{1}{\hbar} |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| p(\mathbf{r}) \right) + \right. \\
 & \left. + \cos \left(\frac{1}{\hbar} |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| p(\mathbf{r}) \right) + i \sin \left(\frac{1}{\hbar} |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| p(\mathbf{r}) \right) \right] = \\
 & = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\varepsilon n(\varepsilon) \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 l_{x1} l_{x2} \times \\
 & \times \frac{m^2}{4\pi^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 \hbar^4} \sin \left(\frac{1}{\hbar} |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| p(\mathbf{r}) \right) \cos \left(\frac{1}{\hbar} |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| p(\mathbf{r}) \right). \tag{5.2.9}
 \end{aligned}$$

В результате простых манипуляций приходим к следующему соотношению

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Theta}_x &= \frac{4}{\pi} \int_0^\infty d\varepsilon n(\varepsilon) \int d\bar{\mathbf{r}} \int ds l_x^2 \text{Im} G_0(s, \varepsilon) \text{Re} G_0(s, \varepsilon) \\
 &= \frac{m^2}{2\pi^3 \hbar^4} \int_0^\infty d\varepsilon n(\varepsilon) \int d\bar{\mathbf{r}} \int ds l_x^2 \frac{\sin(2ks)}{s^2}. \tag{5.2.1}
 \end{aligned}$$

При интегрировании по \mathbf{s} в последнем выражении (5.2.9) удобно использовать локальную ($\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1$) сферическую систему координат с центром в точке $\mathbf{r}_1 \approx \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$ и полярную ось z_s , проходящую через центр симметрии и точку \mathbf{r} (см. рис. 5.2.1). Также будем использовать зависимость проекции классического одночастичного углового момента $\hat{l}_{x\nu}$ ($\nu = 1, 2$) от пространственных координат \mathbf{r}_ν и импульса \mathbf{p}_ν , т.е. $\mathbf{l}_\nu = \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{p}_\nu$ на ось x . Точное выражение для оператора проекции углового момента l_x на ось вращения x есть

$$l_x^2 = r_\perp^2 p^2, \quad r_\perp^2 = y^2 + z^2. \tag{5.2.10}$$

Поэтому интегралы по $d\mathbf{s} = s^2 ds \sin \theta_s d\theta_s d\varphi_s$ могут быть вычислены аналитически в пределах s от 0 до $2R(\theta)$ (где $R(\theta)$ радиус сферы, а θ_s и φ_s – соответственно углы с пределами $0 \leq \theta_s \leq \pi$ и $0 \leq \varphi_s \leq 2\pi$). Следуя методу усреднения Стру-

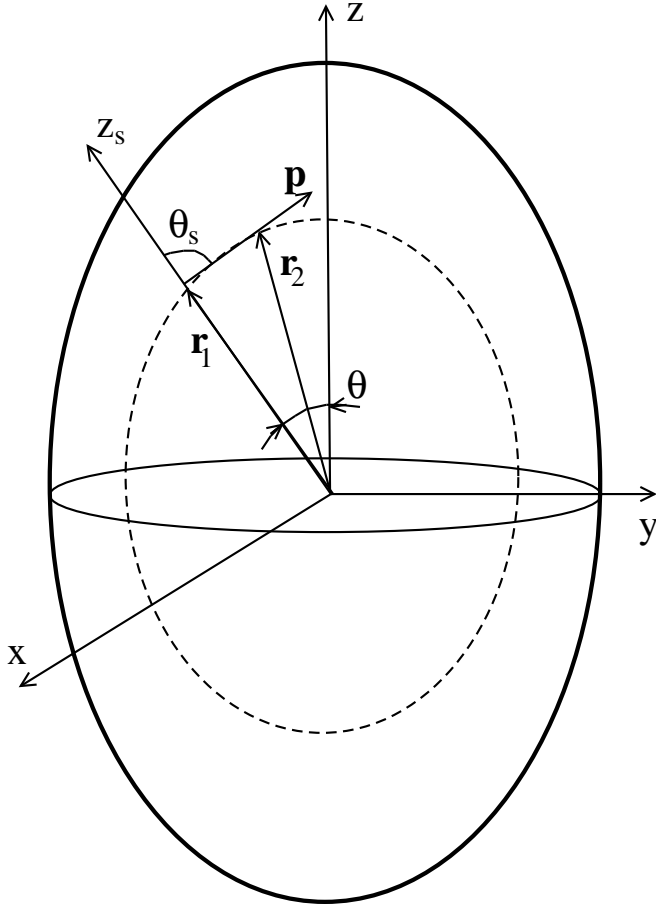


Рис. 5.2.1: Сферическая система координат с полярными осями z и z_s , используемая при интегрировании по короткой траектории α_0 без отражений от стенок потенциальной ямы. Прерывистой линией обозначена круговая орбита частицы на плоскости oyz , вращение ядра происходит вокруг оси ox , перпендикулярной к оси симметрии oz . Через \mathbf{p} обозначен импульс частицы (касательная к круговой орбите на той же плоскости).

тинского [195] получим

$$\tilde{\Theta}_x = \frac{m^2}{2\pi^3\hbar^4} \int_0^\infty d\varepsilon \tilde{n}(\varepsilon) p^2 \int d\bar{\mathbf{r}} (y^2 + z^2) \left\langle \int d\mathbf{s} \frac{\sin(2ks)}{s^2} \right\rangle_{av}. \quad (5.2.11)$$

Вычисляя интеграл по \mathbf{s} в сферической системе координат, как показано на рис. 5.2.1, положим усредненное значение $\sin^2(2kR(\theta))$, обозначенное через $\langle \dots \rangle_{av}$, равным $1/2$. Здесь \tilde{n} есть гладкая часть чисел заполнения [196]. Используя также соотношение для усредненной плотности частиц,

$$\tilde{\rho} = 2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \tilde{n}(\varepsilon), \quad (5.2.12)$$

окончательно приходим к следующему выражению для момента инерции

$$\tilde{\Theta}_x = m\tilde{\rho} \int_V (y^2 + z^2) d\mathbf{r}. \quad (5.2.13)$$

Подставляя выражение для чисел заполнения Ферми

$$\tilde{n} = \frac{1}{1 + e^{\frac{\varepsilon - \lambda}{T}}}$$

в выражение для плотности частиц (5.2.12) мы можем найти температурную зависимость момента инерции. При малых температурах $T \ll \varepsilon_F$, имеем

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty p^2 dp \tilde{n} \approx \rho_{\text{TF}} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{T}{\varepsilon_F} \right)^2 \right], \quad \rho_{\text{TF}} = \frac{p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad (5.2.14)$$

где ρ_{TF} – Томас-Фермиевская компонента (объемный член) плотности частиц. Интегрирование по импульсу частицы \mathbf{p} выполнили в сферической системе координат по частям, переходя от переменной интегрирования p к новой переменной $x = (\varepsilon - \lambda)/T$. Устремляя нижний предел интегрирования по x до $-\infty$ для $T \ll \lambda \approx \varepsilon_F$ в выражении (5.2.14), воспользовались разложением Зоммерфельда $d\tilde{n}(x)/dx$ по малому параметру T/ε_F , до членов второго порядка включительно.

Как можно было и ожидать, соотношение (5.2.13) представляет собой твердотельный момент инерции [197]. В частности, в случае сфероидальной ямы с $a = b$ приходим к хорошо известному соотношению,

$$\tilde{\Theta}_x = \frac{4\pi m}{15} a^2 c \tilde{\rho} (a^2 + c^2) = \frac{1}{5} m A (a^2 + c^2),$$

$$\tilde{\rho} = \frac{A}{V}, \quad V = \frac{4\pi}{3} a^2 c, \quad (5.2.15)$$

где V – объем сфероида. В пределе же сферической ямы бесконечной глубины получаем следующее твердотельное соот-

ношение [197]:

$$\tilde{\Theta} = \frac{8\pi}{15} m \tilde{\rho} R^5 = \frac{2}{5} m A R^2, \quad (5.2.16)$$

где R – радиус сферической ямы. Этот твердотельный результат также находится в хорошем согласии с квазиклассическим выражением для «классического» вращения сферических ядер вокруг оси симметрии [191].

§5.3 Оболочечные поправки к моменту инерции при коллективном вращении

Твердотельный момент инерции Θ_x^{rig} , возникающий при вращении вокруг оси, перпендикулярной к оси симметрии x

$$\Theta_x = m \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) r_{\perp x}^2, \quad r_{\perp x}^2 = y^2 + z^2, \quad (5.3.2)$$

при произвольной форме потенциала, может быть определен через плотность частиц следующим образом:

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{d_s}{\pi} Im \int d\varepsilon n(\varepsilon) [G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon)]_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}}, \quad (5.3.3)$$

Здесь подразумевается, что функция Грина G представлена в виде разложения по периодическим траекториям (5.2.6), а интегрирование производится по всему спектру энергии.

Представляя квазиклассическую функцию Грина в виде суммы $G = G_{\alpha_0} + G_{osc}$ гладкой и осциллирующей частей, получим:

$$\rho_{scl}(\mathbf{r}) = \rho_{TF}(\mathbf{r}) + \delta\rho_{scl}(\mathbf{r}), \quad (5.3.4)$$

где

$$\rho_{TF}(\mathbf{r}) = -\frac{d_s}{\pi} Im \int d\varepsilon n(\varepsilon) [G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon)]_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = \frac{d_s p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3}, \quad (5.3.5)$$

и

$$\delta\rho_{scl}(\mathbf{r}) = -\frac{d_s}{\pi} \text{Im} \int d\varepsilon \delta n(\varepsilon) [G_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon)]_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}}. \quad (5.3.6)$$

В последнем выражении мы использовали для чисел заполнения n также представление в виде суммы $n = \tilde{n} + \delta n$ (см. [196]).

Подставляя теперь (5.2.3) в (5.2.1), получаем для момента инерции выражение Θ_x^{rig} в виде суммы гладкой и флуктуирующей частей:

$$\Theta_{xscl}^{rig} = \Theta_{xTF}^{rig} + \delta\Theta_{xscl}^{rig}. \quad (5.3.7)$$

Здесь Θ_{xTF}^{rig} – Томас-Фермиевская компонента, связанная с соответствующей частью выражения для плотности частиц и определяемая как

$$\Theta_{xTF}^{rig} = m \int d\mathbf{r} \rho_{TF}(\mathbf{r}) r_{\perp x}^2 = \frac{md_s}{6\pi^2\hbar^3} \int d\mathbf{r} p_F^3 r_{\perp x}^2. \quad (5.3.8)$$

Флуктуирующая же часть представляет собой квазиклассическое разложение осциллирующей компоненты функции Грина по периодическим орбитам:

$$\begin{aligned} \delta\Theta_{xscl}^{rig} &= m \int d\mathbf{r} \delta\rho(\mathbf{r}) r_{\perp x}^2 = \\ &= -\frac{md_s}{\pi} \text{Im} \sum_{\alpha \neq \alpha} \int d\varepsilon \delta n(\varepsilon) \int d\mathbf{r} \mathcal{A}_\alpha(\mathbf{r}, \varepsilon) r_{\perp}^2 \times \\ &\times \left\{ \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) - \frac{i\pi}{2} \mu_\alpha \right] \right\}_{\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (5.3.8')$$

Пространственный интеграл вычислим методом стационарной фазы (МСФ) [181,198]. Условия стационарности фазы имеют вид:

$$\left[\frac{\partial S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon)}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{\partial S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon)}{\partial \mathbf{r}_2} \right]_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} \equiv (-\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} = 0, \quad (5.3.9)$$

откуда следует, что выживают только те орбиты, для которых $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$ (периодические орбиты). Поскольку квантовые средние $\langle \kappa^2 \rangle / \varepsilon$ являются гладкими функциями от ε по сравнению с другими факторами, например, такими как δn , то можем вычислить интеграл по ε при $\varepsilon = \lambda$. Например, в случае ГО, $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle \propto x_m^2 \propto \varepsilon$ и $\langle z^2 \rangle \propto z_m^2 \propto \varepsilon$, где x_m , y_m и z_m максимальные значения координат x , y and z при заданном значении ε , $|x| \leq x_m$, $|y| \leq y_m$ and $|z| \leq z_m$. Поэтому,

$$x_m = y_m = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m\omega_{\perp}^2}}, \quad z_m = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m\omega_z^2}}. \quad (5.3.10)$$

Следовательно, преимущественный вклад в интеграл (5.3.8') дают только периодические орбиты. Как и в случае оболочечных поправок к плотности уровней δg_{scl} , условие стационарности фазы тождественно выполняется для любых классически допустимых областей вырожденного ($\mathcal{K} \geq 3$) периодического движения (например, вклад трехмерных 3D-орбит в потенциал ГО). Например, для экваториальных орбит ($\mathcal{K} = 2$) фаза стационарна на экваториальной плоскости $z = 0$. Для этого будем использовать общее квантовое соотношение для плотности уровней и функции Грина:

$$g(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \int d\mathbf{r} [G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon)]_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}}, \quad (5.3.11)$$

которое служит основой при вычислении оболочечных поправок к плотности уровней δg_{scl} и свободной энергии δF в рамках теории периодических орбит [18,192].

Поэтому, сначала рассмотрим основные квазиклассические соотношения для плотности уровней δg_{scl} и свободной энергии δF . Затем в качестве простого примера будем рассматривать деформированный гармонический осциллятор.

