З. Х. Закирова, О некоторых специальных решениях уравнения Эйзенхарта, *Уфимск. матем. журн.*, 2013, том 5, выпуск 3, 41–53

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 41-53.

УДК 514.764:517.95

О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ЭЙЗЕНХАРТА

З.Х. ЗАКИРОВА

Аннотация. В работе ведется исследование 6-мерных псевдоримановых пространств $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[++----]$, которые допускают проективные движения, то есть группы непрерывных преобразований, сохраняющих геодезические. Общий метод определения псевдоримановых многообразий, которые допускают негомотетическую проективную группу G_r, был развит А.В.Аминовой. А.В. Аминова классифицировала все лоренцевы многообразия размерности ≥ 3, которые допускают негомотетические проективные или афинные преобразования. Эта проблема не решена для псевдоримановых пространств с произвольной сигнатурой.

Для того чтобы найти псевдо-риманово пространство, допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}.$$

Псевдоримановы многообразия, для которых существуют нетривиальные решения $h_{ij} \neq cg_{ij}$ уравнений Эйзенхарта, называются *h-пространствами.* Известно, что проблема определения таких пространств зависит от типа h-пространства, т.е. от типа билинейной формы $L_X g_{ij}$, определенной характеристикой λ-матрицы $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$. Число возможных типов зависит от размерности и сигнатуры h-пространства.

В работе найдены метрики и определены квадратичные первые интегралы уравнений геодезических 6-мерных h-пространств типов $[(21\ldots1)(21\ldots1)\ldots(1\ldots1)]$.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, псевдоримановы многообразия, системы дифференциальных уравнений с частными производными.

Mathematics Subject Classification: 53C50, 53B30.

1. Введение

Линия $x^i(t)$ называется *геодезической*, если ее вектор скорости $T^i = dx^i/dt$ параллелен вдоль нее самой (см. [1]): $\nabla_t T = 0$. Уравнение геодезических в локальных координатах имеет вид

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0, \tag{1}$$

где Γ^i_{jk} — компоненты связности псевдориманова многообразия (M, g). Отметим, что здесь и далее по повторяющимся индексам идет суммирование.

Преобразование f псевдориманова многообразия M на себя называется *проективным преобразованием*, если оно переводит геодезические линии в геодезические линии.

Векторное поле X называется *инфинитезимальным проективным преобразованием* или *проективным движением*, если локальная однопараметрическая группа преобразований, порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $p \in M$, состоит из локальных проективных преобразований.

Z.Kh. Zakirova, On some special solutions of Eisenhart equation.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-02-00457-а).

Поступила 27 декабря 2011 г.

Векторное поле X является инфинитезимальным проективным преобразованием на многообразии M с аффинной связностью ∇ тогда и только тогда, когда [2] (см. также [8])

$$\nabla_Y(L_X Z - \nabla_X Z) - (L_X - \nabla_X)\nabla_Y Z = R(X,Y)Z - \varphi(Y)Z - Y\varphi(Z), \tag{2}$$

для поля 1-формы φ и всех векторных полей Y, Z на M, где R — тензор кривизны.

В локальных координатах:

$$L_X \Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j, \tag{3}$$

что равносильно

$$L_X \Gamma^i_{jk} \equiv \partial_{jk}\xi^i + \xi^l \partial_l \Gamma^i_{jk} - \Gamma^l_{jk}\partial_l \xi^i + \Gamma^i_{lk}\partial_j \xi^l + \Gamma^i_{jl}\partial_k \xi^l \equiv$$
$$\equiv \xi^i_{,jk} + \xi^l R^i_{jlk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j.$$

Если M — псевдориманово многообразие с метрикой g и римановой связностью ∇, то условие (2) эквивалентно уравнениям (см. [2], [8]):

$$L_X g = h, \tag{4}$$

$$\nabla h(Y,Z,W) = 2g(Y,Z)W\varphi + g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi, \tag{5}$$

где $(Y,Z,W) \in T(M)$, $\varphi = \frac{1}{n+1}\mathrm{div}X$. Уравнение (4) называется *обобщенным уравнением Киллинга*, второе уравнение (5) называется *уравнением Эйзенхарта.*

Впервые проблема определения $2D$ римановых многообразий, которые допускают проективные движения или инфинитезимальные проективные преобразования, т.е. непрерывные группы преобразований, сохраняющих геодезические, рассматривались С. Ли и М. Кенигсом (см. [3]). Другие важные результаты были получены А.З. Петровым в работе [4], который классифицировал геодезически эквивалентные псевдоримановы пространства V^3. В дальнейшем, А.В. Аминова полностью решила эту задачу в [5]. Для риманова многообразия с размерностью > 2 похожая проблема была решена Г. Фубини в [6] и А.С. Солодовниковым в [7][1], в их трудах содержится классификация римановых пространств с размерностью > 2 по локальным группам проективных преобразований, более широким, чем группы гомотетий. Заметим, что их выводы опирались на предположение о положительной определенности рассматриваемых метрик. Если отказаться от условия знакоопределенности, задача намного усложняется и требует совершенно нового метода решения.

В работе [8] А.В. Аминова классифицировала все лоренцевы многообразия размерности ≥ 3, допускающие негомотетические инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования. В каждом случае были определены соответствующие максимальные проективные и аффинные алгебры Ли.

Данная проблема не решена для псевдориманова пространства с произвольной сигнатурой.

Для того чтобы найти псевдориманово пространство, допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта (5). Задача определения таких пространств зависит от типа h-пространств, т.е. от типа билинейной формы $L_X g$, определяемой характеристикой Сегре λ-матрицы $(h - \lambda g)$ (см. [8]). Если характеристика тензора $L_X g$ есть $[abc...]$, то мы будем называть соответствующее пространство — h-пространством типа $[abc...]$. Эти идеи впервые были высказаны П.А. Широковым (см. [10]). Таким образом, псевдориманово пространство, для которого существует нетривиальное решение $h \neq cg$ уравнения Эйзенхарта, называется *h-пространством.*

Число возможных типов зависит от размерности и сигнатуры псевдориманова пространства. В частности, для 6-мерного псевдориманова пространства $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[++----]$ возможны следующие типы:

1) $[(1...1)...(1...1)]$, т.е. $[111111]$, $[(11)1111]$, $[(111)111]$ и т.д.;

---

[1] Следует отметить, что полный обзор литературы по этой теме дан в работе [8] и в кандидатской диссертации автора [9].

2) $[1\bar{1}(1...1)...(1...1)]$, т.е. $[1\bar{1}111 1]$, $[1\bar{1}(11)11]$, $[1\bar{1}(111)1]$ и т.д;
3) $[11\bar{1}\bar{1}(1...1)...(1...1)]$, т.е. $[(11)\bar{1}\bar{1}11]$, $[(11)(\bar{1}\bar{1})11]$, $[11\bar{1}\bar{1}(11)]$ и т.д ;
4) [(21...1)...(1...1)], т.е. [21111], [(21)111], [(211)11] и т.д.;
5) $[(21)11\bar{1}]$, $[(211)1\bar{1}]$, $[2(11)1\bar{1}]$;
6) [(21...1)(21...1)(1...1)(1...1)], т.е. [2211], [(22)11], [2(21)1], [(21)(21)] и т.д.;
7) $[2\bar{2}11]$, $[2\bar{2}(11)]$;
8) [(31...1)...(1...1)], т.е. [3111], [(31)11], [(311)1] и т.д.;
9) $[311\bar{1}]$, $[(31)1\bar{1}]$;
10) [321], [3(21)], [(32)1], [(321)];
11) [33], [(33)];
12) [411], (41)1], [4(11)], [(411)];
13) [51], [(51)].

