

УДК 514.822

О ПРОЕКТИВНОМ ДВИЖЕНИИ В 6-МЕРНОМ ПСЕВДОРИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА¹

З. Х. Закирова²

В этой заметке мы продолжаем изучение 6-мерного псевдориманового пространства $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[++----]$, которое допускает проективные движения, т.е. непрерывные группы преобразований, сохраняющих геодезические. Мы находим общую определяющую функцию проективного движения в 6-мерном псевдоримановом пространстве специального типа.

Ключевые слова: общая теория относительности, псевдоримановы пространства, уравнения Эйзенхарта.

Введение. Начиная с ранних работ по теории Калуцы–Клейна, имеется устойчивый интерес к многомерным теориям пространства с нестандартными сигнатурами метрики. В настоящее время он в основном ассоциирован с теорией струн, где временное(ые) направление(ия) в пространстве-времени связано(ы) с нестандартным знаком кинетического члена в действии лиувилевского(их) поля(ей). Поэтому изучение таких теорий привлекает много внимания.

В серии работ [1–8] мы изучали 6-мерные псевдоримановы пространства $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[++----]$, которые допускают проективные движения, то есть непрерывные группы преобразований, сохраняющие геодезические.

Напомним, что линия $x^i(t)$ называется *геодезической*, если ее касательные вектора $T^i = dx^i/dt$ остаются параллельными при переносе вдоль этой линии [9]: $\nabla_t T = 0$. Уравнение геодезических в локальных координатах имеет вид

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + G_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad (1)$$

где G_{jk}^i – компоненты связности псевдориманова многообразия (M, g) .

¹ Печатается по представлению Отделения теоретической физики ФИАН.

² Казанский государственный энергетический университет, e-mail: zolya_zakirova@mail.ru.

Векторное поле X является инфинитезимальным проективным преобразованием на многообразии M с аффинной связностью ∇ тогда и только тогда, когда [10]

$$\nabla_Y(L_X - \nabla_X) = R(X, Y) - \varphi(Y)id - Y\varphi, \quad (2)$$

для поля 1-формы φ и всех векторных полей Y на M , где R – тензор кривизны, L_X – производная Ли вдоль векторного поля X .

В локальных координатах:

$$L_X G_{jk}^i = \delta_j^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_j \quad (3)$$

или

$$\xi_{,jk}^i + \xi^l R_{jlk}^i = \delta_j^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_j, \quad (4)$$

где ξ^i , G_{jk}^i , R_{jlk}^i – компоненты соответственно векторного поля X , связности ∇ и тензорного поля кривизны в координатном репере ∂_i , а запятая означает ковариантное дифференцирование относительно g . Если M является псевдоримановым многообразием с метрикой g и римановой связностью ∇ , тогда условие (2) можно записать в виде двух уравнений [10]

$$L_X g = h, \quad \text{обобщенное уравнение Киллинга}, \quad (5)$$

$$\nabla h(Y, Z, W) = 2g(Y, Z)W\varphi + g(Y, W)Z\varphi + g(Z, W)Y\varphi, \quad (6)$$

уравнение Эйзенхарта,

где $(Y, Z, W) \in T(M)$, $\varphi = \frac{1}{n+1} \operatorname{div} X$.

Общий метод определения псевдоримановых многообразий, которые допускают негомотетичную проективную группу G_r , был развит А. В. Аминовой [11]. А. В. Аминова классифицировала все лоренцевы многообразия размерности ≥ 3 , которые допускают негомотетичные проективные или аффинные инфинитезимальные преобразования. В каждом случае были определены соответствующие максимальные проективные и аффинные алгебры Ли. Эта проблема не решена для псевдоримановых пространств с произвольной сигнатурой.

Для того чтобы найти псевдориманово пространство, допускающее негомотетичное инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта (6). Проблема определения таких пространств зависит от типа h -пространства, то есть от типа билинейной формы $L_X g$, определенной характеристикой

λ -матрицы $(h - \lambda g)$. Если характеристика Сегре тензора $L_X g - [abc\dots]$, мы называем соответствующее h -пространство пространством типа $[abc\dots]$. Эти идеи впервые были обоснованы П. А. Широковым [12]. Таким образом, псевдоримановы многообразия, для которых существуют нетривиальные решения $h \neq cg$ уравнения Эйзенхарта, называются h -пространствами.