§5.3.1 Оболочечные поправки к плотности уровней через оболочечные поправки к энергии и свободной энергии

Теория периодических орбит позволяет выполнить пространственное интегрирование по \mathbf{r} в выражении для квазиклассической функции G_1 с помощью метода стационарной фазы:

$$\begin{aligned} \delta g_{scl}(\varepsilon) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \int d\mathbf{r} [G_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon)]_{\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}} \approx \\ &\approx \text{Re} \sum_{\beta} \delta g_{\beta}(\varepsilon), \quad g_{\beta}(\varepsilon) = \mathcal{B}_{\beta} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \beta(\varepsilon) - i \frac{\mu_{\beta}}{2} \right]. \end{aligned}$$

Здесь сумма по β пробегает по всем периодическим орбитам (или, при наличии вырождения, по семействам периодических орбит) в заданном потенциале, \mathcal{B}_{β} – амплитуда осцилляций, зависящая от фактора стабильности, $S_{\beta}(\varepsilon)$ – интеграл действия вдоль периодической орбиты β и μ_{β} – индекс Маслова, связанный с точками поворота и каустик [192,199]. Полную плотность уровней тогда можно представить как сумму

$$g_{scl}(\varepsilon) = g_{ETF}(\varepsilon) + \delta g_{scl}(\varepsilon), \quad (5.3.12)$$

где $g_{ETF}(\varepsilon)$ – гладкая (расширенная Томас-Фермиевская) часть (см. §5.2.2).

Выражение для оболочечной поправки δU_{scl} к энергии U (при нулевой температуре) в квазиклассическом приближении также может быть выражено в терминах периодических орбит через плотность уровней: $\delta g_{\beta}(\varepsilon)$ [18],

$$\delta U_{scl} = \text{Re} \sum_{\beta} \delta U_{\beta}, \quad \delta U_{\beta} = d_s \frac{\hbar^2}{t_{\beta}} \delta g_{\beta}(\varepsilon), \quad (5.3.13)$$

где t_{β} – время движения вдоль периодической орбиты β и $\delta g_{\beta}(\lambda)$ – β -компонент $\delta g_{\beta}(\varepsilon)$ в сумме по периодическим орбитам при энергии $\varepsilon = \lambda$ (λ – химический потенциал). В работе

[18] было представлено также выражение для оболочечной поправки в терминах периодических орбит к энтропии $\delta\mathcal{S}_{scl}$:

$$\delta\mathcal{S}_{scl} = \frac{1}{T} Re \sum_{\beta} \delta\Omega_{\beta}(T, \lambda) [\pi \mathcal{Z}_{\beta} \coth(\pi \mathcal{Z}_{\beta}) - 1], \quad (5.3.14)$$

где $\delta\Omega_{\beta}$ – оболочечная поправка к термодинамическому потенциалу $\delta\Omega_{scl}$, обусловленная периодическими орбитами [200],

$$\delta\Omega_{scl}(T, \lambda) = Re \sum_{\beta} \delta\Omega_{\beta}(T, \lambda), \quad \delta\Omega_{\beta} = \delta U_{\beta} Q(\mathcal{Z}_{\beta}). \quad (5.3.15)$$

Температурный фактор

$$Q(\mathcal{Z}) = \frac{\pi \mathcal{Z}}{\sinh(\pi \mathcal{Z})}, \quad \mathcal{Z}_{\beta} = \frac{t_{\beta} T}{\hbar}, \quad (5.3.16)$$

обеспечивает сходимость $\delta\Omega_{scl} \rightarrow \delta U_{scl}$ в пределе нулевой температуры $T \rightarrow 0$ и экспоненциальное уменьшение при больших значениях T ($\sim \exp(-\pi T t_{\beta}/\hbar)$). Квазиклассическая поправка к свободной энергии δF_{scl} при фиксированной температуре T и фиксированном количестве частиц (протонов и нейтронов) может быть вычислена через оболочечную поправку к термодинамическому потенциалу $\delta\Omega$ при фиксированном значении температуры T и химическом потенциале λ , взятом при постоянном значении объема системы [192,200,201]

$$\delta F_{scl}(T, N) = \delta\Omega_{scl}(T, \lambda) = \sum_{\beta} \delta F_{\beta}, \quad \delta F_{\beta} = \delta U_{\beta} Q(\mathcal{Z}_{\beta}). \quad (5.3.17)$$

С помощью приведенных выражений из (5.3.17), (5.3.14) и (С6) получаем для поправок к внутренней энергии δE соотношение

$$\delta E_{scl} = \delta F_{scl} + T\delta\mathcal{S} = \sum_{\beta} \delta U_{\beta} \cosh(\pi \mathcal{Z}) Q^2(\mathcal{Z}_{\beta}). \quad (5.3.18)$$

§5.3.2 Пример гармонического осциллятора

В целях демонстрации квантовых и квазиклассических соотношений рассмотрим точно-решаемую модель деформированного ГО:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} [\Omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + \Omega_z^2 z^2]. \quad (5.3.19)$$

В аксиально-симметричном ГО желательно рассмотреть два отдельных случая: рационального и иррационального отношений частот Ω_{κ} . Помимо условия сохранения объема $\omega_{\perp}^2 \Omega_z = \Omega_0^3$ введем также и параметр деформации $\eta = \Omega_{\perp} / \omega_z$ и которые связаны между собой соотношениями

$$\Omega_{\perp} = \Omega_0 \eta^{1/3}, \quad \Omega_z = \Omega_0 \eta^{-2/3}. \quad (5.3.20)$$

Следуя [202] заметим, что семейства периодических орбит (фигуры Лиссажу) имеют классическое вырождение ¹ $\mathcal{K} = 4$ и 2 в зависимости от отношения частот (соизмеримости или несоизмеримости).

Квантовый гармонический осциллятор

Точная диагонализация аксиально-симметричного гамильтониана для ГО во вращающейся системе координат при коллективном вращении, позволяет получить значения одночастичных энергий $\varepsilon_i(\omega)$ и моментов инерции $\Theta_x(\omega)$ в зависимости от частоты вращения ω [203]. Нами было проведено обобщение этой формулы на случай произвольных температур T через бозевские осцилляторные числа заполнения (детали вывода этой формулы приведены в приложении *B* к этой главе).

¹Под классическим вырождением \mathcal{K} подразумевается количество независимых параметров (интегралов движения помимо энергии ε) характеризующих орбиту из заданного семейства с действием $S_{\beta}(\varepsilon)$.

В адиабатическом случае (т.е. в пределе малых частот $\omega \rightarrow 0$) получаем выражение ω ,

$$\varepsilon_i = \hbar\Omega_{\perp} (N_{\perp i} + 1) + \hbar\Omega_z \left(N_{zi} + \frac{1}{2} \right), \quad N_{\perp i} = N_{xi} + N_{yi}, \quad (5.3.21)$$

где N_{xi} , N_{yi} и N_{zi} – числа осцилляторных квантов. Из (5.2.5) для момента инерции $\Theta_x(\omega)$ [202] в адиабатическом пределе $\omega \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} \Theta_x &= \left(\frac{\partial I_x}{\partial \omega} \right)_{\omega=0} = \\ &= \frac{d_s \hbar}{2\Omega_{\perp}\Omega_z} \left[\frac{(\Omega_z - \omega_{\perp})^2}{\Omega_{\perp} + \Omega_z} (\aleph_y + \aleph_z) + \frac{(\Omega_z + \Omega_{\perp})^2}{\Omega_{\perp} - \Omega_z} (\aleph_z - \aleph_y) \right], \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

где

$$\aleph_{\kappa} = \sum_i n_i \left(N_{i\kappa} + \frac{1}{2} \right). \quad (5.3.23)$$

Полная энергия системы при этом равна

$$E(\omega) = E_{\omega} + \omega I_x = d_s \hbar (2\Omega_{\perp} \aleph_y + \Omega_z \aleph_z) + \frac{1}{2} \omega^2 \Theta_x \quad (5.3.24)$$

(мы воспользовались условием аксиальной симметрии $\aleph_x = \aleph_y$).

В целях дальнейших удобств для сравнения с квазиклассическими результатами исключим с помощью условия статистически равновесного вращения

$$\Omega_x \aleph_x = \Omega_y \aleph_y = \Omega_z \aleph_z$$

квантовые числа \aleph_y и \aleph_z , соотношение для твердотельного момента инерции [189,190]

$$\Theta_x^{rig} = d_s m \sum_i n_i \langle i | y^2 + z^2 | i \rangle = d_s \hbar \left(\frac{\aleph_y}{\Omega_{\perp}} + \frac{\aleph_z}{\Omega_z} \right),$$

перепишем в терминах свободной энергии $F(\omega = 0)$:

$$\Theta_x = \frac{1}{\Omega_{\perp}^2 (2\eta^2 - 1) (\eta^2 - 1)} \times \\ \times [\Omega_{\perp}^2 (2\eta^4 + 9\eta^2 + 1) \Theta_x^{rig} - 4\eta^2 (1 + \eta^2) F]. \quad (5.3.25)$$

Соответственно для оболочечных поправок $\delta\Theta_x$ имеем выражение, пропорциональное $\delta\Theta_x^{rig}$ и δF :

$$\delta\Theta_x = \frac{1}{\Omega_{\perp}^2 (2\eta^2 - 1) (\eta^2 - 1)} \times \\ \times [\Omega_{\perp}^2 (2\eta^4 + 9\eta^2 + 1) \delta\Theta_x^{rig} - 4\eta^2 (1 + \eta^2) \delta F]. \quad (5.3.26)$$

СЛУЧАЙ НЕСОИЗМЕРИМЫХ ЧАСТОТ

Рассмотрим случай частично соизмеримых частот аксиально-симметричного ГО с иррациональным значением η . В этом случае изолированные 3-мерные ($3D$) ($\mathcal{K} = 4$) семейства орбит отсутствуют и преобладающими являются двухмерные ($2D$) экваториальные (EQ) периодические орбиты с меньшим вырождением $\mathcal{K} = 2$, с некоторым числом периодов n на экваториальной плоскости (x, y) , перпендикулярном оси симметрии z . Действие S_n для семейства периодических орбит $\beta = n$, линейно по энергии ε

$$S_n(\varepsilon) = \varepsilon t_n, \quad t_n = n\mathcal{T}_{eq}, \quad (5.3.27)$$

где период \mathcal{T}_{eq} примитивной орбиты (с частотой Ω_{eq} и с $n = 1$) из некоторого семейства β на плоскости (x, y) дается выражением

$$\mathcal{T}_{eq} = \frac{2\pi}{\Omega_{eq}} = \frac{2\pi n_{\perp}}{\Omega_{\perp}} = \frac{2\pi n_z}{\Omega_z}. \quad (5.3.28)$$

Вклад экваториальных ($\mathcal{K} = 2$) орбит в плотность уровней выражается формулой [202]

$$\delta g_{eq}(\varepsilon) = \sum_n \delta g_n^{eq}(\varepsilon), \quad \delta g_n^{eq}(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{(\hbar\Omega_{\perp})^2 \sqrt{\mathcal{F}_n}} \sin \left[2\pi n \frac{\varepsilon}{\hbar\Omega_{\perp}} \right], \quad (5.3.29)$$

где \mathcal{F}_n – фактор стабильности Гуцвиллера [180,199],

$$\mathcal{F}_n = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi n \Omega_z}{\Omega_{eq}} \right). \quad (5.3.30)$$

Индекс Маслова учтен в аргументе синуса уравнения (5.3.29). Для вкладов таких орбит в оболочечные поправки к энергиям δU_{scl} , имеем выражение:

$$\delta U_{eq} = Re \sum_n \delta U_n^{eq}, \quad \delta U_n^{eq} = \frac{2d_s \lambda \Omega_{eq}^2}{(2\pi \Omega_{\perp} n)^2 \sqrt{\mathcal{F}_n}} \sin(2\pi n \lambda / \hbar \Omega_{eq}). \quad (5.3.31)$$

СОИЗМЕРИМЫЕ ЧАСТОТЫ

3D-ОРБИТЫ. В случае рациональных отношений частот

$$\Omega_{\perp} : \Omega_z = n_{\perp} : n_z, \quad (5.3.32)$$

где n_{\perp} и n_z целые числа, период движения вдоль трехмерной периодической орбиты ($\mathcal{K} = 4$) равен

$$\mathcal{T}_{3d} = \frac{2\pi}{\Omega_{3D}} = \frac{2\pi n_{\perp}}{\Omega_{\perp}} = \frac{2\pi n_z}{\Omega_z} = \frac{2\pi}{\Omega_0} (n_{\perp}^2 n_z)^{1/3}, \quad (5.3.33)$$

где $\Omega_{3d} = 2\pi/\mathcal{T}_{3d}$ – частота обращения вдоль 3D-орбиты. Действие вдоль 3D-орбиты задается выражением (5.3.27) с $t_n = n\mathcal{T}_{3d}$, $S_n^{3d}(\varepsilon) = n\varepsilon\mathcal{T}_{3d}$.

Для вклада поправок $\delta g_{scl}(\varepsilon)$ от 3D-орбит в плотность уровней в соизмеримом случае, имеем выражение, аналогичное (5.3.29):

$$\delta g_{3d}(\varepsilon) = \sum_n \delta g_n^{3d}(\varepsilon),$$

$$\delta g_n^{3d}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{(\hbar \Omega_0)^3} \cos \left[2\pi n \frac{\varepsilon}{\hbar \Omega_{3d}} - \pi n (2n_{\perp} + n_z) \right]. \quad (5.3.34)$$

Здесь $\Omega_{3d} = 2\pi/\mathcal{T}_{3d}$ – частота ГО, определяемая периодом \mathcal{T}_{3d} .