Отметим, что h-пространства под номерами 1), 2), 3) были исследованы Г.Фубини в [6] и А.С. Солодовниковым в [7], h-пространства под номерами 4), 5), 8), 9) были исследованы А.В. Аминовой в [8], h-пространства под номерами 6), 7), 10), 11), 12), 13) были исследованы автором в кандидатской диссертации [9]. Некоторые результаты были опубликованы в [11]-[15].

Целью данной работы является исследование 6-мерных псевдоримановых пространств $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[++----]$. В частности, мы найдем метрики 6-мерных h-пространств типов [22(11)], [2(21)1],[2(211)], [(22)11], [(221)1], [(2211)], [(22)(11)], [(21)(21)] и определим первые квадратичные интегралы уравнений геодезических этих h-пространств. Метрика h-пространства типа [2211] была получена автором в [11].

Основной метод определения псевдоримановых многообразий, допускающих негомотетическую проективную группу G_r, был развит А.В. Аминовой (см. [8])[1]. Используя в данной работе технику интегрирования в косонормальном (подвижном) репере, мы найдем метрики рассматриваемых h-пространств.

Уравнение Эйзенхарта

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}, \tag{6}$$

в косонормальном репере имеет вид (см. [8])[2]

$$X_r\overline{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{n} e_h(\overline{a}_{hq}\gamma_{\tilde{h}pr} + \overline{a}_{ph}\gamma_{\tilde{h}qr}) = \overline{g}_{pr}X_q\varphi + \overline{g}_{qr}X_p\varphi \quad (p,q,r = 1,\ldots,n), \tag{7}$$

где

$$X_r\varphi \equiv \underset{r}{\xi^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \quad \gamma_{pqr} = -\gamma_{qpr} = \underset{p}{\xi}_{i,j}\underset{q}{\xi^i}\underset{r}{\xi^j}, \quad a_{ij} = h_{ij} - 2\varphi g_{ij},$$

$\underset{i}{\xi^j}$ — компоненты косонормального репера, $\overline{g}_{pr} = e_p\delta_{\tilde{p}}^{\ r}$ и $\overline{a}_{pq}$ — канонические формы тензоров g_{pr}, a_{pq}, соответственно, $\gamma^p_{lk} = e_p\gamma_{l\tilde{p}k}$ — компоненты связности в косонормальном репере X. Коммутаторы векторных полей X_k and X_h определяются по формуле (см. [8])

$$[X_k, X_h] = \sum_{l=1}^{n} e_l(\gamma_{lkh} - \gamma_{lhk})X_{\tilde{l}}, \tag{8}$$

---

[1] Впервые техника интегрирования в косонормальном репере была применена в работах [16], [17].

[2] Отображение $\sim$, которое переводит одни индексы в другие, было впервые введено А.В. Аминовой в работах [16], [17] (см. также [8]) в определении косонормального (подвижного) репера. Следует заметить, что данные статьи А.В. Аминовой можно найти в интернете по ссылке http://www.mathnet.ru/php/person.phtml?option_lang=rus&personid=8394. Опуская громоздкое определение косонормального (подвижного) репера, достаточно привести несколько примеров, и читателям станет понятно действие отображения $\sim$. К примеру, для h-пространства типа [2211] $\tilde{1} = 2$, $\tilde{2} = 1$, $\tilde{3} = 4$, $\tilde{4} = 3$, $\tilde{5} = 5$, $\tilde{6} = 6$; для h-пространства типа [321] $\tilde{1} = 3$, $\tilde{2} = 2$, $\tilde{3} = 1$, $\tilde{4} = 5$, $\tilde{5} = 4$, $\tilde{6} = 6$; для h-пространства типа [411] $\tilde{1} = 4$, $\tilde{2} = 3$, $\tilde{3} = 2$, $\tilde{4} = 1$, $\tilde{5} = 5$, $\tilde{6} = 6$. Эти же соотношения сохраняются и в случае кратных элементарных делителей, т.е. при наличие скобок в типах h-пространств, например, в случае [22(11)], [2(211)] и т.д.

что равносильно

$$[X_k, X_h] = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}(\gamma_{mkh} - \gamma_{mhk})\overline{g}^{ml}X_l.$$

Отметим, что для 6-мерных h-пространств типа $[(21\dots1)(21\dots1)\dots(1\dots1)]$ $\tilde{1} = 2$, $\tilde{2} = 1$, $\tilde{3} = 4$, $\tilde{4} = 3$, $\tilde{5} = 5$, $\tilde{6} = 6$ (см. [8]).

Для 6-мерных h-пространств типа $[(21\dots1)(21\dots1)\dots(1\dots1)]$ канонические формы $\overline{g}_{pr}$ и $\overline{a}_{pq}$ имеют вид (см. [4])

$$\overline{g}_{pr} = \begin{pmatrix} 0 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_6 \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

$$\overline{a}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & e_2\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4\lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_4\lambda_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_5\lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_6\lambda_6 \end{pmatrix},$$

где $e_1 = e_2, e_3 = e_4, e_i = \pm1, (i = 1, 2, ..., 6)$, $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$, λ_5, λ_6 — вещественные функции, которые могут совпадать. Эти функции являются корнями характеристического уравнения $\det(h_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0$.

2. Метрика h-пространства типа [22(11)]

Подставив канонические формы $\overline{g}_{pr}$ и $\overline{a}_{pq}$ из (9) в (7) и учитывая, что для h-пространства типа [22(11)] $\lambda_5 = \lambda_6$, $\tilde{1} = 2$, $\tilde{2} = 1$, $\tilde{3} = 4$, $\tilde{4} = 3$, $\tilde{5} = 5$, $\tilde{6} = 6$, получим следующую систему уравнений

$$\begin{gathered} X_r\lambda_2 = 0\ (r \neq 2), \quad X_r\lambda_4 = 0\ (r \neq 4), \quad X_r\lambda_6 = 0, \\ X_2(\lambda_2 - \varphi) = X_4(\lambda_4 - \varphi) = 0, \quad \gamma_{121} = e_2X_2\varphi, \quad \gamma_{343} = e_4X_4\varphi, \\ \gamma_{142} = \gamma_{241} = \frac{e_2X_4\varphi}{\lambda_2 - \lambda_4}, \quad \gamma_{242} = -\frac{e_2X_4\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_4)^2}, \quad \gamma_{324} = \gamma_{423} = \frac{e_4X_2\varphi}{\lambda_4 - \lambda_2}, \\ \gamma_{424} = -\frac{e_4X_2\varphi}{(\lambda_4 - \lambda_2)^2}, \quad \gamma_{244} = \frac{e_4X_2\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_4)^2}, \quad \gamma_{s\sigma\sigma} = \frac{e_\sigma X_s\varphi}{(\lambda_s - \lambda_\sigma)}, \end{gathered} \qquad (10)$$

где $r = 1, 2, ..., 6$, $\sigma = 5, 6$, $s = 2, 4$, γ_{56r} — произвольные. Остальные γ_{pqr} равны нулю.

Известно, для того чтобы система линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$X_q\theta = \underset{q}{\xi^i}\partial_i\theta = 0, \quad (q = 1, \dots, m, i = 1, \dots, 6, m < 6), \qquad (11)$$

где $\underset{q}{\xi^i}$ — компоненты косонормального репера, была вполне интегрируемой, т.е. чтобы она допускала $6 - m$ независимых решений, необходимо и достаточно, чтобы все коммутаторы операторов системы ([2], см. также [8])

$$[X_q, X_r] = X_qX_r - X_rX_q = \sum_{p=1}^{6} e_p(\gamma_{pqr} - \gamma_{prq})X_{\tilde{p}} \qquad (12)$$

линейно выражались через операторы X_q.