В работах [1–6] мы нашли 6-мерные h -пространства типов [2211], [321], [33], [411] и [51]:

Метрика h -пространства типа [2211]

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_2(f_4 - f_2)^2 \Pi_\sigma(f_\sigma - f_2) \{2A dx^1 dx^2 - A^2 \Sigma_1 (dx^2)^2\} + \\ e_4(f_2 - f_4)^2 \Pi_\sigma(f_\sigma - f_4) \{2\tilde{A} dx^3 dx^4 - \tilde{A}^2 \Sigma_2 (dx^4)^2\} + \sum_\sigma e_\sigma \Pi'_i(f_i - f_\sigma) (dx^\sigma)^2, \quad (7)$$

где

$$A = \epsilon x^1 + \theta(x^2), \quad \tilde{A} = \tilde{\epsilon} x^3 + \omega(x^4),$$

$$\Sigma_1 = 2(f_4 - f_2)^{-1} + \sum_\sigma (f_\sigma - f_2)^{-1}, \quad \Sigma_2 = 2(f_2 - f_4)^{-1} + \sum_\sigma (f_\sigma - f_4)^{-1}, \quad (8)$$

$e_i = \pm 1$, $\sigma = 5, 6$, $f_1 = f_2 = \epsilon x^2$, $f_3 = f_4 = \tilde{\epsilon} x^4 + a$, $\epsilon, \tilde{\epsilon} = 0, 1$, $\epsilon \neq \tilde{\epsilon}$, a – постоянная, ненулевая, когда $\tilde{\epsilon} = 0$, $f_\sigma(x^\sigma)$, $\theta(x^2)$, $\omega(x^4)$ – произвольные функции, \sum_σ здесь и далее означает суммирование по σ , $\Pi'_i(f_i - f_\sigma)$ здесь и далее означает произведение множителей $(f_i - f_\sigma)$ для всех $i = 1, \dots, 6$, кроме $i = \sigma$.

Метрика h -пространства типа [321]

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_3(f_5 - \epsilon x^3)^2 (f_6 - \epsilon x^3) \{ (dx^2)^2 + 4A dx^1 dx^3 + \\ 2(\epsilon x^1 - 2A \Sigma_1) dx^2 dx^3 + ((\epsilon x^1)^2 - 4\epsilon x^1 A \Sigma_1 + 4A^2 \Sigma_3) (dx^3)^2 \} + \\ e_5(\epsilon x^3 - f_5)^3 (f_6 - f_5) \{ 2\tilde{A} dx^4 dx^5 - \Sigma_4 \tilde{A}^2 (dx^5)^2 \} + e_6(f_5 - f_6)^2 (f_5 - f_6)^3 (dx^6)^2, \quad (9)$$

где

$$A = \epsilon x^2 + \theta(x^3), \quad \tilde{A} = \tilde{\epsilon} x^4 + \omega(x^5), \quad (10)$$

$$\Sigma_1 = (f_6 - \epsilon x^3)^{-1} + 2(f_5 - \epsilon x^3)^{-1}, \quad \Sigma_2 = (f_6 - \epsilon x^3)^{-2} + 2(f_5 - \epsilon x^3)^{-2},$$

$$2\Sigma_3 = (\Sigma_1)^2 - \Sigma_2, \quad \Sigma_4 = 3(\epsilon x^3 - f_5)^{-1} + (f_6 - f_5)^{-1},$$

$e_3, e_5, e_6 = \pm 1$, $f_1 = f_2 = f_3 = \epsilon x^3$, $f_4 = f_5 = \tilde{\epsilon} x^5 + a$, $\theta(x^3)$, $\omega(x^5)$, $f_6(x^6)$ – произвольные функции, $\epsilon, \tilde{\epsilon} = 0, 1$, $\epsilon \neq \tilde{\epsilon}$, a – константа, ненулевая, когда $\tilde{\epsilon} = 0$.