В случае соизмеримых частот EQ-орбиты дают вклад наряду с 3D-орбитами. Это приводит к интерференции вкладов

таких орбит в оболочечных поправках к плотности уровней и свободной энергии. В несферическом случае ($\eta > 1$) EQ орбиты образуют изолированные семейства и дают вклад в δg_{eq} , поэтому для плотности уровней имеем:

$$\delta g_{scl}(\varepsilon) = \delta g_{3d}(\varepsilon) + \delta g_{eq}(\varepsilon). \quad (5.3.35)$$

Для оболочечных поправок к внутренней энергии δU_{scl} получаем выражение, аналогичное (5.3.31):

$$\delta U_{3d} = Re \sum_n \delta U_n^{3d},$$

$$\delta U_n^{3d} = \frac{d_s \lambda^2 \Omega_{3d}^2}{(2\pi)^2 \hbar \Omega_0^3 n^2} \exp \left\{ i \left[\frac{2\pi n \lambda}{\hbar \Omega_{3d}} - \pi n (2n_{\perp} + n_z) \right] \right\}. \quad (5.3.36)$$

Таким образом, для случая соизмеримых частот оболочечные поправки к внутренней энергии δU_{scl} задаются суммой

$$\delta U_{scl} = \delta U_{3d} + \delta U_{eq}. \quad (5.3.37)$$

§5.3.3 Оболочечные поправки к моменту инерции

Аналогично выводу осциллирующей компоненты δg_{scl} плотности уровней (5.3.12) и оболочечных поправок к свободной энергии δF_{scl} (5.3.17), а также используя (5.3.18), из (5.3.8') получаем оболочечные поправки к моменту инерции через оболочечные поправки к свободной энергии:

$$\delta \Theta_{\kappa scl}^{rig} = \frac{m}{\lambda} Re \sum_{\beta} \langle r_{\perp \kappa}^2 \rangle_{\beta, \lambda} \delta F_{\beta}, \quad (5.3.38)$$

где

$$\langle r_{\perp \kappa}^2 \rangle_{\beta, \varepsilon} = \frac{\int d\mathbf{r} \mathcal{A}_{\beta}(\mathbf{r}, \varepsilon) r_{\perp \kappa}^2}{\int d\mathbf{r} \mathcal{A}_{\beta}(\mathbf{r}, \varepsilon)}. \quad (5.3.39)$$

(при $\varepsilon = \lambda$), $\mathcal{A}_{\beta}(\mathbf{r}, \varepsilon)$ – амплитуда функции Грина для замкнутых орбит ($\kappa = x, y, z$). Интегрирование по \mathbf{r} производится по

классически доступной области пространства. Квазиклассическое соотношение (5.3.38) является общим выражением, не зависящим от формы потенциала. Например, в случае ГО, интегрирование по \mathbf{r} для вклада $3D$ -орбит, производится по $3D$ -объему, который заполнен семейством таких орбит, тогда как для учета вклада EQ -орбит, интегрирование ведется по $2D$ -области пространства (экваториальной плоскости $z = 0$), заполненного семействами экваториальных орбит.

Соотношение (5.3.39) может быть легко вычислено с помощью выражений для амплитуд функции Грина \mathcal{A}_β , используя для них явные выражения для $3D$ и EQ орбит, одновременно производя масштабное преобразование $x = x_m u$, $y = y_m v$ и $z = z_m w$ координат x , y и z . Окончательно получаем:

$$\delta\Theta_{x,scl}^{rig} = \frac{1 + \eta^2}{3\Omega_\perp^2} \delta F_{scl}, \quad \delta\Theta_{z,scl}^{rig} = \frac{2}{3\Omega_\perp^2} \delta F_{scl}, \quad (5.3.40)$$

где δF_{scl} выражается в виде суммы по орбитам (5.3.13), (5.3.17), (5.3.36).

Подставляя квазиклассическое выражение (5.3.38) для $\delta\Theta_\kappa^{rig}$ в (5.3.26) для $\delta\Theta_\kappa$, получим:

$$\delta\Theta_{x,scl} = \frac{1 + \eta^2}{3\Omega_\perp^2} \delta F_{scl}, \quad \delta\Theta_{z,scl} = \frac{2}{3\Omega_\perp^2} \delta F_{scl}. \quad (5.3.41)$$

Таким образом, используя общее соотношение (5.3.25) для момента инерции Θ_x , в рамках теории периодических орбит при малых температурах и $\hbar \rightarrow 0$, мы доказали, что момент инерции может быть представлен в виде

$$\Theta_{x,scl} = \frac{1 + \eta^2}{3\Omega_\perp^2} F_{scl}, \quad F_{scl} = F_{TF} + \delta F_{scl}. \quad (5.3.42)$$

Необходимо отметить, что соотношение (5.3.41) для $\delta\Theta_{x,scl}^{rig}$ было выведено без использования условия статистически равновесного вращения.

Подставляя квазиклассическое разложение по периодическим орбитам (5.3.17) для δF и используя (5.3.31), (5.3.36), из (5.3.41) получаем окончательное выражение для оболочечных поправок к квазиклассическому моменту инерции $\delta\Theta_x$ для ГО, основанного на МПВ. Заметим, что и $\delta\Theta_z$, и $\delta\Theta_x$ в случае соизмеримых частот определяются через трехмерные $3D$ и двумерные EQ -периодические орбиты через поправки к свободной энергии. Доминирующий вклад одного из этих семейств либо их совместный вклад зависит от величины параметра деформации, входящего в выражение для момента инерции ГО.

§5.4 Сравнение с квантовомеханическими результатами

На рис. 5.4.2 показано сравнение квазиклассических оболочечных поправок к энергиям δE при нулевой температуре $T = 0$ с точными квантовомеханическими результатами (см. (C7) в приложении C). При таком сравнении в качестве независимой переменной (вместо числа частиц N) удобно пользоваться химическим потенциалом λ .

В квантовомеханических вычислениях мы использовали аналитическое выражение для спектра ε_i деформированного гармонического осциллятора (5.3.21) имеющего аксиальную симметрию в цилиндрических координатах. При этом условие плато хорошо выполняется при следующих значениях параметра Гауссовской ширины γ и степени корректировочного полинома M (см. (C5)): $\gamma = 1.5 - 2.5$ и $M = 4 - 8$.

Вычисления были проведены при нескольких значениях критических деформаций η : $\eta = 1$ (сферический случай), случай малых деформаций $\eta = 1.2$ и супердеформации $\eta = 2$. В сферическом случае $\eta = 1$ имеем вклады только от вырожденных $\mathcal{K} = 4$ семейств $3D$ -орбит: $\delta E_{scl} = \delta U_{3d}$. Два по-

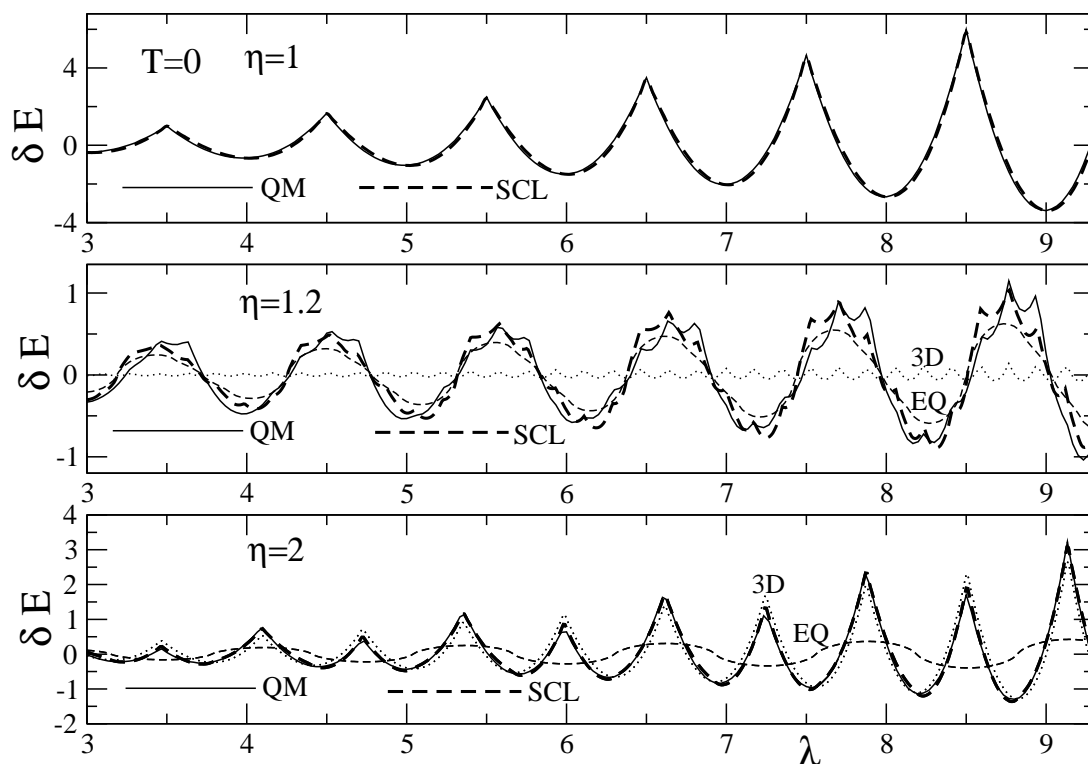


Рис. 5.4.2: Сравнение квантовомеханических QM (формула (C7)) и квазиклассических SCL (формула (5.3.37)) оболочечных поправок к энергиям δE в зависимости от химического потенциала λ для ГО в единицах $\hbar\Omega_0$ при критических значениях деформации $\eta = 1.0; 1.2$ и 2.0 . На двух нижних рисунках видны интерференции осцилляций оболочечных компонент δU_{3d} вырожденных семейств $3D$ орбит ($\mathcal{K} = 4$) с экваториальными δU_{eq} орбитами.

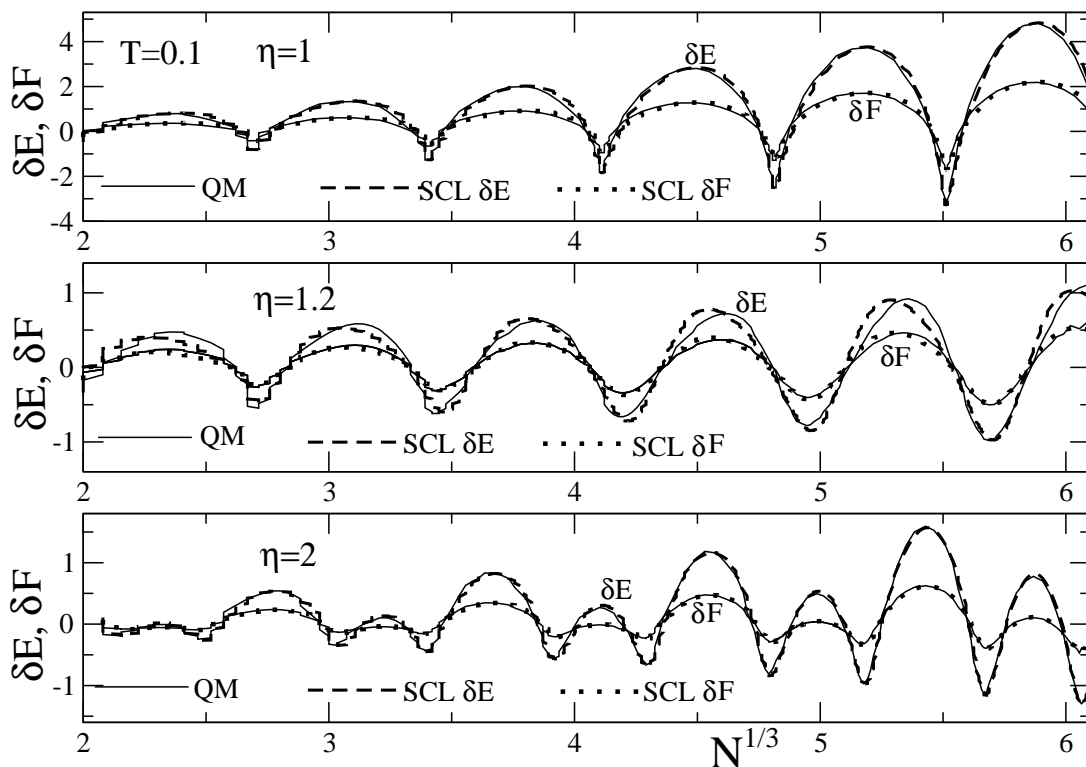


Рис. 5.4.3: Сравнение оболочечных поправок к внутренней δE и свободной δF энергиям в зависимости от числа частиц $N^{1/3}$ при температуре $T = 0.1$.

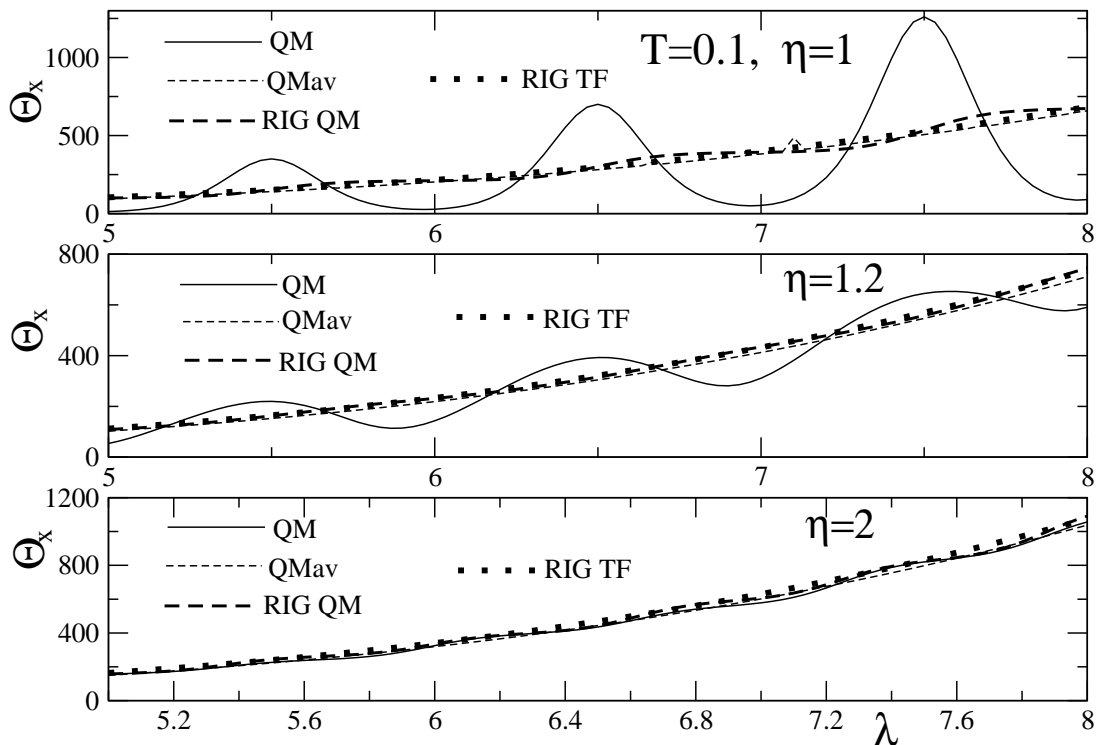


Рис. 5.4.4: Сравнение квантовомеханического QM момента инерции Θ_x (5.3.22) с его усредненной QM_{av} частью ($\tilde{\Theta}_x$) и твердотельным значением Θ_x^{rig} при статистически равновесном вращении в зависимости от химического потенциала λ (в единицах \hbar/ω_0) при критических деформациях $\eta = 1.0; 1.2$ и 2.0 .