Используя формулы (10) и (12), выпишем коммутаторы операторов X_i $(i = 1, \dots, 6)$ в рассматриваемом h-пространстве:

$$\begin{gathered}[X_1, X_2] = -e_1\gamma_{121}X_2, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_2, X_3] = e_4\gamma_{423}X_3,\\ [X_1, X_4] = -e_2\gamma_{241}X_1, \quad [X_3, X_4] = -e_3\gamma_{343}X_4,\\ [X_2, X_4] = -e_2\gamma_{242}X_1 - e_1\gamma_{142}X_2 + e_4\gamma_{424}X_3 + e_3\gamma_{324}X_4,\\ [X_p, X_\sigma] = -e_\tau\gamma_{\tau\sigma p}X_\tau, \quad [X_q, X_\sigma] = e_\sigma\gamma_{\sigma q\sigma}X_\sigma - e_\tau\gamma_{\tau\sigma q}X_\tau,\\ [X_5, X_6] = -e_5\gamma_{565}X_5 + e_6\gamma_{656}X_6,\end{gathered} \tag{13}$$

где $p = 1, 3,\ q = 2, 4,\ \sigma, \tau = 5, 6\ (\sigma \neq \tau)$.

Далее, составляя вполне интегрируемые системы (11) из (13), мы определим допускаемые этими системами независимые решения, которые обозначим через θ^i. После чего, с помощью преобразования координат $x^{i'} = \theta^i(x)$, мы можем обратить в нуль некоторые компоненты $\underset{q}{\xi}^i$ введенного выше косонормального репера. В частности, вполне интегрируемыми системами из (13) являются системы: $X_1\theta = X_3\theta = X_4\theta = X_5\theta = X_6\theta = 0$, $X_1\theta = X_2\theta = X_3\theta = X_5\theta = X_6\theta = 0$, $X_1\theta = X_2\theta = X_3\theta = X_4\theta$, $X_3\theta = X_4\theta = X_5\theta = X_6\theta = 0$, $X_1\theta = X_2\theta = X_5\theta = X_6\theta = 0$. Обозначим решение первой системы — θ^2, второй системы — θ^4, решения третьей системы — θ^5 и θ^6. Четвертая система имеет два независимых решения, одно из которых обозначим через θ^1, а второе выберем совпадающим с θ^2 . Последняя система имеет также два независимых решения, одно обозначим через θ^3, а второе выберем совпадающим с θ^4. После преобразования координат $x^{i'} = \theta^i(x)$ в новой системе координат, опустив штрихи, определим

$$\underset{p}{\xi}^i = P_p(x)\delta_p{}^i, \quad \underset{2}{\xi}^3 = \underset{2}{\xi}^4 = \underset{2}{\xi}^\sigma = \underset{4}{\xi}^1 = \underset{4}{\xi}^2 = \underset{4}{\xi}^\sigma = \underset{\sigma}{\xi}^\alpha = 0, \tag{14}$$

где $p = 1, 3$, $\sigma = 5, 6$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, $P_p(x)$ — произвольные функции.

С помощью равенств (14) из той части уравнений (10), которая не содержит γ_{pqr}, найдем

$$2\varphi = \sum_{i=1}^{6} f_i + c, \quad \lambda_i = f_i, \tag{15}$$

где $f_1 = f_2(x^2)$, $f_3 = f_4(x^4)$ — произвольные функции, $f_5 = f_6 = \lambda$ — const, c — const.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых производных $\partial/\partial x^i$ в правых и левых частях равенств (13), с помощью формул (10) и (14) получим систему уравнений на компоненты $\underset{i}{\xi}^j$ косонормального репера:

1° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1 - \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1 - \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1 = -f'_2\underset{2}{\xi}^2\underset{2}{\xi}^1$,

2° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2 = -f'_2(\underset{2}{\xi}^2)^2$,

3° $\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{1}{\xi}^1 = \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1 = \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^2 = 0$,

4° $\partial_4\underset{1}{\xi}^1 = \frac{f'_4}{f_2-f_4}\underset{1}{\xi}^1$,

5° $\partial_4\underset{2}{\xi}^1 = \frac{f'_4}{f_2-f_4}\underset{2}{\xi}^1 - \frac{f'_4}{(f_2-f_4)^2}\underset{1}{\xi}^1$,

6° $\partial_4\underset{2}{\xi}^2 = \frac{f'_4}{f_2-f_4}\underset{2}{\xi}^2$,

7° $\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^3 - \underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{3}{\xi}^3 - \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^3 = -f'_4\underset{4}{\xi}^4\underset{4}{\xi}^3$,

8° $\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^4 = -f'_4(\underset{4}{\xi}^4)^2$,

9° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^3 = \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4 = 0$,

10° $\partial_2\underset{3}{\xi}^3 = \frac{f'_2}{f_4-f_2}\underset{3}{\xi}^3$, 11° $\partial_2 \underset{4}{\xi}^3 = \frac{f_2'}{f_4-f_2}\underset{4}{\xi}^3 - \frac{f_2'}{(f_4-f_2)^2}\underset{3}{\xi}^3$,

12° $\partial_2 \underset{4}{\xi}^4 = \frac{f_2'}{f_4-f_2}\underset{4}{\xi}^4$,

13° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{\sigma}{\xi}^\sigma = -\gamma_{\tau\sigma 1}\underset{\tau}{\xi}^\sigma, \quad (\tau\neq\sigma)$,

14° $\underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{\sigma}{\xi}^\tau = -\gamma_{\tau\sigma 1}\underset{\tau}{\xi}^\tau, \quad (\tau\neq\sigma)$,

15° $\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{\sigma}{\xi}^\sigma = -\gamma_{\tau\sigma 3}\underset{\tau}{\xi}^\sigma, \quad (\tau\neq\sigma)$,

16° $\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{\sigma}{\xi}^\tau = -\gamma_{\tau\sigma 3}\underset{\tau}{\xi}^\tau, \quad (\tau\neq\sigma)$,

17° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{\sigma}{\xi}^\sigma + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{\sigma}{\xi}^\sigma = -\frac{f_2'}{f_2-\lambda}\underset{2}{\xi}^2\underset{\sigma}{\xi}^\sigma - \gamma_{\tau\sigma 2}\underset{\tau}{\xi}^\sigma, \quad (\tau\neq\sigma)$,

18° $\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{\sigma}{\xi}^\tau + \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{\sigma}{\xi}^\tau = -\frac{f_2'}{f_2-\lambda}\underset{2}{\xi}^2\underset{\sigma}{\xi}^\tau - \gamma_{\tau\sigma 2}\underset{\tau}{\xi}^\tau, \quad (\tau\neq\sigma)$,

19° $\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{\sigma}{\xi}^\sigma + \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{\sigma}{\xi}^\sigma = -\frac{f_4'}{f_4-\lambda}\underset{4}{\xi}^4\underset{\sigma}{\xi}^\sigma - \gamma_{\tau\sigma 4}\underset{\tau}{\xi}^\sigma, \quad (\tau\neq\sigma)$,

20° $\underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{\sigma}{\xi}^\tau + \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{\sigma}{\xi}^\tau = -\frac{f_4'}{f_4-\lambda}\underset{4}{\xi}^4\underset{\sigma}{\xi}^\tau - \gamma_{\tau\sigma 4}\underset{\tau}{\xi}^\tau, \quad (\tau\neq\sigma)$,

21° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{6}{\xi}^5 + \underset{5}{\xi}^6\partial_6\underset{6}{\xi}^5 - \underset{6}{\xi}^5\partial_5\underset{5}{\xi}^5 - \underset{6}{\xi}^6\partial_6\underset{5}{\xi}^5 = -\gamma_{565}\underset{5}{\xi}^5 + \gamma_{656}\underset{6}{\xi}^5$,

22° $\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{6}{\xi}^6 + \underset{5}{\xi}^6\partial_6\underset{6}{\xi}^6 - \underset{6}{\xi}^5\partial_5\underset{5}{\xi}^6 - \underset{6}{\xi}^6\partial_6\underset{5}{\xi}^6 = -\gamma_{565}\underset{5}{\xi}^6 + \gamma_{656}\underset{6}{\xi}^6$,

23° $(\underset{\sigma}{\xi}^\sigma\partial_\sigma + \underset{\sigma}{\xi}^\tau\partial_\tau)\underset{\alpha}{\xi}^\beta = 0, \quad (\tau\neq\sigma)$,

где $\alpha,\beta = 1,2,3,4$, $\sigma,\tau = 5,6$, $f_2' = \frac{df_2}{dx^2}$, $f_4' = \frac{df_4}{dx^4}$.