Метрика h -пространства типа [33]

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_3(f_6 - f_3)^3 \{(dx^2)^2 + 4Adx^1 dx^3 +$$

$$2(\epsilon x^1 - 2A\Sigma_1)dx^2 dx^3 + ((\epsilon x^1)^2 - 4\epsilon x^1 A\Sigma_1 + 4A^2\Sigma_2)(dx^3)^2\} +$$

$$e_6(f_3 - f_6)^3 \{(dx^5)^2 + 4\tilde{A}dx^4 dx^6 + 2(\tilde{\epsilon}x^4 + 2\tilde{A}\Sigma_1)dx^5 dx^6 + ((\tilde{\epsilon}x^4)^2 + 4\tilde{\epsilon}x^4 \tilde{A}\Sigma_1 + 4\tilde{A}^2\Sigma_2)(dx^6)^2\},$$

где

$$A = \epsilon x^2 + \theta(x^3), \quad \tilde{A} = \tilde{\epsilon}x^4 + \omega(x^6), \quad (12)$$

$$\Sigma_1 = 3(f_6 - f_3)^{-1}, \quad \Sigma_2 = 3(f_6 - f_3)^{-2},$$

$e_3, e_6 = \pm 1$, $f_1 = f_2 = f_3 = \epsilon x^3$, $f_4 = f_5 = f_6 = \tilde{\epsilon}x^6 + a$, $\epsilon, \tilde{\epsilon} = 0, 1$, $\epsilon \neq \tilde{\epsilon}$, a – константа, ненулевая, когда $\tilde{\epsilon} = 0$, $\theta(x^3)$, $\omega(x^6)$ – произвольные функции.

Метрика h -пространства типа [411]

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_4\Pi_\sigma(f_\sigma - \epsilon x^4) \{6Adx^1 dx^4 + 2dx^2 dx^3 + 2(2\epsilon x^2 - 3A\Sigma_1)dx^2 dx^4 -$$

$$\Sigma_1(dx^3)^2 + 2(\epsilon x^1 - 2\epsilon x^2\Sigma_1)dx^3 dx^4 + 4((\epsilon x^2)^2\Sigma_1 + \epsilon^2 x^1 x^2 - \frac{3}{2}\epsilon x^1 A\Sigma_1)(dx^4)^2\} +$$

$$3Adx^3 dx^4 + 12\epsilon x^2 A(dx^4)^2 + \sum_{\sigma} e_\sigma \Pi'_i(f_i - f_\sigma)(dx^\sigma)^2,$$

где

$$A = \epsilon x^3 + \theta(x^4), \quad \Sigma_1 = (f_5 - \epsilon x^4)^{-1} + (f_6 - \epsilon x^4)^{-1}, \quad (14)$$

$e_4, e_5, e_6 = \pm 1$, $\sigma = 5, 6$, $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = \epsilon x^4$, $f_5(x^5)$, $f_6(x^6)$, $\theta(x^4)$ – произвольные функции, $\epsilon = 0, 1$.

Метрика h -пространства типа [51]

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_5(f_6 - \epsilon x^5) \{8Adx^1 dx^5 + 2dx^2 dx^4 +$$

$$2(3\epsilon x^3 - 4A\Sigma_1)dx^2 dx^5 + (dx^3)^2 - 2\Sigma_1 dx^3 dx^4 + 2(2\epsilon x^2 - 3\epsilon x^3\Sigma_1)dx^3 dx^5 +$$

$$2(\epsilon x^1 - 2\epsilon x^2\Sigma_1)dx^4 dx^5 + 4(3/2\epsilon x^1 \epsilon x^3 + (\epsilon x^2)^2 - 2\epsilon x^1 A\Sigma_1 -$$

$$3\epsilon x^2 \epsilon x^3\Sigma_1)(dx^5)^2\} + e_6(\epsilon x^5 - f_6)^5(dx^6)^2,$$

где

$$A = \epsilon x^4 + \theta(x^5), \quad \Sigma_1 = (f_6 - \epsilon x^5)^{-1}, \quad (16)$$

$e_5, e_6 = \pm 1$, $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = \epsilon x^5$, $\theta(x^5)$, $f_6(x^6)$ – произвольные функции, $\epsilon = 0, 1$.