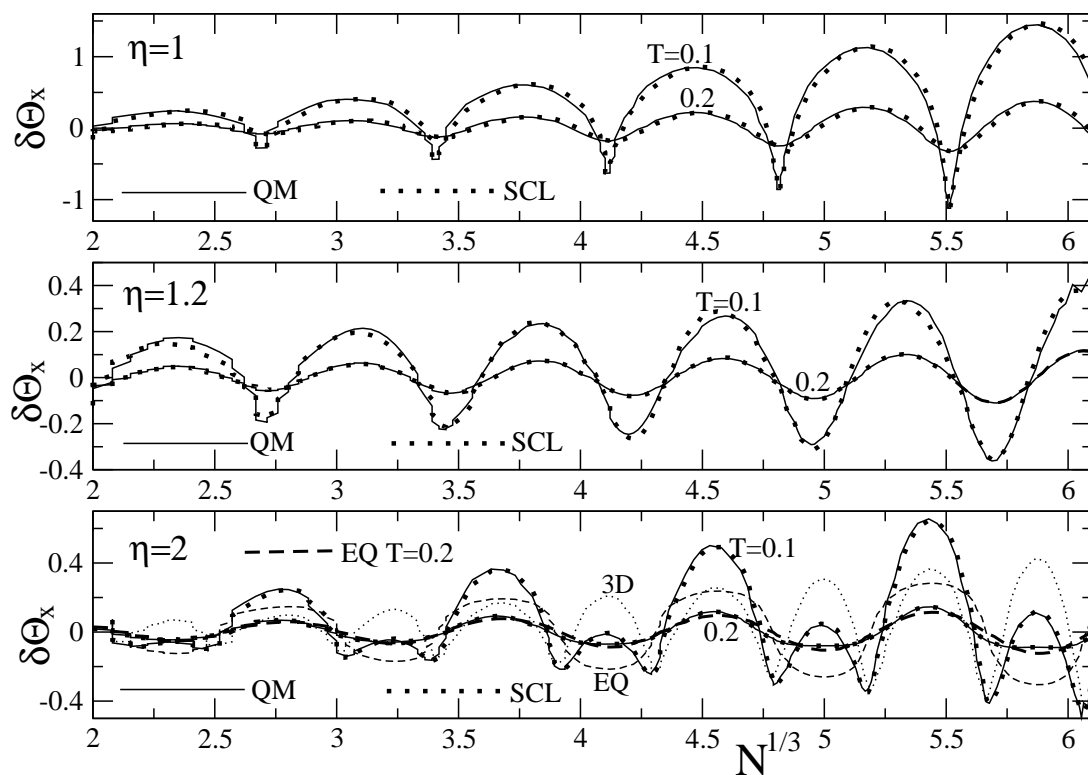


Рис. 5.4.5: Оболочечные поправки к моменту инерции $\delta\Theta_x$ при коллективном вращении в зависимости от числа частиц $N^{1/3}$, при температурах $T = 0.1$ и 0.2 . Квантовомеханические расчеты представлены сплошными линиями, квазиклассические – жирными точками. Также показаны вклады от трехмерных $3D$ (бледная кривая) и экваториальных EQ (пунктирная кривая) орбит.

следних же случая деформации на рис. 5.4.2 соответствуют точкам бифуркаций $\eta = 6/5$ и 2. При значении $\eta = 6/5$ преимущественный вклад дают экваториальные EQ -орбиты, поскольку трехмерные $3D$ -орбиты длинные и поэтому $\delta E_{scl} \approx \delta U_{eq}$. Однако на рисунках можно увидеть некоторые слабые флуктуации благодаря интерференционным эффектам между $2D$ и $3D$ -орбитами. В точке же бифуркации $\eta = 2$ флуктуации происходят гораздо сильнее благодаря существенному усилению эффекта интерференции между упомянутыми орбитами $3D$ (5.3.36) и EQ (5.3.31), которые обладают различными периодами. Из рисунка видно, что такие модуляции амплитуд осцилляций $3D$ -орбит с большим периодом \mathcal{T}_{3d} связаны со вкладом EQ -орбит с меньшим периодом \mathcal{T}_{eq} фактором 2: $\mathcal{T}_{3d} = 2\mathcal{T}_{eq}$. Эти модуляции соответствуют отношению $\hbar\Omega_{3d} = \hbar\Omega_{eq}/2$ между частотами движения вдоль $3D$ и EQ -периодических орбит, которые, в свою очередь, определяют периоды их вкладов в оболочечные поправки к моменту инерции $\delta\Theta_x$ в зависимости от химического потенциала λ . Отметим, что рис. 5.4.2 указывает на хорошее соответствие квантовомеханических и квазиклассических результатов при упомянутых деформациях $\eta = 1$ и 2.

На рисунке 5.4.3 показан вклад $T\delta S$ в оболочечные поправки к внутренней энергии δE , которая при малых значениях температуры $T \ll \hbar\Omega_0$ может быть рассмотрена как свободная энергия δF в зависимости от химического потенциала λ (или числа частиц $N^{1/3}$).

Процедура усреднения в соответствии с условием плато для δF , выполнена через термодинамический потенциал Ω (см. приложение С.1). При этом также получаем хорошее согласие между квантовомеханическими и квазиклассическими результатами для оболочечных поправок к внутренней δE и свободной δF энергиям (или к термодинамическому потенциалу большого канонического ансамбля $\delta\Omega$).

На рисунке 5.4.4 показан момент инерции для коллективного вращения (относительно оси ox) Θ_x в зависимости от λ при тех же критических значениях деформации. На рис. видны большие осцилляции, которые уменьшаются с ростом деформации благодаря уменьшению симметрии из-за перехода от сферической к аксиально-симметричной форме. Более четко это видно из верхней части рисунка для сферической формы. Заметим, что масштабы амплитуд таких осцилляций относительно усредненных значений $\bar{\Theta}$ достаточно большие по сравнению с оболочечными поправками к твердотельному моменту инерции $\delta\Theta_x^{rig}$. Исходя из данного сравнения, можно подчеркнуть, что сведение полного момента инерции Θ_x к оболочечным поправкам к твердотельному моменту инерции $\delta\Theta_x^{rig}$ позволяет свести оболочечные поправки в Θ_x к оболочечным поправкам к свободной энергии δF для полной свободной энергии (см. приложение С1).

Рисунок 5.4.5 показывает оболочечные поправки $\delta\Theta_x$ к моменту инерции Θ_x в зависимости от числа частиц $N^{1/3}$ для некоторых значений температуры T . Здесь наблюдается хорошее согласие квазиклассических расчетов с квантовомеханическими. В нижней части рисунка, при бифуркации, мы видим интерференционную картину трехмерных $3D$ и экваториальных EQ -орбит. Также видно, что с увеличением температуры происходит экспоненциальное уменьшение $\delta\Theta_x$, которое является следствием температурного фактора $Q(t_\beta T/\hbar)$ (5.3.16). Вклад EQ -орбит в $\delta\Theta_x$ становится доминирующим при температурах $T \sim 0.2\hbar\Omega_0 \approx 40/\mathcal{A}^{1/3}$ MeV ~ 1.4 МэВ для ядер с $\mathcal{A} \sim 200$, что также является следствием температурного фактора $Q(t_\beta T/\hbar)$. Исчезновение оболочечных эффектов в $\delta\Theta_x$ происходит при критической температуре $T_{cr} = \hbar\Omega_{eq}/\pi$, аналогично как и в случае для оболочечных поправок к свободной энергии δF . Отметим, что такие же результаты получены для оболочечных поправок к моменту

инерции $\delta\Theta_z$ относительно оси симметрии z (выстраивание одночастичных угловых моментов вдоль оси z) в зависимости от числа частиц $N^{1/3}$, поскольку $\delta\Theta_\kappa \propto \delta F$ при $\kappa = x, z$. В частности, в сферическом пределе $\eta \rightarrow 1$ имеем $\delta\Theta_x \rightarrow \delta\Theta_z$.

Приложение А: Вращение относительно оси симметрии

Многие физические величины при вращении ядра вокруг оси симметрии $\kappa = z$, удобно выразить через производящую функцию, определяемую как

$$\ln Z(\tau, \omega, \lambda) = d_s \sum_i \ln \{1 + \exp [\tau (\lambda - \varepsilon_i + \omega \mu_i)]\}, \quad (\text{A1})$$

где $\tau = 1/T$, ω и λ – множители Лагранжа. Например, для проекции полного углового момента I_z , числа частиц N и энергии E_ω имеем соответственно выражения

$$I_z = T \frac{\partial \ln Z}{\partial \omega} = d_s \sum_i n_i^\omega \mu_i, \quad N = T \frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda} = d_s \sum_i n_i^\omega, \quad (\text{A2})$$

$$E_\omega = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \tau} = d_s \sum_i (\varepsilon_i - \omega \mu_i - \lambda) n_i^\omega,$$

$$n_i^\omega = \left\{ 1 + \exp \left[\frac{\varepsilon_i - \omega \mu_i - \lambda}{T} \right] \right\}^{-1}, \quad (\text{A3})$$

где n_i^ω фермионные числа заполнения, $\lambda^\omega = \lambda + \omega \mu_i$. Для полной энергии $E(\omega)$ тогда имеем соотношение

$$E(\omega) = E_\omega + \omega I_z = d_s \sum_i (\varepsilon_i - \lambda) n_i^\omega. \quad (\text{A4})$$

Для вычисления проекции I_z в (A2) удобно перейти от суммирования по одночастичным состояниям i к интегрированию по одночастичным энергиям ε и проекциям их угловых моментов μ :

$$I_z = d_s \int d\varepsilon \int d\mu \mu g(\varepsilon_\omega, \mu) n(\varepsilon_\omega), \quad \varepsilon_\omega = \varepsilon - \omega \mu, \quad (\text{A5})$$

где $n(\varepsilon)$ – фермиевские числа заполнения при $\omega = 0$, $g(\varepsilon, \mu)$ – плотность одночастичных уровней. Тогда момент инерции Θ_z для одночастичного выстраивания можно вычислить дифференцированием проекции $I_z(\omega)$ по ω . В адиабатическом приближении ($\omega \rightarrow 0$) получим

$$\begin{aligned} \Theta_z &= \left(\frac{\partial I_z}{\partial \omega} \right)_{\omega=0} = \\ &= d_s \sum_i \frac{\mu_i^2}{4T \cosh^2 [(\varepsilon_i - \lambda) / 2T]} = d_s \sum_i \mu_i^2 g_{Ti}(\lambda), \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

где $g_{Ti}(\lambda)$ получается из выражения

$$g_{Ti}(\varepsilon) = \frac{1}{4T \cosh^2 [(\varepsilon - \varepsilon_i) / 2T]} \quad (\text{A7})$$

при $\varepsilon = \lambda$:

$$g_{Ti}(\lambda) = - \left(\frac{dn(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\varepsilon_i}. \quad (\text{A8})$$

Усредняя по статистическому ансамблю, можно ввести температурную плотность уровней $g_T(\varepsilon)$, которая при $T \rightarrow 0$ совпадает с обычной (квантовой) плотностью уровней

$$g_T(\varepsilon) = \sum_i g_{Ti}(\varepsilon) \rightarrow g(\varepsilon) = \sum_i \delta(\varepsilon - \varepsilon_i). \quad (\text{A9})$$

Для момента инерции Θ_z в адиабатическом приближении тогда получим:

$$\begin{aligned} \Theta_z &= d_s \int d\varepsilon \int d\mu \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} [g(\varepsilon_\omega, \mu) n(\varepsilon_\omega)] \right\}_{\omega=0} = \\ &= -d_s \int d\varepsilon \int d\mu \mu^2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [g(\varepsilon, \mu) n(\varepsilon)]. \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

Подставляя квазиклассические выражения для плотности уровней

$$g_{scl}(\varepsilon, \mu) = g_{ETF}(\varepsilon, \mu) + \delta g_{scl}(\varepsilon, \mu), \quad g_{scl}(\varepsilon) = \int d\mu g_{scl}(\varepsilon, \mu), \quad (\text{A11})$$

в (A10), $\Theta_{z,scl}$ представляем в виде суммы гладкой и осциллирующей частей:

$$\Theta_{z,scl} = \Theta_{z,TF} + \delta\Theta_{z,scl}, \quad (\text{A12})$$

где Θ_z^{TF} – Томас-Фермиевская (гладкая) часть

$$\Theta_{z,TF} = d_s \langle \mu^2 \rangle_\lambda g_{TF}(\lambda) = m \int d\mathbf{r} (x^2 + y^2) \rho_{TF}(\mathbf{r}), \quad (\text{A13})$$

т.е., твердотельный момент инерции, а

$$\delta\Theta_{z,scl} = \frac{2d_s}{3} \int d\varepsilon \mu_{max}(\varepsilon) \frac{d\mu_{max}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \delta g(\varepsilon) \delta n(\varepsilon) - \quad (\text{A14})$$