Из уравнения 23° следует, что все $\underset{\alpha}{\xi}^\beta$ не зависят от переменных x^5, x^6. Интегрируя уравнения 3°, 4°, 9°, 10°, найдем

$$\underset{1}{\xi}^1 = (f_4-f_2)^{-1}F_1(x^1,x^2),$$

$$\underset{3}{\xi}^3 = (f_2-f_4)^{-1}F_3(x^3,x^4),$$

где F_1, F_3 — функции указанных переменных, не равные нулю вследствие линейной независимости векторов репера и формул (14). Из уравнения 3° также следует, что $\underset{2}{\xi}^1$ не зависит от переменной x^3.

Выражения для найденных компонент репера можно упростить с помощью преобразования координат

$$\overline{x}^1 = \int\frac{dx^1}{F_1}, \quad \overline{x}^2 = x^2, \quad \overline{x}^3 = \int\frac{dx^3}{F_3}, \quad \overline{x}^4 = x^4, \quad \overline{x}^\sigma = x^\sigma,$$

которое не меняет вида равенств (14). В новой системе координат получим

$$\underset{1}{\xi}^1 = (f_4-f_2)^{-1}, \quad \underset{3}{\xi}^3 = (f_2-f_4)^{-1}. \tag{16}$$

После этого, интегрируя уравнения 2° и 6° с учетом 3°, найдем

$$\underset{2}{\xi}^2 = (f_4-f_2)^{-1}(f_2'x^1+\theta(x^2))^{-1},$$

где $\theta(x^2)$ — произвольная функция переменной x^2.

Возможны два случая: 1) $f_2' = 0$, 2) $f_2' \neq 0$. Во втором случае сделаем координатное преобразование $\overline{x}^2 = f_2(x^2)$, $\overline{x}^p = x^p$ $(p\neq 2)$ и положим $\overline{\theta} = (f_2')^{-1}\theta$. Опуская черту, можно объединить оба случая одной формулой

$$\underset{2}{\xi}^2 = (f_4-f_2)^{-1}A^{-1}, \tag{17}$$

где
$$A = \epsilon x^1 + \theta, \quad f_1 = f_2 = \epsilon x^2,$$
ϵ равно 0 либо 1, θ — функция переменной x^2, отличная от нуля при $\epsilon = 0$.

Следуя подобным рассуждениям, проинтегрировав уравнения 8°, 12° с учетом 9°, получим
$$\underset{4}{\xi}^4 = (f_2 - f_4)^{-1}\tilde{A}^{-1}. \tag{18}$$
Здесь
$$\tilde{A} = \tilde{\epsilon} x^3 + \omega, \quad f_3 = f_4 = \tilde{\epsilon} x^4 + a,$$
$\tilde{\epsilon}$ равно 0 либо 1, a — const, отличная от нуля при $\tilde{\epsilon} = 0$, ω — функция переменной x^4, также отличная от нуля при $\tilde{\epsilon} = 0$.

Интегрируя уравнения 1°, 5°, 7° и 11° с учетом 3°, 9°, найдем
$$\underset{2}{\xi}^1 = (f_4 - f_2)^{-1}((f_4 - f_2)^{-1} + Q(x^2)),$$
$$\underset{4}{\xi}^3 = (f_2 - f_4)^{-1}((f_2 - f_4)^{-1} + R(x^4)),$$
где $Q(x^2), R(x^4)$ — функции указанных переменных.

С помощью преобразования координат
$$\overline{x}^1 = x^1 - \int Q dx^2, \quad \overline{x}^3 = x^3 - \int R dx^2, \quad \overline{x}^p = x^p \ (p \neq 1, 3)$$
можно обратить в нуль функции Q и R, при этом не изменив полученные раннее формулы. После чего компоненты $\underset{2}{\xi}^1$ и $\underset{4}{\xi}^3$ косонормального репера примут вид
$$\underset{2}{\xi}^1 = (f_4 - f_2)^{-2}, \quad \underset{4}{\xi}^3 = (f_2 - f_4)^{-2}. \tag{19}$$

Используя полученные результаты и формулу (см. [8])
$$g^{ij} = \sum_{h=1}^{6} e_h \underset{h}{\xi}^i \underset{\tilde{h}}{\xi}^j, \tag{20}$$
можно вычислить следующие контравариантные компоненты метрического тензора рассматриваемого h-пространства:
$$g^{11} = 2e_2(f_4 - f_2)^{-3}, \quad g^{12} = e_2(f_4 - f_2)^{-2}A^{-1},$$
$$g^{33} = 2e_4(f_2 - f_4)^{-3}, \quad g^{34} = e_4(f_2 - f_4)^{-2}\tilde{A}^{-1}.$$

Из формулы (20) также следует, что в рассматриваемом h-пространстве $g^{\sigma\tau} = e_\sigma \underset{\sigma}{\xi}^\sigma \underset{\sigma}{\xi}^\tau + e_\tau \underset{\tau}{\xi}^\sigma \underset{\tau}{\xi}^\tau$, $\sigma, \tau = 5, 6$. С помощью уравнений 13°, 14°, 15°, 16° нетрудно показать, что $\underset{1}{\xi}^1 \partial_1 g^{\sigma\tau} = \underset{3}{\xi}^3 \partial_3 g^{\sigma\tau} = 0$, отсюда $\partial_1 g^{\sigma\tau} = \partial_3 g^{\sigma\tau} = 0$. Тогда из уравнений 17°, 18°, 19°, 20° следует
$$\partial_2 g^{\sigma\tau} = -2\frac{f_2'}{f_2 - \lambda} g^{\sigma\tau}, \quad \partial_4 g^{\sigma\tau} = -2\frac{f_4'}{f_4 - \lambda} g^{\sigma\tau}.$$

Интегрируя эти уравнения, принимая во внимание уравнения 21°, 22°, найдем
$$g^{\sigma\tau} = (f_2 - \lambda)^{-2}(f_4 - \lambda)^{-2} F^{\sigma\tau}(x^5, x^6), \tag{21}$$
где $F^{\sigma\tau}$ — произвольные функции переменных x^5, x^6.

Далее, вычислив ковариантные компоненты g_{ij} метрического тензора, с помощью формул (см. [8])
$$\underset{h}{\xi}_i = g_{ij} \underset{h}{\xi}^j, \quad a_{ij} = \sum_{h,l=1}^{n} e_h e_l \overline{a}_{hl} \underset{\tilde{h}}{\xi}_i \underset{\tilde{l}}{\xi}_j, \tag{22}$$
мы найдем компоненты тензора a_{ij}.