Определяющей функцией проективного движения в 6-мерных h -пространствах является

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 f_i. \quad (17)$$

В статье [6] мы определили условия постоянной кривизны 6-мерных h -пространств: для h -пространства типа [2211]:

$$\rho_p - \rho_{\sigma p} = \rho_p - \rho_{pq} = \epsilon = \tilde{\epsilon} = 0 \quad (p \neq q, p, q = 2, 4, \sigma = 5, 6), \quad (18)$$

для h -пространства типа [321]:

$$f'_6 = \epsilon = \tilde{\epsilon} = 0, \quad (19)$$

для h -пространства типа [33]:

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} = 0, \quad (20)$$

для h -пространства типа [411]:

$$\rho_p - \rho_{\sigma p} = \epsilon = \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \quad (\sigma = 5, 6, p = 4), \quad (21)$$

для h -пространства типа [51]:

$$f'_6 = \epsilon = 0, \quad (22)$$

где ρ_p , $\rho_{\sigma p}$, ρ_{pq} , γ_1 и γ_2 определены формулами

$$\rho_p = -\frac{1}{4} \sum_{\sigma} \frac{(f'_{\sigma})^2}{(f_{\sigma} - f_p)^2 g_{\sigma\sigma}}, \quad \rho_{pq} = -\frac{1}{4} \sum_{\sigma} \frac{(f'_{\sigma})^2}{(f_{\sigma} - f_p)(f_{\sigma} - f_q) g_{\sigma\sigma}}, \quad (23)$$

$$\rho_{\sigma p} = -\frac{1}{4} \frac{(f'_{\sigma})^2}{(f_{\sigma} - f_p) g_{\sigma\sigma}} \left\{ \frac{2f''_{\sigma}}{(f'_{\sigma})^2} - \frac{1}{f_{\sigma} - f_p} + \sum_{i, i \neq \sigma} (f_i - f_{\sigma})^{-1} \right\} - \frac{1}{4} \sum_{\gamma, \gamma \neq \sigma} \frac{(f'_{\gamma})^2}{(f_{\gamma} - f_p)(f_{\gamma} - f_{\sigma}) g_{\gamma\gamma}}.$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4} \sum_{\sigma} \frac{(f'_{\sigma})^2}{(f_{\sigma} - f_4)^3 g_{\sigma\sigma}}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{4} \sum_{\sigma} \frac{(f'_{\sigma})^2}{(f_{\sigma} - f_4)^4 g_{\sigma\sigma}}. \quad (24)$$

Результаты, полученные в работах [1–6], необходимы для исследования свойств определяющей функции проективного движения в 6-мерных h -пространствах типов [2211], [321], [33], [411] и [51].

Общая определяющая функция проективного движения в 6-мерных h -пространствах типов [2211], [321], [33], [411] и [51]. Здесь мы доказываем следующую теорему, которая явно дает любую определяющую функцию проективного движения.

Теорема. Любая определяющая функция проективного движения в h -пространствах типов [2211], [321], [33], [411] и [51] непостоянной кривизны может быть представлена как $\phi = a_1\varphi$, где a_1 – постоянная, функция φ определена в формуле (17).

Доказательство. Пусть дано векторное поле ξ^i , которое задает проективное движение с определяющей функцией ϕ в h -пространстве. Тогда для тензора $b_{ij} = L_{\xi}g_{ij}$ выполняются следующие уравнения Эйзенхарта [10]

$$b_{ij,k} = 2g_{ij}\phi_{,k} + g_{ik}\phi_{,j} + g_{jk}\phi_{,i}, \quad (25)$$

где запятая означает ковариантное дифференцирование относительно g .

Условия их интегрируемости –

$$b_{mi}R_{jkl}^m + b_{mj}R_{ikl}^m = g_{ik}\phi_{,jl} + g_{jk}\phi_{,il} - g_{li}\phi_{,jk} - g_{lj}\phi_{,ik}. \quad (26)$$

Покажем, что для любого проективного движения в h -пространствах удовлетворяются следующие условия:

$$b_{\alpha\beta} = 0, \quad \phi_{,\alpha\beta} = 0, \quad (27)$$

где α, β – индексы зануляющихся компонент метрики $g_{\alpha\beta}$ h -пространств типов [2211], [321], [33], [411] и [51].