соответствующая осциллирующая часть, которая получается, используя выражение

$$\delta g_{scl}(\varepsilon, \mu) = \frac{1}{2\mu_{max}} \theta(\mu_{max} - |\mu|) \delta g_{scl}(\varepsilon). \quad (\text{A15})$$

Приложение В: Точное решение для квантового осциллятора

Запишем выражение для Раусиана H_ω с помощью операторов рождения и уничтожения:

$$H_\omega = \sum_{\kappa} \hbar\Omega (a_{\kappa}^+ a_{\kappa} + 1/2) - \omega \ell_x, \quad (\text{B1})$$

где

$$\ell_x = \frac{\hbar}{2} \left[\frac{\Omega_y + \Omega_z}{\sqrt{\Omega_y \Omega_z}} (a_y a_z^+ + a_y^+ a_z) - \frac{\Omega_y - \Omega_z}{\sqrt{\Omega_y \Omega_z}} (a_y a_z + a_y^+ a_z^+) \right]. \quad (\text{B2})$$

Записывая операторы рождения $a_{\kappa}^+(\tau)$ и уничтожения $a_{\kappa}(\tau)$ в представлении Гейзенберга $a_{\kappa}(\tau) = e^{\tau H_\omega} a_{\kappa} e^{-\tau H_\omega}$ (где $\tau = it$ – мнимое время), приходим к динамическому уравнению для этих операторов в форме Лиувилля:

$$\dot{\mathbf{A}}(\tau) = \mathcal{L}\mathbf{A}(\tau), \quad (\text{B3})$$

где \mathbf{A} – матрица-столбец, \mathcal{L} – матрица с размерностью 4x4 (в единицах $\hbar = 1$):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_y \\ a_y^+ \\ a_z \\ a_z^+ \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\Omega_y & 0 & p & -q \\ 0 & \Omega_y & q & -p \\ p & -q & -\Omega_z & 0 \\ q & -p & 0 & \Omega_z \end{pmatrix},$$

$$p = \frac{\omega}{2} \frac{\Omega_y + \Omega_z}{\sqrt{\Omega_y \Omega_z}}, \quad q = \frac{\omega}{2} \frac{\Omega_y - \Omega_z}{\sqrt{\Omega_y \Omega_z}}. \quad (\text{B4})$$

Формальное решение уравнения (B3) есть $\mathbf{A}(\tau) = \Phi(\tau)\mathbf{A}(0)$, где $\Phi(\tau) = e^{\tau\mathcal{L}}$. Введя корреляционную матрицу,

$$K_{\nu\mu} = \langle A_\nu(\tau)A_\mu(0) \rangle = \langle A_\mu(0)A_\nu(0) \rangle, \quad (\text{B5})$$

для $K_{\nu\mu}$ получим систему уравнений:

$$\sum_{\lambda} [\Phi_{\nu\lambda}(\tau) - \delta_{\nu\lambda}] K_{\lambda\mu} = -M_{\nu\mu}, \quad (\text{B6})$$

где $M_{\nu\mu} = 1$ для $\nu = 1, \mu = 2$ и $\nu = 3, \mu = 4$, а все остальные элементы равны нулю. Из (B6) видно, что его решение имеет вид:

$$K = \mathcal{D}^{-1}M, \quad \mathcal{D}^{-1} = (\Phi(\tau) - \mathcal{I})^{-1}, \quad \Phi(\tau) = e^{\tau\mathcal{L}}, \quad (\text{B7})$$

где \mathcal{I} 4x4-единичная матрица. Оператор Лиувилля \mathcal{L} в (B3) имеет 4 собственных значения $\pm\omega_{\pm}$, которые равны

$$\Omega_{\pm}^2 = \omega^2 + \frac{\Omega_y^2 + \Omega_z^2}{2} \pm \frac{\Omega_y^2 - \Omega_z^2}{2} \sqrt{1 + \frac{8\Omega^2 (\Omega_y^2 + \Omega_z^2)}{\Omega_y^2 - \Omega_z^2}}. \quad (\text{B8})$$

Следовательно, матрица \mathcal{D}^{-1} может быть аппроксимирована кубическим полиномом, который должен удовлетворять известным условиям, сформулированным в [204,205] через неопределенные константы γ_{ν} ,

$$\mathcal{D}^{-1} = \sum_{\nu=0}^3 \gamma_{\nu} \mathcal{L}^{\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{B9})$$

Эти константы находятся из 4 линейных уравнений:

$$\sum_{\nu=0}^3 \gamma_{\nu} \Omega_{\pm}^{\nu} = N_{\pm i}, \quad \sum_{\nu=0}^3 (-1)^{\nu} \gamma_{\nu} \Omega_{\pm}^{\nu} = -(N_{\pm i} + 1),$$

$$N_{\pm i} = (e^{\tau\omega_{\pm}} - 1)^{-1}, \quad (\text{B10})$$

которые имеют простые решения

$$\gamma_0 = -\frac{1}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{(N_{-i} + 1/2) \Omega_+^3 - (N_{+i} + 1/2) \Omega_-^3}{\Omega_- \Omega_+ (\omega_+^2 - \Omega_-^2)},$$

$$\gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \frac{(N_{+i} + 1/2) \Omega_- - (N_{-i} + 1/2) \Omega_+}{\Omega_- \Omega_+ (\Omega_+^2 - \Omega_-^2)}. \quad (\text{B11})$$

Подставляя выражения (B11) в (B9), вычисляем матричные элементы K_{ij} корреляционной матрицы. После достаточно громоздких вычислений среднего значения проекции одночастичного углового момента, с помощью (B2) получим:

$$\omega \langle \ell_x \rangle_i = p (K_{14} + K_{23}) - q (K_{13} + K_{24}). \quad (\text{B12})$$

Это выражение для малых температур совпадает с формулой Зелевинского [203] для произвольных значений ω ,

$$\langle \ell_x \rangle_i = \omega \times$$

$$\left[\frac{N_{-i} + 1/2}{\Omega_-} \left(2 \frac{\Omega_y^2 + \Omega_z^2}{\Omega_+^2 - \Omega_-^2} - 1 \right) - \frac{N_{+i} + 1/2}{\Omega_+} \left(2 \frac{\Omega_y^2 + \Omega_z^2}{\Omega_+^2 - \Omega_-^2} + 1 \right) \right]. \quad (\text{B13})$$

Суммируя по всем одночастичным состояниям i , получаем выражение для момента инерции $\Theta_x(\omega)$ в виде [203]:

$$\Theta_x(\omega) = \sum_i n_i \frac{\langle \ell_x \rangle_i}{\omega} = 2 \frac{\Omega_y^2 + \Omega_z^2}{\Omega_+^2 - \Omega_-^2} \left(\frac{\aleph_-}{\Omega_-} - \frac{\aleph_+}{\Omega_+} \right) - \left(\frac{\aleph_+}{\Omega_+} + \frac{\aleph_-}{\Omega_-} \right),$$

$$\aleph_{\pm} = \sum_i n_i N_{\pm i}, \quad (\text{B14})$$

которое остается справедливым при произвольных конечных температурах.

Приложение С: ОБОЛОЧЕЧНЫЕ ПОПРАВКИ К ЭНЕРГИЯМ

С.1: Квантовые соотношения

Для сравнения квазиклассического соотношения (5.3.17) для оболочечных поправок δF с соответствующими квантовыми оболочечными поправками, удобно представить его в виде

$$\delta F = F_{s.p.} - \tilde{F}_{s.p.}, \quad \delta \Omega_{s.p.} = \Omega_{s.p.} - \tilde{\Omega}_{s.p.}, \quad (C1)$$

где

$$F = E - T\mathcal{S} = \Omega + \lambda N, \quad (C2)$$

определен через термодинамический потенциал для Ферми-газа

$$\Omega_{s.p.}(T, \lambda) = d_s T \sum_i \ln \left[1 - n \left(\frac{\varepsilon_i - \lambda}{T} \right) \right]. \quad (C3)$$

Знак \sim в (C1) означает усреднение по Струтинскому одночастичных величин. Условие сохранения числа частиц есть

$$N = d_s \sum_i n_i = d_s \sum_i \tilde{n}_i, \quad (C4)$$

где n_i и ε_i – Фермиевские числа заполнения и энергии при $\omega = 0$. Величина \tilde{n}_i представляет собой усредненные фермиевские числа заполнения, определяемые процедурой усреднения по Струтинскому при усредненном химическом потенциале $\lambda = \tilde{\lambda}$, найденном из условия сохранения числа частиц $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(N)$,

$$\tilde{n} \left(\frac{\varepsilon - \lambda}{T} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' n \left(\frac{\varepsilon - \lambda'}{T} \right) \xi_M \left(\frac{\lambda' - \lambda}{\gamma} \right),$$

$$\xi_M(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) P_{2M}(x). \quad (C5)$$

Корректировочный полином $2M$ -го порядка

$$P_{2M}(x) = \sum_{k=0,2,\dots}^{2M} \alpha_k H_k(x)$$

определен через обычные рекуррентные соотношения, $\alpha_k = -\alpha_{k-2}/2k$, $\alpha_0 = 1$, а $H_k(x)$ – классический полином Эрмита.

Оболочечные поправки к внутренней энергии

$$\delta E = \delta F + T\delta S \quad (\text{C6})$$

могут быть определены как оболочечные поправки δE к полной энергии E нагретой системы

$$\begin{aligned} \delta E &= E_{s.p.} - \tilde{E}_{s.p.} \\ &= 2 \sum_i (\varepsilon_i - \lambda) \delta n_i \approx \int d\varepsilon (\varepsilon - \lambda) \delta g(\varepsilon) \delta n \left(\frac{\varepsilon - \lambda}{T} \right). \end{aligned} \quad (\text{C7})$$

Суммирование по спектру ε_i в выражении для внутренней энергии нагретого Ферми-газа $E_{s.p.}$ может быть представлено через интегрирование по энергии ε с плотностью уровней $g(\varepsilon)$ в виде соотношения

$$E_{s.p.} = 2 \int d\varepsilon \varepsilon g(\varepsilon) n \left(\frac{\varepsilon - \lambda}{T} \right). \quad (\text{C8})$$

Плотность уровней $g(\varepsilon)$, усредненная по спектру $g_\gamma(\varepsilon)$ с помощью гауссовской функции с шириной усреднения γ , меньшей по сравнению с расстояниями между большими оболочками ($\hbar\Omega_0 = \varepsilon_F/\mathcal{A}^{1/3} \sim 7 - 10$ MeV для тяжелых ядер ($\mathcal{A} \sim 200$)), определяется с помощью его гладкой $\tilde{g}(\varepsilon)$ компоненты и оболочечных поправок $\delta g(\varepsilon)$:

$$g_\gamma(\varepsilon) = \tilde{g}(\varepsilon) + \delta g_\gamma(\varepsilon). \quad (\text{C9})$$

Оболочечные поправки к фермиевским числам заполнения даются с помощью выражения

$$\delta n(x) = n(x) - \tilde{n}(x), \quad x = (\varepsilon - \lambda)/T, \quad (\text{C10})$$

где $\tilde{n}(x)$ – усредненные числа заполнения при температуре $T = 0$. Гладкая составляющая плотности уровней $\tilde{g}(\varepsilon)$ определяется с помощью значений $\tilde{\gamma}$ и \tilde{M} усредняющих параметров,

а гауссова ширина γ и корректировочный полином степени M в условии плато – в зависимости от $\delta g(\epsilon)$ для нескольких значений M (обычно $M = 4 - 10$) при фиксированных характеристических энергиях ϵ . При этом значения плотности $\tilde{g}(\epsilon)$ для условия плато остаются постоянными. Сглаженная компонента плотности уровней $\tilde{g}(\epsilon)$ может быть аппроксимирована с хорошей точностью с Томас-Фермиевской компонентой $\tilde{g}(\epsilon) \approx g_{ETF}(\epsilon)$. Гладкая составляющая энергии при этом дается с помощью выражения

$$\tilde{E}_{s.p.} = \int d\epsilon \epsilon \tilde{g}(\epsilon) \tilde{n} \left(\frac{\epsilon - \tilde{\lambda}}{T} \right). \quad (\text{C11})$$

С.2: Квазиклассические соотношения

Оболочечные поправки к плотности уровней $\delta g_{scl}^\gamma(\epsilon)$, усредненные с помощью функции Гаусса с шириной усреднения γ , имеют вид [18]

$$\delta g_{scl}^\gamma(\epsilon) = \sum_{\beta} \delta g_{\beta}(\epsilon) \exp \left[-(t_{\beta} \gamma / \hbar)^2 \right], \quad t_{\beta} = \frac{\partial S_{\beta}}{\partial \epsilon}. \quad (\text{C12})$$

Подставляя разложение $\delta g_{scl}^\gamma(\epsilon)$ по периодическим орбитам в (С7) и раскладывая амплитуду $\mathcal{A}_{\beta}(\epsilon)$ для $\delta g_{\beta}(\epsilon)$ по степеням $\epsilon - \lambda$ в действии $S_{\beta}(\epsilon)$, ограничиваясь членом нулевого порядка, при $\epsilon = \lambda$, получим:

$$\delta E = Re T^2 \sum_{\beta} \delta g_{scl}(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} dx x \delta n(x) \exp(i\mathcal{Z}_{\beta} x). \quad (\text{C13})$$

Здесь $\delta g_{\beta}(\lambda)$ – разложение по периодическим орбитам β выражения для оболочечных поправок к плотности уровней при $\epsilon = \lambda$, а \mathcal{Z}_{β} при этом задается выражением (5.3.16). Интегрируя по частям (учитывая, что нижний предел интегрирования стремится к $-\infty$) и учитывая также, что $\delta n(x) = 0$,

получим:

$$\begin{aligned} \delta E = -Re \sum_{\beta} \delta U_{\beta} [& \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d\delta n(x)}{dx} \exp(i\mathcal{Z}_{\beta}x) \\ & - i\mathcal{Z}_{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dx x \frac{d\delta n(x)}{dx} \exp(i\mathcal{Z}_{\beta}x)]. \end{aligned} \quad (C14)$$

Используя соотношение [196]

$$\frac{d\delta n(x)}{dx} = -\frac{1}{4 \cosh^2(x/2)}, \quad (C15)$$

окончательно приходим к уравнению (5.3.18).