Запишем итоговый результат в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Если симметрический тензор h_{ij} типа $[22(11)]$ и скаляр φ удовлетворяют в $V^6(g_{ij})$ уравнениям (1), то существует голономная система координат, в которой φ, g_{ij} и h_{ij} определяются формулами*

$$\begin{aligned} g_{ij}dx^i dx^j = e_2 A(f_4-f_2)\{(f_4-f_2)dx^1dx^2 - A(dx^2)^2)\}+ \\ +e_4\tilde{A}(f_2-f_4)\{(f_2-f_4)dx^3dx^4 - \tilde{A}(dx^4)^2\}+ \\ +F_{\sigma\tau}(f_2-\lambda)^2(f_4-\lambda)^2 dx^\sigma dx^\tau, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} a_{ij}dx^idx^j = f_2 g_{i_1j_1}dx^{i_1}dx^{j_1}+ \\ +Ag_{12}(dx^2)^2+f_4 g_{i_2j_2}dx^{i_2}dx^{j_2} + \tilde{A}g_{34}(dx^4)^2 + \lambda g_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau, \end{aligned} \tag{24}$$

$$h_{ij} = a_{ij} + 2\varphi g_{ij}, \quad 2\varphi = 2f_2 + 2f_4 + c, \tag{25}$$

$$A = \epsilon x^1 + \theta(x^2), \quad \tilde{A} = \tilde{\epsilon}x^3 + \omega(x^4), \tag{26}$$

где $\epsilon, \tilde{\epsilon} = 0,1$, $f_2 = \epsilon x^2$, $f_4 = \tilde{\epsilon}x^4 + a$, λ, c и a — постоянные, $a \neq 0$ когда $\tilde{\epsilon} = 0$, $F_{\sigma\tau}(x^5,x^6), \theta(x^2), \omega(x^4)$ — произвольные функции, $\theta \neq 0$ когда $\epsilon = 0$, $\omega \neq 0$ когда $\tilde{\epsilon} = 0$, $i_1, j_1 = 1,2$, $i_2, j_2 = 3,4$, $\sigma,\tau = 5,6$, $e_2, e_4 = \pm 1$.

3. Метрики h-пространств типов [2(21)1],[2(211)]

В этом случае и в остальных случаях, рассмотренных ниже, проделываются вычисления, аналогичные h-пространству типа [22(11)]. В связи с этим некоторые выкладки будут опущены.

Подставив канонические формы $\overline{g}_{pr}$ и $\overline{a}_{pq}$ из (9) в (7) с учетом того, что для h-пространства типа [2(21)1] $\lambda_4 = \lambda_5$, получим

$$\begin{gathered} X_r\lambda_2 = 0 \ (r \neq 2), \quad X_r\lambda_5 = 0, \quad X_r\lambda_6 = 0 \ (r \neq 6), \\ X_2(\lambda_2 - \varphi) = X_6(\lambda_6 - \varphi) = 0, \quad \gamma_{121} = e_2 X_2\varphi, \\ \gamma_{162} = \gamma_{261} = \frac{e_2X_6\varphi}{\lambda_2-\lambda_6}, \quad \gamma_{262} = -\frac{e_2X_6\varphi}{(\lambda_2-\lambda_6)^2}, \quad \gamma_{3s4} = \gamma_{4s3} = \frac{e_4X_s\varphi}{\lambda_5-\lambda_s}, \\ \gamma_{4s4} = -\frac{e_4X_s\varphi}{(\lambda_5-\lambda_s)^2}, \quad \gamma_{2\sigma\sigma} = \frac{e_\sigma X_2\varphi}{(\lambda_2-\lambda_\sigma)}, \quad \gamma_{565} = \frac{e_5X_6\varphi}{\lambda_5-\lambda_6}, \end{gathered} \tag{27}$$

где $r = 1,2,...,6$, $\sigma = 5,6$, $s = 2,6$, γ_{45r} — произвольные, остальные γ_{pqr} равны нулю.

Коммутаторы операторов h-пространства типа [2(21)1] имеют вид

$$\begin{gathered} [X_1,X_2] = -e_1\gamma_{121}X_2, \quad [X_1,X_3] = 0, \\ [X_2,X_3] = e_4\gamma_{423}X_3, \quad [X_1,X_4] = -e_5\gamma_{541}X_5, \\ [X_1,X_5] = -e_4\gamma_{451}X_3, \quad [X_1,X_6] = -e_2\gamma_{261}X_1, \\ [X_2,X_4] = e_3\gamma_{324}X_4 + e_4\gamma_{424}X_3 - e_5\gamma_{542}X_5, \\ [X_2,X_5] = e_5\gamma_{525}X_5 - e_4\gamma_{425}X_3, \\ [X_2,X_6] = -e_2\gamma_{262}X_1 - e_1\gamma_{162}X_2 + e_6\gamma_{626}X_6, \\ [X_3,X_4] = -e_5\gamma_{543}X_5, \quad [X_3,X_5] = -e_4\gamma_{453}X_3, \\ [X_3,X_6] = -e_4\gamma_{463}X_3, \quad [X_4,X_5] = -e_4\gamma_{454}X_3 + e_5\gamma_{545}X_5, \\ [X_4,X_6] = -e_3\gamma_{364}X_4 - e_4\gamma_{464}X_3 + e_5\gamma_{546}X_5, \\ [X_5,X_6] = e_4\gamma_{456}X_3 - e_5\gamma_{565}X_5. \end{gathered} \tag{28}$$

Отсюда следует, что системы $X_i\theta = 0$ $(i \neq 2)$, $X_j\theta = 0$ $(j \neq 4)$, $X_k\theta = 0$ $(k \neq 6)$ являются вполне интегрируемыми и имеют, соответственно, следующие решения: θ^2, θ^4, θ^6. Системы $X_3\theta = X_4\theta = X_5\theta = X_6\theta = 0$, $X_1\theta = X_2\theta = X_3\theta = X_6\theta = 0$ и $X_1\theta = X_2\theta = X_6\theta = 0$ также вполне интегрируемые. Первая система имеет решения θ^1 и θ^2, вторая система имеет решения θ^4 и θ^5, третья система имеет решения θ^3, θ^4 и θ^5. После координатного преобразования $x^{i'} = \theta^i(x)$, опустив штрихи, получим

$$\underset{p}{\xi}^i = P_p(x)\delta_p{}^i, \quad \underset{2}{\xi}^s = \underset{4}{\xi}^q = \underset{5}{\xi}^q = \underset{5}{\xi}^4 = 0, \tag{29}$$

где $p = 1, 2, 3,\ s = 3, 4, 5, 6,\ q = 1, 2, 6,\ P_p(x)$ — произвольные функции.

Проинтегрировав систему уравнений (28) с учетом (27) и (29) подобно предыдущему случаю, а затем вычислив компоненты тензоров g_{ij} и a_{ij}, мы придем к следующему результату

$$\begin{gathered} g_{ij}dx^i dx^j = e_2\{2(f_6 - f_2)Adx^1dx^2 - A^2(dx^2)^2\}+ \\ +(f_6-\lambda)(f_2-\lambda)^2\{2e_4dx^3dx^4 - e_4(\Sigma+\omega)(dx^4)^2 + e_5(dx^5)^2\}+ \\ +e_6(f_2-f_6)^2(dx^6)^2, \end{gathered} \tag{30}$$

$$\begin{gathered} a_{ij}dx^i dx^j = f_2 g_{i_1j_1}dx^{i_1}dx^{j_1}+ \\ +g_{12}(dx^2)^2+\lambda g_{i_2j_2}dx^{i_2}dx^{j_2} + g_{34}(dx^4)^2 + f_6 g_{66}(dx^6)^2, \end{gathered} \tag{31}$$

$$h_{ij} = a_{ij} + (2f_2 + f_6 + c)g_{ij}, \quad \varphi = f_2 + \frac{1}{2}f_6 + c, \tag{32}$$

$$A = \epsilon x^1 + \theta(x^2), \quad \Sigma = 2(f_2-\lambda)^{-1} + (f_6-\lambda)^{-1}, \tag{33}$$

где $\epsilon = 0, 1,\ f_2 = \epsilon x^2,\ \lambda$ и c — постоянные, $\theta(x^2), \omega(x^4, x^5), f_6(x^6)$ — произвольные функции, $\theta \neq 0$ когда $\epsilon = 0,\ i_1, j_1 = 1, 2,\ i_2, j_2 = 3, 4, 5,\ e_2, e_4, e_5, e_6 = \pm 1$.