Для h -пространств типа [2211] это множество $(ijkl) = (3112), (3314), (3\sigma 1\sigma), (1334), (1132), (1\sigma 3\sigma)$. Из (26) находим

$$b_{13}R_{112}^1 = -g_{12}\phi_{,13}, \quad b_{13}R_{314}^1 = -g_{34}\phi_{,13}, \quad b_{13}R_{\sigma 1\sigma}^1 = -g_{\sigma\sigma}\phi_{,13}, \quad (28)$$

$$b_{13}R_{334}^3 = -g_{34}\phi_{,13}, \quad b_{13}R_{132}^3 = -g_{12}\phi_{,13}, \quad b_{13}R_{\sigma 3\sigma}^3 = -g_{\sigma\sigma}\phi_{,13}. \quad (29)$$

Из (28) следует, что

$$b_{13}(\chi_2 - \rho_{24}) = b_{13}(\chi_2 - \rho_{\sigma 2}) = 0$$

и из (29)

$$b_{13}(\chi_4 - \rho_{24}) = b_{13}(\chi_4 - \rho_{\sigma 4}) = 0,$$

где

$$\chi_2 = \frac{\epsilon\theta'(x_2)}{A^2g_{12}} + \rho_2, \quad \chi_4 = \frac{\tilde{\epsilon}\omega'(x_4)}{\tilde{A}^2g_{34}} + \rho_4.$$

Здесь штрих означает производную по указанной переменной.

Если $b_{13} \neq 0$, тогда $\chi_p - \rho_{\sigma p} = 0$ ($p = 2, 4$). Поскольку мы рассматриваем h -пространство непостоянной кривизны, необходимо положить $b_{13} = 0$, отсюда $\phi_{,13} = 0$. Подобным образом можно получить другие равенства (27).

Для h -пространств типов [321], [33], [411] и [51] из условий интегрируемости можно также получить подобным образом равенства (27).

Рассмотрим уравнение (25). Полагая $(ijk) = (1\sigma\sigma), (3\sigma\sigma), (\sigma\tau\sigma), (\tau\sigma\tau)$ ($\sigma, \tau = 5, 6, \sigma \neq \tau$) для h -пространства типа [2211], мы определяем

$$\phi_{,1} = 0, \quad \phi_{,3} = 0, \quad (30)$$

$$\phi_{,\sigma} = f'_\sigma P_{\sigma\tau}, \quad \phi_{,\tau} = f'_\tau P_{\sigma\tau}, \quad P_{\sigma\tau} \equiv \frac{1}{2} \frac{b_{\tau\tau} g_{\tau\tau}^{-1} - b_{\sigma\sigma} g_{\sigma\sigma}^{-1}}{f_\tau - f_\sigma}, \quad (\sigma \neq \tau). \quad (31)$$

Отсюда следует, что $f'_\sigma \phi_{,\tau} = f'_\tau \phi_{,\sigma}$. Следовательно, из условия $\phi_{,\sigma\tau} = 0$ мы получаем

$$\partial_{\sigma\tau} \phi = 0. \quad (32)$$

Используя соотношения, полученные из (25) с $(ijk) = (1\tau 2), (2\tau\tau), (\tau\tau\tau)$, мы находим

$$\phi_{,\tau} = \frac{1}{2} \frac{f'_\tau}{f_\tau - f_2} \left(\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} - \frac{b_{12}}{g_{12}} \right), \quad (33)$$

$$\phi_{,2} = \frac{\epsilon}{f_\tau - f_2} \left(\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} - \frac{b_{12}}{g_{12}} \right), \quad (34)$$

$$\frac{\partial_\tau b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} = -f'_\tau \sum_{i,j \neq \tau} (f_i - f_\tau)^{-1} \frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} + 4\phi_{,\tau}. \quad (35)$$