Литература

1. Twin P., Nyakó B.M., Nelson A., and Simpson J. Observation of a Discrete-Line Superdeformed Band up to $60\hbar$ in ^{152}Dy // Phys. Rev. Lett. - 1986. - V. **57**. - P. 811–814; Laird R.W. et al. Quadrupole Moments of Highly Deformed Structures in the $A\sim 135$ Region: Probing the Single-Particle Motion in a Rotating Potential // Phys. Rev. Lett. - 2002. - V. **88**. - P. 152501 (1)–152501 (4).
2. Afanasjev A. V., König J., Ring P. Superdeformed Rotational Bands in the $A=140$ -150 Mass Region: A Cranked Relativistic Mean Field Description // Nucl. Phys. A. - 1996. - V. **608**. - P. 107-175.
3. Clark R.M., Asztalos S.J., Baldsiefen G. et al. Evidence for “Magnetic Rotation” in Nuclei: Lifetimes of States in the $M1$ bands of $^{198,199}\text{Pb}$ // Phys. Rev. Lett. - 1997. - V. **78**. - P. 1868–1871.
4. Clark R.M. et al. The Shears Mechanism in the Lead Isotopes // Phys. Lett. B. - 1998. - V. **440**. - P. 251-256.
5. Frauendorf S., Reif J., and Winter G. Shell-Model Study of Shears Bands in Light Pb Nuclei // Nucl. Phys. A. - 1996. - V. **601**. - P. 41-55.
6. Frauendorf S. Spontaneous symmetry breaking in rotating nuclei // Rev. Mod. Phys. - 2001. - V. **73**. - P. 463–514.
7. Dimitrov V., Frauendorf S. and Donau F. Chirality of Nuclear Rotation // Phys. Rev. Lett. - 2000. - V. **84**. - P. 5732–5735.
8. Satula W., Wyss R.A. Mean-field description of high-spin states // Rep. Prog. Phys. - 2005. - V. **68**. - P. 131-200.

9. Shimizu Y.R., Shoji T., Matsuzaki M. Parametrizations of triaxial deformation and $E2$ transitions of the wobbling band // Phys. Rev. C. - 2008. - V. **77**. - P.024319.
10. Heiss W.D., Lynch R., Nazmitdinov R. Nonaxial octupole deformations and shell phenomena// Phys. Rev. C. - 1999. V. **60**. - P. 034303.
11. T. Tanaka, R. Nazmitdinov, K. Iwasava. Nonaxial deformations in light $N = Z$ nuclei at high spins // Phys. Rev. C. - 2001. V. **63**. - P. 034309 (1) - 034309 (11).
12. Chen Y.-S., Yang Sun, Zao-Chun Gao. Nonaxial octupole effect in superheavy nuclei// Phys. Rev. C. - 2008. V. **77**. - P. 061305(1)-061305(11).
13. Goodman A.L. Advances in nuclear physics // Plenum Press. New York. - 1979. - Vol. **11**. - 263 p.
14. Goodman A.L. $T = 0$ and $T = 1$ pairing in rotational states of the $N = Z$ nucleus ^{80}Zr // Phys. Rev. C. - 2001. - V. **63**. - P. 044325 (1)-044325 (14); Goodman A.L. Proton-neutron pairing in $Z = N$ nuclei with $A = 76 - 96$ // Phys. Rev. C. - 1999. V. **60**. - P. 014311 (1)-014311 (17); Навроцка В.И., Назмитдинов Р.Г., Некоторые аспекты парных корреляций в конечных ферми-системах // ЭЧАЯ. - 2000. - Т. **31**. - Вып. 4. - С. 940-975.
15. Afanasjev A.V. and Frauendorf S. Neutron-proton pairing in rotating $N Z$ nuclei: dominance of the isovector component // Nucl. Phys. A. - 2004. - V. **746**. - P 575-578; Satula W. and Wyss R. Cranking in Isospace – Towards a Consistent Mean-Field Description of $N = Z$ Nuclei // Acta Phys. Polonica B. - 2001. - V. **32**. - P. 2441-2456.
16. Marshalek E.R. Sum Rules, Random-Phase-Approximation, and Constrained Self-Consistent Fields// Phys. Rev. C. -

1973. V. 7. - P. 2281.
17. Brack M., Jennings B. Rot. nuclei in semiclassical description // Nucl. Phys. A. - 1976. - V. **258**. - P. 264-284.
 18. Струтинский В.М., Магнер А.Г. Квазиклассическая теория оболочечной структуры ядер // ЭЧАЯ. - 1976. - Т. 7. - Вып. 2. - С. 356-418.
 19. Михайлов И.Н., Неергор К., Пашкевич В.В., Фрауендорф С. Влияние вращения на коллективные свойства атомных ядер // ЭЧАЯ. - 1977. - Т. 8. - Вып. 6. - С. 1338-1411.
 20. de Voigt M.J.A., Dudek J., Szymanski Z. High-spin phenomena in atomic nuclei // Rev. Mod. Phys. - 1983. - V. **55**. - P. 949-1046.
 21. Бектураева М.К., Сафаров Р.Х., Юлдашбаева Э.Х. // Препринт ИЯФ АН Уз.ССР. Ташкент. - 1987.
 22. Бор О., Моттelson Б. Структура атомного ядра // М.: Мир. - 1977. - Т. 1,2. - 605 с.
 23. Михайлов И.Н., Сафаров Р.Х. и др. // ЯФ. - 1983. - Т. 38. - С. 297.
 24. Harris S.M. Higher order corrections to the cranking model // Phys. Rev. B. - 1965. - V. **138**. - P. 509-513.
 25. Штокман М.И. Теория неадиабатических эффектов в вероятностях переходов в четно-четных деформированных ядрах // ЯФ. - 1975. - Т. 22. - С. 479-493.
 26. Крайнов В.П. Лекции по микроскопической теории атомного ядра // М.: Атомиздат. - 1973. - 224 с.
 27. Керман А. Вращательное движение ядер. В кн.: Ядерные реакции. // М.: - 1962. - 474 с.

28. Михайлов В.М. Расчет интенсивностей переходов в деформированных ядрах с учетом примесей по квантовому числу K // Изв. АН СССР. сер. физ. - 1964. - Т. **28**. - С. 308-312.
29. Базнат М.И., Пятов Н.И., Черней М.И. Вращательное движение в нечетных атомных ядрах // ЭЧАЯ. - 1973. - Т. **4**. - С. 941-991.
30. Lipas P.O. Perturbation corrections to energies of collective states in deformed even nuclei // Nucl. Phys. - 1962. - V. **39**. - P. 468-478.
31. Rud N., Nielsen H.Z., Wilsky K. Experimental investigation of the perturbed β -vibrational bands in ^{154}Sm , $^{154,156}\text{Gd}$ // Nucl. Phys. A. - 1971. - V. **167**. - P. 401-420.
32. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента // М.: Наука. - 1975. - 436 с.
33. Bohr A., Mottelson B.R. Invited lecture at the International Conference on Nuclear Structure // J. Phys. Soc. Japan. - 1978. - V. **44**. - P. 157.
34. Bengtsson R., Zhang J.Y., Aberg S. On the analogy between backbending in gauge space and in ordinary space // Phys. Lett. B. - 1981. - V. **105**. - P.5-10.
35. Aberg S., Flocard H., Nazarevich W. in: Nuclear shapes in mean field theory. Lund, MPh-90/05. - 1990. - P. 14-19.
36. Bengtsson R., Frauendorf S. Quasiparticle spectra near the yrast line // Nucl. Phys. A. - 1979. - V. **327**. - P. 139-171.
37. Neergard K., Pashkevich V.V., Frauendorf S. Shell energies of rapidly rotating nuclei // Nucl. Phys. A. - 1976. - V. **262**. - P. 61-90.

38. Banerjee B., Mang H.J., Ring P. Variational calculation of energy spectra of rotational nuclei at high spins // Nucl. Phys. A. - 1973. - V. **215**. - P. 366-382.
39. Bengtsson R., Frauendorf S. An interpretation of backbending in terms of crossing of the ground state band with an aligned two-quasiparticle band // Nucl. Phys. A. - 1978. - V. **314**. - P. 27-36.
40. Nucl. Data Sheets. - 1987. - V. **52**. - P. 70-83.
41. Бегжанов Р.Б. и др. Справочник по физике. Т. 1. Ташкент: ФАН. - 1989. - 738 с.
42. <http://www.bnl.gov>
43. Беленький В.М., Григорьев Е.П. Структура четных ядер // М.: Энергоатомиздат. - 1987. - 230 с.
44. Сафаров Р.Х., Сафаров Р.Р., Ситдиқов А.С. Энергия высокоспиновых ротационных уровней и радиационные переходы ядра ^{156}Dy в рамках феноменологической модели // Изв. РАН. сер. физ. 1999. - Т. **60**. - С. 66-72.
высокоспиновых ротационных уровней и радиационные переходы ядра ^{156}Dy в рамках феноменологической модели // Изв. РАН. сер. физ. 1999. - Т. **60**. - С. 66-72.
45. Nucl. Data Sheets. - 1992. - V. **65**. - P. 167-177.
46. Sie S.H., Ward D., Geiger J.S. et al. Measurement of lifetimes for high spin states in ^{152}Sm , ^{154}Gd and ^{156}Gd by the Doppler broadened line-shape method // Nucl. Phys. A. - 1977. - V. **291**. - P. 443-458.
47. Yates S.W., Johnson N.R., Riendinger L.L. Lifetimes of ground-band states in ^{150}Nd // Phys. Rev. C. - 1978. - V. **17**. - P. 634-638.

48. Emling H., Grosse E., Schwalm D., Simon R.S., Wollersheim H.J., Husar D. and, Pelte D. Reduced collectivity at high spins in ^{158}Dy // Phys. Lett. B. - 1981. - V. **98**. - P.169-174.
49. Riedinger L.L. Aligned bands and nuclear shapes in the $N = 90$ region // Phys. Scripta. - 1983. - V. **T5**. - P. 36-44.
50. Vencova Ts. et al. Transition strengthes $B(E2)$ in the yrast bands of doubly even nuclei // Atomic Data and Nuclear Data Tables. - 1981. - V. **26**. - P. 93-136.
51. Ward D., Andrews H.R., Haüsser O., El Masri Y., Aleonard M.M., Yang-Lee I., Diamond R.M., Stephens F.S., Butler P.A. Measurements of lifetimes and feeding times for high spin states in ^{156}Dy // Nucl. Phys. A. - 1979. - V. **332**. - P. 433-454.
52. Nucl. Data Sheets. - 1996. - V. **77**. - P. 583-587.
53. Ring P., Hayashi A., Hara K., Emling H. and, Grosse E. Electromagnetic moments and transition rates from cranking model wavefunctions // Phys. Lett. B. - 1982. - V. **110**. - P. 423-427.
54. Структура сложных ядер. Сб. летней школы физиков, под общей редакцией ак. Боголюбова Н.Н.// М.: Атомиздат. - 1966. - 350 с.
55. Muller-Veggian M., Beuscher H., et al. Study of the level structure in ^{134}Ce // Nucl. Phys. A. - 1984. - V. **417**. - P. 189-208.
56. Lonroth T., Hatulla J. et al. Study of band crossings in ^{130}Xe // Nucl. Phys. A. - 1984. - V. **431**. - P. 256-268.
57. Flaum C., Cline D. et al. Decoupling effects in the light mass barium isotopes // Nucl. Phys. A. - 1976. - V. **264**. - P. 291-311.

58. Moriscotti M.A.J., Scharff-Goldhaber G. Phenomenological Analysis of Ground-State Bands in Even-Even Nuclei // Phys. Rev. - 1969. - V. **178**. - P. 1864-1873.
59. Flaum C., Cline D. Two-quasiparticle plus rotor bandmixing calculations of coriolis decoupling // Phys. Rev. C. - 1976. - V. **14**. - P. 1224-1242.
60. Martin J.P. et al. Collective band structures and particle alignments in $^{124,125}\text{Ba}$ and ^{125}Cs // Nucl. Phys. A. - 1988. - V. **489**. - P. 169-188.
61. Schiffer K. et al Band crossings in ^{128}Ba // Nucl. Phys. A. - 1986. - V. **458**. - P. 337-353.
62. Bazzacco D. et al. Excited states in ^{130}Ba // Nucl. Phys. A. - 1985. - V. **436**. - P. 506-517.
63. Ward D. et al. Gamma-ray spectroscopy of ^{126}Ba // Nucl. Phys. A. - 1991. - V. **529**. - P. 315-362.
64. Сафаров Р.Х., Сафаров Р.Р., Ситдиқов А.С. Расщепление основной ротационной полосы в ^{126}Ba // Изв. РАН. сер. физ. - 1997. - Т. **61**. - С. 166-172.
65. Сафаров Р.Х., Ситдиқов А.С. Выстроенный угловой момент ветвей расщепления основной ротационной полосы ядер четных изотопов Ba // Изв. РАН. сер. физ. 1998 Т. **62**. - С. 161-165.
66. Бегжанов Р.Б. и др. Переходные атомные ядра // Ташкент: ФАН. - 1988. - С. 280-281.
67. Бегжанов Р.Б. и др. Структура четно-четных переходных атомных ядер // Ташкент: ФАН. - 1985. - С. 236-239.
68. Schiffer K. et al. Excited states in ^{128}Ba // Z. Phys. - 1983. - V. **A313**. - P. 245-246.