После похожих выкладок для h-пространства типа [2(211)] , получим

$$\begin{gathered} g_{ij}dx^i dx^j = 2e_2Adx^1dx^2+ \\ +(f_2-\lambda)^2\{2e_4dx^3dx^4 - e_4(\Sigma+\omega)(dx^4)^2 + g_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau\}, \end{gathered} \tag{34}$$

$$a_{ij}dx^i dx^j = 2f_2g_{12}dx^1dx^2 + g_{12}(dx^2)^2 + \lambda g_{pq}dx^p dx^q + g_{34}(dx^4)^2, \tag{35}$$

$$h_{ij} = a_{ij} + (2f_2 + c)g_{ij}, \quad \varphi = f_2 + c, \tag{36}$$

$$A = \epsilon x^1 + \theta(x^2), \quad \Sigma = 2(f_2-\lambda)^{-1}, \tag{37}$$

где $\epsilon = 0, 1,\ f_2 = \epsilon x^2,\ \lambda, c$ — постоянные, $\theta(x^2), \omega(x^4, x^5, x^6), g_{\sigma\tau}(x^4, x^5, x^6)$ — произвольные функции, $\theta \neq 0$ когда $\epsilon = 0,\ p, q = 3, 4, 5, 6,\ \sigma, \tau = 5, 6,\ e_2, e_4 = \pm 1$.

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Если симметрический тензор h_{ij} типов* [2(21)1], [2(211)] *и функция φ удовлетворяют в $V^6(g_{ij})$ уравнениям Эйзенхарта, то существует голономная система координат, в которой функция φ и тензоры g_{ij}, h_{ij} определяются формулами* (30)–(37).

4. Метрики h-пространств типов [(22)11], [(221)1]

Для h-пространства типа [(22)11] из (7) следует система уравнений

$$\begin{gathered} X_r\lambda_4 = 0, \quad X_r\lambda_\sigma = 0\ (r \neq \sigma), \quad X_\sigma(\lambda_\sigma - \varphi) = 0, \\ \gamma_{14r} = \gamma_{23r}, \quad \gamma_{1\sigma2} = \gamma_{2\sigma1} = \frac{e_2X_\sigma\varphi}{\lambda_4 - \lambda_\sigma}, \quad \gamma_{3\sigma4} = \gamma_{4\sigma3} = \frac{e_4X_\sigma\varphi}{\lambda_4-\lambda_\sigma}, \\ \gamma_{s\sigma s} = -\frac{e_sX_\sigma\varphi}{(\lambda_4-\lambda_\sigma)^2}, \quad \gamma_{\sigma\tau\sigma} = \frac{e_\sigma X_\tau\varphi}{\lambda_\sigma - \lambda_\tau}\ (\sigma \neq \tau), \end{gathered} \tag{38}$$

где $r = 1, 2, ..., 6,\ \sigma, \tau = 5, 6,\ s = 2, 4,\ \gamma_{24r}$ — произвольные, остальные γ_{pqr} равны нулю.

Составим коммутаторы операторов:

$$\begin{gathered}
[X_1,X_2]=e_4\gamma_{412}X_3-e_4\gamma_{421}X_3-e_3\gamma_{411}X_4,\\
[X_1,X_3]=e_4\gamma_{413}X_3-e_2\gamma_{141}X_1,\\
[X_2,X_3]=-e_2\gamma_{142}X_1+e_3\gamma_{413}X_4+e_4\gamma_{423}X_3,\\
[X_1,X_4]=-e_1\gamma_{141}X_2+e_4\gamma_{414}X_3-e_2\gamma_{241}X_1,\\
[X_1,X_\sigma]=e_4\gamma_{41\sigma}X_3-e_2\gamma_{2\sigma1}X_1,\\
[X_2,X_4]=-e_1\gamma_{142}X_2+e_4\gamma_{424}X_3+e_3\gamma_{414}X_4-e_2\gamma_{242}X_1,\\
[X_2,X_\sigma]=e_3\gamma_{41\sigma}X_4+e_4\gamma_{42\sigma}X_3-e_2\gamma_{2\sigma2}X_1-e_1\gamma_{1\sigma2}X_2,\\
[X_3,X_4]=-e_1\gamma_{143}X_2-e_2\gamma_{243}X_1+e_2\gamma_{144}X_1,\\
[X_3,X_\sigma]=e_2\gamma_{23\sigma}X_1-e_1\gamma_{4\sigma3}X_3,\\
[X_4,X_\sigma]=e_1\gamma_{14\sigma}X_2-e_3\gamma_{3\sigma4}X_4+e_2\gamma_{24\sigma}X_1-e_4\gamma_{4\sigma4}X_3,\\
[X_5,X_6]=-e_5\gamma_{565}X_5+e_6\gamma_{656}X_6.
\end{gathered}\tag{39}$$

Составив вполне интегрируемые системы из (39), после координатных преобразований, найдем

$$\underset{\sigma}{\xi}^{i}=P_\sigma(x)\delta_\sigma{}^{i},\underset{p}{\xi}^{q}=\underset{\alpha}{\xi}^{\sigma}=0,\tag{40}$$

где $\alpha=1,2,3,4$, $p=1,3$, $q=2,4$, $\sigma,\tau=5,6,$, $P_\sigma(x)$ — произвольные функции.

Из (38), (39), (40) получим систему уравнений на компоненты $\underset{i}{\xi}^{j}$ косонормального репера:

1° $\underset{1}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{2}{\xi}^{\beta}-\underset{2}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{1}{\xi}^{\beta}=\gamma_{412}\underset{3}{\xi}^{\beta}-\gamma_{421}\underset{3}{\xi}^{\beta}-\gamma_{411}\underset{4}{\xi}^{\beta},$
2° $\underset{1}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{3}{\xi}^{\beta}-\underset{3}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{1}{\xi}^{\beta}=\gamma_{413}\underset{3}{\xi}^{\beta}-\gamma_{141}\underset{1}{\xi}^{\beta},$
3° $\underset{1}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{4}{\xi}^{\beta}-\underset{4}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{1}{\xi}^{\beta}=-\gamma_{141}\underset{2}{\xi}^{\beta}-\gamma_{414}\underset{3}{\xi}^{\beta}-\gamma_{241}\underset{1}{\xi}^{\beta},$
4° $\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\partial_\sigma\underset{1}{\xi}^{\beta}=\frac{1}{2}\frac{f'_\sigma}{\lambda-f_\sigma}\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\underset{1}{\xi}^{\beta}-\gamma_{41\sigma}\underset{3}{\xi}^{\beta},$
5° $\underset{2}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{3}{\xi}^{p}-\underset{3}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{2}{\xi}^{p}=-\gamma_{142}\underset{1}{\xi}^{\beta}+\gamma_{413}\underset{4}{\xi}^{p}+\gamma_{423}\underset{3}{\xi}^{p},$
6° $\underset{3}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{2}{\xi}^{q}=-\gamma_{413}\underset{4}{\xi}^{q},$
7° $\underset{2}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{4}{\xi}^{\beta}-\underset{4}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{2}{\xi}^{\beta}=-\gamma_{142}\underset{2}{\xi}^{\beta}+\gamma_{414}\underset{4}{\xi}^{\beta}-\gamma_{242}\underset{1}{\xi}^{\beta}+\gamma_{424}\underset{3}{\xi}^{\beta},$
8° $\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\partial_\sigma\underset{2}{\xi}^{\beta}=\frac{1}{2}\frac{f'_\sigma}{\lambda-f_\sigma}\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\underset{2}{\xi}^{\beta}-\frac{1}{2}\frac{f'_\sigma}{(\lambda-f_\sigma)^2}\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\underset{1}{\xi}^{\beta}-\gamma_{41\sigma}\underset{4}{\xi}^{\beta}-\gamma_{42\sigma}\underset{3}{\xi}^{\beta},$
9° $\underset{3}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{4}{\xi}^{\beta}-\underset{4}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{3}{\xi}^{\beta}=-\gamma_{143}\underset{2}{\xi}^{\beta}+\gamma_{144}\underset{1}{\xi}^{\beta}-\gamma_{243}\underset{1}{\xi}^{\beta},$
10° $\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\partial_\sigma\underset{3}{\xi}^{\beta}=\frac{1}{2}\frac{f'_\sigma}{\lambda-f_\sigma}\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\underset{3}{\xi}^{\beta}-\gamma_{14\sigma}\underset{1}{\xi}^{\beta},$
11° $\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\partial_\sigma\underset{4}{\xi}^{\beta}=\frac{1}{2}\frac{f'_\sigma}{\lambda-f_\sigma}\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\underset{4}{\xi}^{\beta}-\frac{1}{2}\frac{f'_\sigma}{(\lambda-f_\sigma)^2}\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\underset{3}{\xi}^{\beta}-\gamma_{14\sigma}\underset{2}{\xi}^{\beta}-\gamma_{24\sigma}\underset{1}{\xi}^{\beta},$
12° $\underset{\beta}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}=0,$
13° $\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\partial_\sigma\underset{\tau}{\xi}^{\tau}=\frac{1}{2}\frac{f'_\sigma}{f_\tau-f_\sigma}\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\underset{\tau}{\xi}^{\tau},\quad(\tau\neq\sigma),$

где $\alpha,\beta=1,2,3,4$, $p=1,3$, $q=2,4$, $\sigma,\tau=5,6$, $f_\tau=f_\tau(x_\tau),f_\sigma=f_\sigma(x_\sigma)$ — произвольные функции указанных переменных.

Интегрируя 12° и 13°, после координатного преобразования x^5,x^6 найдем

$$\underset{5}{\xi}^{5}=(f_6-f_5)^{-1/2},\quad \underset{6}{\xi}^{6}=(f_5-f_6)^{-1/2}.$$

Дифференцируя $g^{\alpha\beta} = \sum_{h=1}^{6} e_h \underset{h}{\xi^\alpha} \underset{\tilde h}{\xi^\beta}$ по x^p $(p = 1, 3)$, с учетом уравнений $1^\circ - 3^\circ$ и $5^\circ - 7^\circ$, найдем $\partial_p g^{\alpha\beta} = 0$.

Дифференцируя $g^{\alpha\beta}$ по x^σ $(\sigma = 5, 6)$, из уравнений 4°, 8°, 10°, 11°, получим

$$\partial_\sigma g^{pr} = -\frac{f'_\sigma}{f_\sigma - \lambda} g^{pr} - \frac{f'_\sigma}{(f_\sigma - \lambda)^2} \Pi_\sigma (f_\sigma - \lambda)^{-1}, \quad \partial_\sigma g^{pq} = -\frac{f'_\sigma}{f_\sigma - \lambda} g^{pq},$$

где $p, r = 1, 3$, $q = 2, 4$.

Проинтегрировав эти уравнения, найдем

$$g^{pr} = \Pi_\sigma (f_\sigma - \lambda)^{-1} (\Sigma + F^{pr}), \quad g^{pq} = \Pi_\sigma (f_\sigma - \lambda)^{-1} F^{pq},$$

где F^{pr}, F^{pq} — произвольные функции переменных x^2, x^4, $\Sigma = \sum_\sigma (f_\sigma - \lambda)^{-1}$, $\sum_\sigma$ — означает суммирование по σ, Π_σ — означает произведение по σ.

Выполнив подобные вычисления для h-пространства типа $[(221)1]$, после удачно подобранных координатных преобразований, в итоге получим

$$g_{ij} dx^i dx^j = \Pi_\sigma (f_\sigma - \lambda)\{2g_{12} dx^1 dx^2 - e_2(\Sigma + \theta_1)(dx^2)^2 + \\ + 2g_{34} dx^3 dx^4 - e_4(\Sigma + \theta_2)(dx^4)^2 + G\} + \sum_\sigma e_\sigma (f_\tau - f_\sigma)(dx^\sigma)^2, \tag{41}$$

$$a_{ij} dx^i dx^j = \lambda(g_{st} dx^s dx^t + G) + \\ g_{12}(dx^2)^2 + g_{34}(dx^4)^2 + \sum_\sigma f_\sigma g_{\sigma\sigma} (dx^\sigma)^2 + G, \tag{42}$$

$$h_{ij} = a_{ij} + (\sum_\sigma f_\sigma + c) g_{ij}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \sum_\sigma f_\sigma + c. \tag{43}$$

$$\Sigma = \sum_\sigma (f_\sigma - \lambda)^{-1}, \tag{44}$$

$$G = 2e_5\{1 + \theta_3(f_6 - \lambda)\} dx^4 dx^5 + (f_6 - \lambda) g_{55} (dx^5)^2 + e_6 (dx^6)^2, \tag{45}$$

где λ, c — постоянные. Здесь для h-пространства типа $[(22)11]$ $\tau, \sigma = 5, 6$ $(\tau \neq \sigma)$, $s, t = 1, 2, 3, 4$, $G = 0$, $g_{st}, \theta_1, \theta_2$ — произвольные функции переменных x^2, x^4, f_σ — произвольная функция переменного x^σ. Для h-пространства типа $[(221)1]$ $\sigma = 6$, $s, t = 1, 2, 3, 4, 5$, $g_{st}, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ — произвольные функции переменных x^2, x^4, x^5, $f_\tau = \lambda$, f_6 — произвольная функция переменного x^6.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если симметрический тензор h_{ij} типов* $[(22)11]$, $[(221)1]$ *и функция φ удовлетворяют в $V^6(g_{ij})$ уравнению Эйзенхарта, то существует голономная система координат, в которой функция φ и тензоры g_{ij}, h_{ij} определяются формулами* (41)–(45).