Из (33) и (34) мы имеем

$$2\epsilon\phi_{,\tau} = f'_\tau \phi_{,2}. \quad (36)$$

Эти соотношения и условия $\phi_{,2\tau} = 0$ дают

$$\partial_{2\tau} \phi = 0. \quad (37)$$

Дифференцируя (33) по x^τ и учитывая (35), получаем

$$f'_\tau \partial_\tau \phi_{,\tau} = f''_\tau \phi_{,\tau}. \quad (38)$$

Теперь из (25) с $(ijk) = (142), (234)$ находим

$$\phi_{,2} = \frac{\tilde{\epsilon}}{f_4 - f_2} \left(\frac{b_{34}}{g_{34}} - \frac{b_{12}}{g_{12}} \right), \quad \phi_{,4} = \frac{\epsilon}{f_4 - f_2} \left(\frac{b_{34}}{g_{34}} - \frac{b_{12}}{g_{12}} \right). \quad (39)$$

Отсюда $\epsilon\phi_{,4} = \tilde{\epsilon}\phi_{,2}$ и, поскольку $\phi_{,24} = 0$, получаем $\partial_{24}\phi = 0$.

Предполагая, что $(ijk) = (3\tau 4), (4\tau\tau)$ в уравнении (25), получаем

$$2\tilde{\epsilon}\phi_{,\tau} = f'_{\tau}\phi_{,4}. \quad (40)$$

Следовательно, учитывая $\phi_{,4\tau} = 0$, мы имеем $\partial_{4\tau}\phi = 0$. Если не все $f'_{\tau} = 0$, то из (36), (38) и (40) получаем

$$\phi_{,\tau} = \frac{1}{2}a_1f'_{\tau}, \quad \phi_{,2} = a_1\epsilon, \quad \phi_{,4} = a_1\tilde{\epsilon}. \quad (41)$$

Первое уравнение из (41) корректно всегда, когда $f'_{\tau} = 0$ из-за соотношения (33). Интегрируя уравнение (41), мы получаем

$$\phi = \frac{1}{2}a_1 \sum_{i=1}^6 f_i = a_1\varphi, \quad f_1 = f_2 = \epsilon x^2, \quad f_3 = f_4 = \tilde{\epsilon}x^4 + a, \quad (42)$$

где φ определено формулой (17). Если все $f'_{\tau} = 0$, то из (26) с $(ijkl) = (\tau 2\tau 2), (\tau 4\tau 4)$ находим $\partial_{22}\phi = \partial_{44}\phi = 0$ и, значит, (42) корректно.

Для h -пространств типов [321], [33], [411] и [51] из уравнения (25) можно получить доказательство подобным образом.

Следовательно, теорема доказана.

Заключение. В данной работе мы установили важное свойство определяющей функции проективного движения в 6-мерном псевдоримановом пространстве специального типа. Следующая задача — это исследование свойств любого ковариантно-постоянного симметрического тензора в рассматриваемых пространствах, что вместе с результатами, полученными в этой работе, даст некоторое представление о проективно-групповых свойствах данных пространств и структуре проективной алгебры Ли. Также остается открытой проблема восстановления векторного поля, определяющего инфинитезимальное проективное преобразование.

Исследование частично поддержано грантом РФФИ 13-02-00475-а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] З. Х. Закирова, Кандидатская диссертация (КГУ, 2001).
- [2] З. Х. Закирова, Итоги науки и техники. Серия: Проблемы геометрии, N 23, 57 (1997).
- [3] З. Х. Закирова, Тезисы международного геометрического семинара им. Н. И. Лобачевского (КазГУ, Казань, 1997).

- [4] З. Х. Закирова, Известия вузов. Математика N 9, 78 (1999).
- [5] Z. Kh. Zakirova, Cz. J. Phys. **50**(11), 1541 (2005).
- [6] Z. Kh. Zakirova, Theor. Math. Phys. **158**(3), 293 (2009).
- [7] З. Х. Закирова, Краткие сообщения по физике ФИАН **38**(9), 39 (2011).
- [8] З. Х. Закирова, Уфимский математический журнал **5**(3), 41 (2013).
- [9] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия* (М., Издательство УРСС, 1998).
- [10] Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия* (Москва, ИЛ, 1948).
- [11] А. В. Аминова, УМН **50**(1), 69 (1995).
- [12] П. А. Широков, Известия казанского физ.-мат. общества **25**(2), 86 (1925).

Поступила в редакцию 9 сентября 2014 г.