69. Wyss R.A. Competition between $(h_{11/2})^2$ proton and neutron excitations around ^{128}Ba : coexistence of near prolate and near oblate shapes at high spin // *Z. Phys.* - 1988. - P. 255-256.
70. Сафаров Р.Х. Расчет момента инерции возбужденных ядер в рамках улучшенной сверхтекучей модели ядра // *ДАН Уз. ССР.* - 1966. - С. 25-28.
71. Ejiri H et al // *J. Phys. Soc. Japan.* - 1968. - V. **24**. - P. 1189.
72. Stephens F.S. and Simon R.S. Coriolis effects in the yrast states // *Nucl. Phys. A.* - 1972. - V. **183**. - P. 257-284.
73. Ward D., Dracoulis G.D., Leigh J.R., Charity R.J., Hinde D.J., Newton J.O. High-spin states in ^{222}Th // *Nucl. Phys. A.* - 1983. - V. **406**. - P. 591-612.
74. Nazarevich W., Olanders P. Rotational consequences of stable octupole deformation in nuclei // *Nucl. Phys.* - 1985. - V. **441**. - P. 420-444.
75. Dahlinger M., Kankeleit E., Habs D. et al. Alternating parity bands and octupole effects in ^{221}Th and ^{223}Th // *Nucl. Phys. A.* - 1988. - V. **484**. - P. 337-375.
76. Butler P.A., Nazarewicz W. Intrinsic reflection asymmetry in atomic nuclei // *Rev. Mod. Phys.* - 1996. - V. **68**. - P. 349–421.
77. Jolos R.V., von Brentano P. Angular momentum dependence of the parity splitting in nuclei with octupole correlations // *Phys. Rev. C.* - 1994. - V. **49**. - P. R2301–R2304.
78. Jolos R.V., von Brentano P, Donau F. Barrier penetration effect on the angular momentum dependence of the parity splitting in actinide nuclei // *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* - 1993. - V. **19**. - P. L151-L160.

79. Jolos R.V., von Brentano P. Angular momentum dependence of the parity splitting in nuclei with octupole correlations // Phys. Rev. C. - 1994. - V. **49**. - P. R2301–R2304.
80. Jolos R.V., von Brentano P. Rotational spectra and parity splitting in nuclei with strong octupole correlations // Nucl. Phys. A. - 1995. - V. **587**. - P. 377-389.
81. Сафаров Р.Х., Сафаров А.Р., Ситдииков А.С. Расщепление по четности в ядрах с октупольными корреляциями и выстраиванием углового момента // ЯФ.-2001. - Т. **64**. - С. 1496-1500.
82. Jolos R.V., Minkov N., Scheid W. Inversion of parity splitting in alternating parity bands at high angular momenta// Phys. Rev. C. - 2005. - V. **72**. - P. 064312.
83. Cocks J.F.C., Butler P.A., Cann K.J. et al. Observation of Octupole Structures in Radon and Radium Isotopes and Their Contrasting Behavior at High Spin// Phys. Rev. Lett. - 1997. - V. **78**. - P. 2920
84. Jolos R.V., von Brentano P. Parity splitting in the alternating parity bands of some actinide nuclei // Phys. Rev. C. - 1999. - V. **60**. - P. 064317 (1)-064317 (6).
85. Сафаров Р.Х., Сафаров Р.Р., Ситдииков А.С., Расимгиль Р. Двукратная инверсия знака четности в ротационной полосе с чередующейся четностью //Изв. РАН. сер. физ. - 2006. - Т. **70**. - С. 1586-1590.
86. Джолос Р.В., Сафаров А.Р. //ЯФ.- 1996. - Т. **59**. - С. 2136
87. Сафаров Р.Х., Сафаров Р.Р. //Изв. РАН. сер. физ. - 1998. - Т. **62**. - С. 949.
88. Ситдииков А.С., Сафаров Р.Х., Квасил Я. Влияние выстраивания на высокоспиновые состояния положитель-

- ной и отрицательной четности ядра ^{162}Yb // Изв. РАН. сер. физ. - 2006. - Т. **70**. - С. 1564-1568.
89. Nilsson S.G. // Kgl. Dan. Vidensk. Selsk. Math.-Phys. Medd. - 1955. - V. **29**. - P. N16.
90. Джолос Р.В., Пальчиков Ю.В. Кластерные свойства и сильные октупольные корреляции в средних и тяжелых ядрах // ЯФ. - 2000. - Т. **63**. - С. 633-637.
91. Andersson G., Larsson S.E., Leander G. et al. Nuclear shell structure at very high angular momentum // Nucl. Phys. A. - 1976. - V. **268**. - P. 205-256.
92. Муминов А.И. и др. //Изв. АН СССР. сер. физ. - 1983. - Т. **11**. - С. 2125.
93. Ситдииков А.С., Сафаров Р.Х., Квасил Я. Влияние октупольных взаимодействий на поведение состояний отрицательной четности при малых спинах// ЯФ.- 2006. - Т. **69**. - С. 2046-2051.
94. Ситдииков А.С., Никитин А.С. Инверсия четности спинов в полосе отрицательной четности ядра ^{168}Hf // В сб. "Новейшие проблемы теории поля под ред. проф. Аминовой А.В.: Казань: изд. Казанского ун-та, 2006, т.5, стр. 216-225.
95. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика // М.: Наука. - 1963. - 704 с.
96. Leander G. et al. The breaking of intrinsic reflection symmetry in nuclear ground states // Nucl. Phys. A. - 1982. - V. **388**. - P. 452-476.
97. Inglis D.R. Particle Derivation of Nuclear Rotation Properties Associated with a Surface Wave // Phys. Rev. - 1954. - V. **96**.

- P. 1059-1065; Inglis D.R. Dynamics of Nuclear Deformation // Phys. Rev. - 1955. - V. **97**. - P. 701-706.
- 98.** Thouless D.J. Stability conditions and nuclear rotations in the Hartree-Fock theory // Nucl. Phys. A. - 1960. - V. **21**. - P. 225-232.
- 99.** Thouless D.J., Valatin J.G. Time-dependent Hartree Fock equations and rotational states of nuclei // Nucl. Phys. A. - 1962. - V. **31**. - P. 211-232.
- 100.** Зелевинский В.Г. Простая модель быстро вращающегося ядра // ЯФ. - 1975. - Т. **22**. - С. 1085-1095.
- 101.** Беляев С.Т., Зелевинский В.Г. Вращение как внутреннее возбуждение ядра // ЯФ. - 1970. - Т. **11**. - С. 741-759.
- 102.** Беляев С.Т., Зелевинский В.Г. Вращательные возбуждения ядер в методе обобщенной матрицы плотности // ЯФ. - 1973. - Т. **17**. - С. 525-539; Zelevinsky V.G. High-spin rotational motion: TDHF cranking description and random phase approximation // Nucl. Phys. A. - 1980. - V. **344**. - P. 109-136.
- 103.** Inglis D. Nuclear moments of inertia due to nucleon motion in rotating well // Phys. Rev. - 1956. - V. **103**. - P. 1786-1795.
- 104.** Belyaev S.T. Concerning the calculation of nuclear moment of inertia // Nucl. Phys. - 1961. - V. **24**. - P. 322-325.
- 105.** Szymansky Z. Fast Nuclear rotation // Clarendon Press, Oxford. - 1980. - 461 p.
- 106.** Cwiok S., Dobaczewski J., Heenen P.-H., Magievski P. and Nazarevich W. Shell structure of the superheavy elements // Nucl. Phys. A. - 1996. - V. **611**. - P. 211-246.

- 107.** Andersson G., Larsson S.E., Leander G. et al. Nuclear shell structure at very high angular momentum // Nucl. Phys. A. - 1976. - V. **268**. - P. 205-256.
- 108.** Afanasjev A.V., Konig J., and Ring P. Moments of inertia of nuclei in the rare earth region: A relativistic versus non-relativistic investigation // Phys. Rev. C. - 2000. - V. **62**. - P. 054306(1)-054396(7).
- 109.** Rutz K., Bender M., Burvenich T., Schilling T., Reinhard P.-G., Maruhn J.A., and Greiner W. Superheavy nuclei in self-consistent nuclear calculations // Phys. Rev. C. - 1996. - V. **56** - P. 238–243.
- 110.** Bender M., Rutz K., Reinhard P.-G., Maruhn J.A. Shell structure of superheavy nuclei in self-consistent mean-field models // Phys. Rev C. - 1999. - V. **60**. - P. 034304 (1)-034304 (20).
- 111.** Berger J.-F., Bitaud L., Decharge J., Girod M., Dietrich K. Superheavy, hyperheavy and bubble nuclei // Nucl. Phys. A. - 2001. - V. **685**. - P. 1-16.
- 112.** Соловьев В.Г. Квазичастицы и фононы // М.: Энергоатомиздат. - 1989. - 254 с.
- 113.** Блейзо Ж.П., Рипка Ж. Квантовая теория конечных систем // Киев: Феникс. - 1998. - 480 с.
- 114.** Nakatsukasa T, Matsuyanagi K., Mizutori S., and Shimizu Y.R. Microscopic structure of high-spin vibrational excitations in superdeformed $^{190,192,194}\text{Hg}$ // Phys. Rev. C. - 1996. - V. **53**. - P. 2213-2226.
- 115.** Kvasil J., Nazmitdinov Rashid G., Sitdikov A.S. Collective excitations and backbending phenomenon in ^{156}Dy // ЯФ. - 2004. - Т. **97**. - С. 1650.

- 116.** Aberg S. Quadrupole operators in triaxial nuclei // Phys. Lett. B. - 1985. - V. **157**. - P. 9-12.
- 117.** Sakamoto, Kishimoto. Self-consistent effective interactions in nuclei : (I). Doubly-stretched multipole interactions in deformed nuclei // Nucl. Phys. A. - 1989. - V. **501**. - P. 205-241.
- 118.** Квасил Я. Назмитдинов Р.Г. Микроскопическое описание коллективных возбуждений вращающихся ядер // ЭЧАЯ. - 1986. - Т. **17**. - С. 613-666.
- 119.** Соловьев В.Г. Теория сложных ядер // М.: Наука. - 1971. - 559 с.
- 120.** Cwiok S., Kvasil J., Choriev B. The RPA and restoration of translational symmetry of the Hamiltonian of a rotating nucleus // J. Phys. G: Nucl. Phys. - 1984. V. **10**. - P. 903.
- 121.** Yain A.K., Sheline R.K., Sood P.C., Kiran Jain. Intrinsic states of deformed odd-A nuclei in the mass regions ($151 \leq A \leq 193$) and ($A \geq 221$) // Rev. Mod. Phys. - 1990. - V. **62**. - P. 393-509.
- 122.** Marshalek E.R., Sabato M. Static Quadrupole Moments of Vibrational States of Spherical Nuclei in the Self-Consistent Cranking Approximation // Phys. Rev. C. - 1971. - V. **4**. - P. 1006–1009; Marshalek E.R., Sabato M. Problems with Perturbation Treatments of Anharmonic Nuclear Oscillations // Phys. Rev. C. - 1972. - V. **5**. - P. 1130–1134.
- 123.** Heiss W.D., Nazmitdinov Rashid G. Self-consistent harmonic oscillator model and tilted rotation // Phys. Rev. C. - 2002. - V. **65**. - P. 054304 (1)-054304 (11).
- 124.** Yamagami M., Matsuyanagi K. High-spin yrast structure of ^{32}S suggested by symmetry-unrestricted, cranked Hartree

- Fock calculations // Nucl. Phys. A. - 2000. - V. **672**. - P. 123-140.
- 125.** Tanaka T., Nazmitdinov R.G., Iwasawa K. Nonaxial octupole deformations in light $N = Z$ nuclei at high spins // Phys. Rev. C. - 2001. - V. **63**. - P. 034309 (1)-034309 (11).
- 126.** Skalski J. Nonaxial pearlike nuclear shapes // Phys. Rev. C. - 1999. - V. **43**. - P. 140-145.
- 127.** Takami S., Yabana K., Matsuo M. Tetrahedral and triangular deformations of $Z = N$ nuclei in mass region $A = 60 - 80$ // Phys. Lett. B. - 1998. - V. **431**. - P. 242-248.
- 128.** Inakura T., Mizutori S., Yamagami M., Matsuyanagi K. Cranked Skyrme–Hartree–Fock calculation for superdeformed and hyperdeformed rotational bands in $N = Z$ nuclei from ^{32}S to ^{48}Cr // Nucl. Phys. A. - 2002. - V. **710**. - P. 261-278.
- 129.** Mizutori S., Shimizu Y., Matsuyanagi K. Octupole Vibrations Built on Superdeformed Rotational Bands // Prog. Theor. Phys. - 1990. - V. **83**. - P. 666-670; Mizutori S., Shimizu Y., Matsuyanagi K. Octupole Vibrations with $K = 1$ and 2 in Superconducting, Superdeformed Nuclei // Prog. Theor. Phys. - 1991. - V. **85**. - P. 559-566.
- 130.** Mizutory S., Nakatsukasa T., Arita K., Shimizu Y. Octupole correlations in superdeformed high-spin states // Nucl. Phys. A. - 1993. - V. **557**. - P. 125-144.
- 131.** Nakatsukasa T., Matsuyanagi K., Shimizu Y.R. Microscopic structure of high-spin vibrational excitations in superdeformed $^{190,192,194}\text{Hg}$ Phys. Rev. C. - 1996. - V. **53**. - P. 2213–2226.
- 132.** Crowell B. et al Relative spins and excitation energies of superdeformed bands in ^{190}Hg : Further evidence for octupole vibration // Phys. Rev. C. - 1995. - V. **51**. - P. R1599–R1603.