5. Метрики h-пространств типов $[(2211)]$, $[(22)(11)]$, $[(21)(21)]$

Во всех этих случаях функция $\varphi = const$, следовательно, в силу равенства (6) тензор h_{ij} является ковариантно постоянным. Опуская дальнейшие выкладки, сводящиеся к интегрированию уравнений относительно $\underset{i}{\xi^j}$ вместе с удачно подобранными координатными преобразованиями, получим
для h-пространства типа $[(2211)]$:

$$g_{ij} dx^i dx^j = 2g_{12} dx^1 dx^2 - e_2 \theta (dx^2)^2 + 2g_{34} dx^3 dx^4 + g_{rq} dx^r dx^q, \tag{46}$$

$$a_{ij} dx^i dx^j = \lambda g_{ij} dx^i dx^j + g_{12}(dx^2)^2, \tag{47}$$

$$h_{ij} = a_{ij} + c g_{ij}, \tag{48}$$

где $r, q = 5, 6$, λ, c — постоянные, $\theta, g_{12}, g_{34}, g_{rq}$ — произвольные функции переменных x^2, x^4, x^5, x^6;

для h-пространства типа $[(22)(11)]$:

$$g_{ij}dx^idx^j = e_2\{2dx^1dx^2 - \theta(dx^2)^2\} + e_4\{2dx^3dx^4 - \omega(dx^4)^2\} + g_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau, \tag{49}$$

$$\begin{gathered} a_{ij}dx^idx^j = \lambda_1\{g_{i_1j_1}dx^{i_1}dx^{j_1}+ \\ +e_2(dx^2)^2 + g_{i_2j_2}dx^{i_2}dx^{j_2} + e_4(dx^4)^2\} + \lambda_2 g_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau, \end{gathered} \tag{50}$$

$$h_{ij} = a_{ij} + cg_{ij}, \tag{51}$$

где θ, ω — произвольные функции переменных x^2, x^4, $g_{\sigma\tau}$ — произвольные функции переменных x^5, x^6, λ_1, λ_2, c — постоянные, здесь $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $i_1, j_1 = 1, 2$, $i_2, j_2 = 3, 4$, $\sigma, \tau = 5, 6$;
для h-пространства типа $[(21)(21)]$:

$$\begin{gathered} g_{ij}dx^idx^j = e_2\{2dx^1dx^2 - \theta(dx^2)^2\}+ \\ +e_3(dx^3)^2 + e_5\{2dx^4dx^5 - \omega(dx^5)^2\} + e_6(dx^6)^2, \end{gathered} \tag{52}$$

$$a_{ij}dx^idx^j = \lambda_1 g_{i_1j_1}dx^{i_1}dx^{j_1} + e_2(dx^2)^2 + \lambda_2 g_{i_2j_2}dx^{i_2}dx^{j_2} + e_5(dx^5)^2, \tag{53}$$

$$h_{ij} = a_{ij} + cg_{ij}, \tag{54}$$

где θ — произвольная функция переменных x^2, x^3, ω — произвольная функция переменных x^5, x^6, λ_1, λ_2, c — постоянные, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $i_1, j_1 = 1, 2, 3$, $i_2, j_2 = 4, 5, 6$.

Резюмируем результат этого параграфа в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Если тензор h_{ij} типов $[(2211)]$, $[(22)(11)]$, $[(21)(21)]$ и функция φ удовлетворяют в $V^6(g_{ij})$ уравнению Эйзенхарта, то существует голономная система координат, в которой функция φ и тензоры g_{ij}, h_{ij} определяются формулами* (46)–(54).

6. Первые квадратичные интегралы уравнений геодезических h-пространств типов $[(21\dots1)(21\dots1)\dots(1\dots1)]$

Каждому решению h_{ij} уравнения (6) соответствует первый квадратичный интеграл уравнений геодезических (см. [8])

$$(h_{ij} - 4\varphi g_{ij})\dot{x}^i\dot{x}^j = \text{const}, \tag{55}$$

где $\dot{x}^i$ — касательный вектор геодезической.

Следовательно, первые квадратичные интегралы уравнений геодезических h-пространств типов $[(21\dots1)(21\dots1)\dots(1\dots1)]$ определяются формулой (55), где тензоры h_{ij}, g_{ij} и функция φ указаны в теоремах 1-4.

7. Заключение

В данной работе мы нашли небольшой класс 6-мерных псевдоримановых пространств с сигнатурой $[++----]$, допускающих негомотетические инфинитезимальные проективные преобразования, в частности, мы нашли метрики h-пространств типов $[22(11)]$, $[2(21)1]$,$[2(211)]$, $[(22)11]$, $[(221)1]$, $[(2211)]$, $[(22)(11)]$, $[(21)(21)]$ и затем определили первые квадратичные интегралы уравнений геодезических этих h-пространств. Отметим, что полученные результаты легко обобщаются в случае n-мерного псевдориманова пространства с сигнатурой $[++----...--]$.

Определение метрик всех h-пространств, перечисленных во введение, полностью решит задачу о нахождение 6-мерных псевдоримановых пространств с сигнатурой $[++----]$, допускающих негомотетические инфинитезимальные проективные преобразования или проективные движения. Эта задача была полностью решена автором в кандидатской диссертации [9].

Следующая задача — это исследование проективно-групповых свойств рассматриваемых пространств. Здесь остается открытой проблема о восстановлении векторного поля, определяющего инфинитезимальное проективное преобразование и проблема о структуре проективной алгебры Ли. Решение этой задачи сводится к интегрированию уравнения Киллинга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия* // М.: Эдиториал УРСС,1998, 278 с.

[2] Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия* М.:ИЛ, 1948, 316 с.

[3] M.G. Konigs *Lecons sur la theorie generalle des surfaces* // Appl. II to G. Darboux. IV. (1896), P. 368.

[4] Петров А.З. *О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики* // Уч. зап. Казан. ун-та. 1949. Т. 109, № 3. С. 7–36.

[5] Аминова А.В. *Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими* // Успехи Мат.Наук **48** (1993), 2(290), С. 107–164.

[6] G. Fubini *Sui gruppi transformazioni geodetiche* // Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. 1903, Vol. 53, № 2, P. 261–313.

[7] Солодовников А.С. *Проективные преобразования римановых пространств* // Успехи Мат.Наук, 1956, № 11, P. 45–116.

[8] Аминова А.В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий* // Успехи Мат.Наук **50** (1995), 1(301). С. 69–142.

[9] Закирова З.Х. *Проективно-групповые свойства 6-мерных теорий типа Калуцы-Клейна* // Кандидатская диссертация, КГУ, 2001, с. 129.

[10] Широков П.А. *Постоянные поля векторов и тензоров 2-го порядка в римановых пространствах* // Изв. Казанск. физ.-мат. общ., 1925 (25), № 2. С. 86–114.

[11] Закирова З.Х. *6-мерные h-пространства специального типа* //Междунар. геом. семин. им. Н.И. Лобачевского, Казань, 4-6 февр., 1997: Тез. докл.- Казань. 1997. с.52.

[12] Закирова З.Х. *Первые интегралы уравнений геодезических h-пространств типа [51]* // Труды геом. семинара: Межвуз. темат. сб. науч. тр. Казань, 23. 1997. С. 57–64.

[13] Закирова З.Х. *Первые интегралы уравнений геодезических h-пространств типа [411]* // Изв. вузов. Матем. 1999, № 9(448). С. 78–79.

[14] Закирова З.Х. *Жесткие 6-мерные h-пространства постоянной кривизны* // Теоретическая и математическая физика. 158(3): 293-–299 (2009).

[15] Закирова З.Х. *Метрики 6-мерных h-пространств типов [3(21)], [(32)1], [(321)]* // Краткие сообщения по физике ФИАН. Т. 38, № 9 . 2011. С. 270–274.

[16] Аминова А.В. *О косоортогональных реперах и некоторых свойствах параллельных тензорных полей на римановых многообразиях* // Изв. вузов. Матем. 1982, № 6. С. 63-–67.

[17] Аминова А.В. *О подвижном косоортогональном репере и одном типе проективных движений римановых многообразий* // Изв. вузов. Матем. 1982, № 9. С. 69-–74.

Зольфира Хаписовна Закирова,
Казанский Государственный Энергетический Университет,
ул. Красносельская, 51,
420066, г. Казань, Россия
E-mail: `zolya_zakirova@mail.ru`