- 133.** Fallon P. et al. Octupole vibrations and signature splitting in even mass Hg superdeformed bands // Phys. Rev. C. - 1997. - V. **55**. - P. R999–R1001.
- 134.** Stoyanov Ch., Zelevinsky V. High-lying single-particle modes, chaos, correlational entropy and doubling phase transition // Phys. Rev. C. - 2004. - V. **70**. - P. 014302.
- 135.** Iachello Francesco., Zamfir N.V. Quantum Phase Transitions in Mesoscopic Systems// Phys. Rev. Lett. - 2004. - V. **92**. - P. 212501(1)-212501(4).
- 136.** Jolie J., Heinze S., Van Izacker P., Casten Richard F. Shape phase transitions in odd-mass nuclei using a supersymmetric approach // Phys. Rev. C. - 2004. - V. **70**. - P. 011305(R1)-011302(R4).
- 137.** Goodman Alan L. Shape Transitions In Hot Rotating Nuclei// Nucl. Phys. A. - 2001. - V. **687**. - P. 206c-211c.
- 138.** Bizzeti P., Bizzeti-Sona A. Description of nuclear octupole and quadrupole deformation close to the axial symmetry and phase transitions in the octupole mode // Phys. Rev. C. - 2004. - V. **70**. - P. 064319.
- 139.** Nazmitdinov R.G., Aberg S. Quadrupole splitting of octupole vibrational states // Phys. Lett. B. - 1992. - V. **289**. - P. 238-244.
- 140.** Nakatsukasa T., Matsuyanagi K., Mizutori S., Shimizu Y.R. Microscopic structure of high-spin vibrational excitations in superdeformed $^{190,192,194}\text{Hg}$ // Phys. Rev. C. - 1996. - V. **53**. - P. 2213-2226.
- 141.** Kvasil J., Nazmitdinov Rashid G., Sitdikov A.S., Vesely P. Octupole excitations at high spins in A 160 nuclei // Phys. At. Nucl. - 2007. - V. **70**. - P. 1386-1391.

- 142.** Kvasil J., Nazmitdinov R.G. Microscopic analysis of shape-phase transitions in even-even $N = 90$ rotating nuclei // Phys. Rev. C. - 2004. - V. **73**. - P. 014312 (1)-014312 (16).
- 143.** Kvasil J., N. Lo Iudice, V.O. Nestrenko, Kopal M. Strength functions for collective excitations in deformed nuclei // Phys. Rev. C. - 1998. - V. **58**. - P. 209-219.
- 144.** Малов Л.А., Соловьев В.Г. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1980, т. **11**, с. 301-341.
- 145.** Kvasil J., N. Lo Iudice, Nazmitdinov R.G. et al. Collective magnetic excitations and backbending in fast rotating nuclei // Phys. Rev. C. - 2004. - V. **69**. - P. 064308 (1)-064308 (8).
- 146.** Dobaczewski J., Olbratowski // J. Comp. Phys. Comm. - 2005. - V. **167**. - P. 214; Dobaczewski J., Dudek // J. Comp. Phys. Comm. - 2000. - V. **131**. - P. 163.
- 147.** Вдовин А.И., Соловьев В.Г. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1983, т. **14**, с. 237-285.
- 148.** Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1 // М.: Мир. - 1997. - 357 с.
- 149.** Малов Л.А., Нестеренко В.О., Соловьев В.Г. Однофонные состояния в деформированных ядрах для изоскалярного и изовекторного взаимодействий // ТМФ. - 1977. - Т. **32**. - С. 134-144.
- 150.** Fischer S.M., Lister C.J., and Balamuth D.P. Unravelling the band crossings in ^{68}Se and ^{72}Kr : The quest for $T = 0$ pairing // Phys. Rev. C. - 2003. - V. **67**. - P. 064318 (1)-064318 (13).
- 151.** Rudolph D., Baktash C., Gross C.J. et al. Systematics of even-even $T_z = 1$ nuclei in the $A = 80$ region: High-spin

rotational bands in ^{74}Kr , ^{78}Sr , and ^{82}Zr // Phys. Rev. C. - 1997. - V. **56**. - P. 98-117.

- 152.** Rudolph D., Gross C.J., Sheikh J.A. et al. Identification of $T = 0$ and $T = 1$ Bands in the $N = Z = 37$ Nucleus ^{74}Rb // Phys. Rev. Lett. - 1996. - V. **76**. - P. 376-379.
- 153.** Kelsall N., Wadsworth R., Wilson A., et al. Consequences of neutron-proton pairing correlations for rotational motion of the $N = Z$ nucleus ^{72}Kr // Phys. Rev. C. - 2001. - V. **64**. - P. 024309 (1)-024309 (7).
- 154.** Valiente-Dobon J.J., Svensson C.E., O’Leary C.D., et al. High-spin rotational structures in ^{76}Kr // Phys. Rev. C. - 2005. - V. **71**. - P. 034311 (1)-034311 (13).
- 155.** Dobaczewski J., Dudek J., and Wyss R. $T=0$ neutron-proton pairing correlations in the superdeformed rotational bands around ^{60}Zn // Phys. Rev. C. - 2003. - V. **67**. - P. 034308 (1)-034308 (10).
- 156.** Sheikh J.A. and Wyss R. Isovector and isoscalar superfluid phases in rotating nuclei // Phys. Rev. C. - 2000. - V. **62**. - P. 051302 (1)-051302 (5).
- 157.** Frauendorf S. and Sheikh J. Rotational alignment near $N = Z$ and proton-neutron correlations // Phys. Rev. C. - 1999. - V. **59**. - P. 1400-1404.
- 158.** Frauendorf S. and Sheikh J. Cranked shell model and isospin symmetry near $N = Z$ // Nucl. Phys. A. - 1999. - V. **645**. - P. 509-535.
- 159.** Afanasjev A.V. and Frauendorf S. Description of rotating $N = Z$ nuclei in terms of isovector pairing // Phys. Rev. C. - 2005. - V. **71**. - P. 064318 (1)-064318 (17).

- 160.** Satula W. and Wyss R. Rotations in Isospace: A Doorway to the Understanding of Neutron-Proton Superfluidity in $N = Z$ Nuclei // Phys. Rev. Lett. - 2001. - V. **86**. - P. 4488-4491.
- 161.** Neergard K., Interpretation of the Wigner energy as due to RPA correlations // Phys. Lett. B. - 2002. - V. **537**. - P. 287-290.
- 162.** Glowacz S., Satula W., and Wyss R. Cranking in isospace // Eur. Phys. J. A. - 2004. - V. **19**. - P. 33-37.
- 163.** de Shalit A., Goldhaber M. Mixed Configurations in Nuclei // Phys. Rev. - 1953. - V. **92**. - P. 1211-1218.
- 164.** Gallagher C., Moszkowski S. Coupling of Angular Momenta in Odd-Odd Nuclei // Phys. Rev. - 1958. - V. **111**. - P. 1282-1290.
- 165.** Newby N.D. Selection Rules in the Odd-Even Shift of Certain Nuclear Rotational Bands // Phys. Rev. - 1962. - V. **125**. - P. 2063-2070.
- 166.** Alexeev V.L., et al. The properties of ^{116}In excited states // Nucl. Phys. A. - 1976. - V. **262**. - P. 19-51.
- 167.** Ma C.W., True W.W. Shell Model in the Lead Region // Phys. Rev. C. - 1973. - V. **8**. - P. 2313-2331.
- 168.** Исаков В.М., Артамонов С.А., Слив Л.А. // Изв. АН СССР, сер. физ. - 1977. - Т. **41**. - С. 2074.
- 169.** Артамонов С.А., Исаков В.И. // Изв. АН СССР, сер. физ. - 1979. - Т. **43**. - С. 2071.
- 170.** Boisson J.P., Piepenbring R., Ogle W. The effective neutron-proton interaction in rare-earth nuclei// Phys. Report. C. - 1976. - V. **26**. - P. 99.

171. Sood P., Hoff R., Sheline R. Characterization of isomers in ^{158}Ho // Phys. Rev. C. - 1986. - V. **33**. - P. 2163-2168.
172. Šteěrba F., Kvasil J., Holan P. et al. // Czech. J. Phys. B. - 1979. - V. **29**. - P. 1215.
173. Jain A., Sheline R., Headly D., et al. Nuclear structure in odd-odd nuclei, $144 < A < 194$ // Rev. Mod. Phys. - 1998. - V. **70**. - P. 843–895.
174. Sood P.C., Sheline R.K., Ray R.S. Energy levels of the nucleus ^{166}Ho Phys. Rev. C. - 1987. - V. **35**. - P. 1922-1931.
175. Bhargava P.C. High-spin phenomena in atomic nuclei // Nucl. Phys. A. -1973. - V. **207**. - P. 258.
176. Kvasil J., Jain A.K., Sheline R.K. Shell Structure, Cranking and Magnetic Phenomena in Nuclei // Czech. J. Phys. - 1990. - V. **40**. - P. 278-300.
177. Goodman A.L. Self-consistent symmetries of the Hartree-Fock-Bogoliubov equations in a rotating frame // Nucl. Phys. A. - 1974. - V. **230**. - P. 466-476.
178. Petrovici A., Schmid K.W., and Faessler A. Microscopic Description of the Shape Coexistence in the A 70 Mass Region // ЭЧАЯ. - 1992. - V. **23**. - P. 914-973.
179. Dudek J., Nazarevich W., Szymanski Z. // Phys. Scr. - 1981. - V. **24**. - P. 309.
180. Gutzwiller M. Chaos in Classical and Quantum Mechanics // New York.-Springer-Verlag. - 1990. - 591 p.
181. Зорич Е.П. Курс математического анализа. Т.2.-//М.: Физматлит, 2004.
182. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции.- //М.: Наука, 1979.

- 183.** Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям.- Пер. с англ. // М.: Мир. - 1968. - 360 с.
- 184.** Пашкевич В.В., Фраундорф С. // ЯФ. - 1974. - Т. **20**. - С. 1122.
- 185.** Deleplanque M.A., Fraundorf S., Pashkevich V.V. et al. Gross Shell Structure at High Spin in Heavy Nuclei // Phys. Rev. C. - 2004. - V. **69**. - P. 044309 (1)-044309 (21).
- 186.** Strutinsky V.M., Magner A.G., Ofengenden S. Semiclassical Interpretation of Gross-Shell Structure in Deformed Nuclei // Z. Physic. - 1977. - V. **A283**. - P. 269-285.
- 187.** Magner A.G., Fedotkin S.N., Arita Ken-ichiro et al. Symmetry Breaking and Bifurkations in the Periodic Orbit Theory.I // Prog. Theor. Phys. - 1999. - V. **102**. - P. 551-598; Magner A.G., Fedotkin S.N., Arita Ken-ichiro et al. Symmetry Breaking and Bifurkations in the Periodic Orbit Theory.II // Prog. Theor. Phys. - 2002. - V. **108**. - P. 853-901.
- 188.** Gjebinsky A., Magner A.G., Sitdikov A.S. Semiclassical Inertia for Nuclear Collective Rotation // Nuclear Phys. and Atomic Energy. - 2007. - V. **1**. - P. 17-24.
- 189.** Magner A.G., Sitdikov A.S., Khamzin A.A., Gjebinsky A., Bartel J. Semiclassical Shell Structure of Moments of Inertia in Deformed Fermi Systems // Int. J. Theor. Phys. - 2010.
- 190.** Magner A.G., Sitdikov A.S., Khamzin A.A., Gjebinsky A., Bartel J. Semiclassical Shell Structure of Moments of Inertia in Heated Fermi Systems // Nuclear Phys. and Atomic Energy. - 2009. - V. **10**. - P. 239.
- 191.** Коломиец В.М., Магнер А.Г., Струтинский В.М. Оболочечные эффекты в ядрах при больших угловых моментах // ЯФ. - 1979. - Т. **29**. - С. 1478.

- 192.** Brack M., Bhaduri R.K. Semiclassical Physics. Frontiers in Physics. 1997. - V. **96**. - Addison-Wesley, Reading, MA; 2nd edition, Westview Press, Boulder. - 2003 p.
- 193.** Маслов В.П. К методу стационарной фазы для континуального интеграла Фейнмана // ТМФ. - 1970. - Т. **2**. - С. 30–35.
- 194.** Magner A.G., Gzhebinsky A.G., Fedotkin S.N. // Phys. At. Nuclei. - 2006. - V. **69**. - P. 2006.
- 195.** Strutinsky V. Shell effects nuclear masses and deformation energies //
- 196.** Magner A.G., Vydrug-Vlasenko S.M., Hofmann H. Gross-shell effects in nuclear response functions // Nucl. Phys. A. -1991. - V. **524**. - P. 31-64.
- 197.** Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. т.1. // М.: Наука. - 1989. - 215 с.
- 198.** Табор Б. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике // М.: УРСС. - 2001. - 318 с.
- 199.** Штокман Х.Ю. Квантовый хаос // М.: Физматлит. - 2004. - 373 с.
- 200.** Магнер А.Г., Коломиец В.М., Струтинский В.М. Влияние оболочечных эффектов на статистические свойства ядер при больших угловых моментах // Изв. АН СССР. - 1979. - Т. **43**. - С. 2408.
- 201.** Frisk H. Shell Structure in Terms of Periodic Orbits // Nucl. Phys. A. - 1990. - V. **511**. - P. 309-323.
- 202.** Магнер А.Г. Квазиклассический анализ больших оболочек в несферическом осцилляционном потенциале // ЯФ. - 1978. - Т. **28**. - С. 1477.

- 203.** Зелевинский В.Г. Простая модель быстро вращающегося ядра // ЯФ. - 1975. - Т. **22**. - С. 1085.
- 204.** Гантмахер Ф.Р. Теория матриц // М.: Наука. - 1966. - 576 с.
- 205.** Смирнов В.И. Курс высшей математики, том 1 (23-е издание) // М.: Наука. - 1974. - 336 с.

Научное издание

Айрат Салимович Ситдиков

СОВРЕМЕННЫЕ МОДЕЛИ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЯДЕР

Монография

Кафедра высшей математики КГЭУ

Авторская редакция

Подписано в печать

Формат 60x84/16. Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.
Бумага ВХИ. Усл. печ. л. 20.92. Уч.-изд.л. 17.54 Тираж 100
экз. Заказ №

Редакционно-издательский отдел КГЭУ,

420066, Казань, Красносельская, 51