

УДК 539.3

© 2014 г. Р. Ш. Гимадиев, Т. З. Гимадиева, В. Н. Паймушин

О ДИНАМИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ РАЗДУВАНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ ЭЛАСТОМЕРОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИЗБЫТОЧНОГО ДАВЛЕНИЯ

Для тонких оболочек, выполненных из резиноподобных эластомеров и находящихся под действием изменяющегося во времени гидростатического избыточного давления, в безмоментном приближении сформулирована задача о динамическом процессе их деформирования. Для случая произвольных перемещений и деформаций составлена система нелинейных уравнений движения, в которых в качестве искомого неизвестных функций приняты истинная деформация поперечного обжатия оболочки, соответствующая использованию предложенной ранее модифицированной модели Кирхгофа–Лява, и координаты точек деформированной срединной поверхности относительно неподвижной декартовой системы координат. Физические соотношения, связывающие компоненты истинных внутренних усилий с кратностями удлинений и мерой сдвиговой деформации, построены на основе соотношений, предложенных ранее К.Ф. Черныхом. Разработан конечно-разностный метод решения сформулированной начально-краевой задачи, на основе которого при различных скоростях нарастания давления исследован динамический процесс раздувания оболочек вращения с произвольной формой образующей, установлены неустойчивые этапы их деформирования с определением соответствующего предельного (критического) значения давления, после достижения которого дальнейший рост деформаций происходит при уменьшающихся значениях внутреннего давления.

Изделия, представляющие собой тонкостенные оболочки из высокоэластичных материалов (синтетический эластомер, латексная пленка, натуральная резина) и подвергающиеся в процессе эксплуатации значительным деформациям (относительное удлинение до 1000%), находят широкое и разнообразное применение: катетеры, применяемые в медицине, подушки безопасности автомобилей, воздушные шары и др. Расчеты на прочность таких элементов конструкций, как правило, должны базироваться на использовании соотношений нелинейной механики деформируемых твердых тел и тонких оболочек при конечных перемещениях и деформациях. Построению таких соотношений в тех или иных вариантах посвящена обширная литература [1–12]. Примеры их применения к решению некоторых задач механики эластомеров приведены, в частности, в монографии [3]. Построенные в ней физические соотношения, связывающие компоненты истинных напряжений с компонентами истинных деформаций в виде кратностей удлинений, были использованы [11] для постановки и решения задачи о раздувании и статической неустойчивости закрытой по торцам цилиндрической оболочки, изготовленной из резины и находящейся под действием статического внутреннего давления. Характерная особенность этой задачи – разделение процесса нагружения оболочки на два этапа: на первом этапе увеличение диаметра и длины оболочки происходит только при нарастающем давлении; на втором этапе дальнейшее увеличение указанных размеров оболочки и уменьшение ее толщины происходит путем накачивания в оболочку воздуха при уменьшающемся давлении. Механическое объяснение этого процесса заключается в наступлении статической неустойчивости оболочки из резины в условиях двухосного несимметричного растяжения, аналогичное процессу образования шейки в цилиндрических образцах из упругопластичных материалов в условиях их растяжения [10] в осевом направлении при статическом нагружении.

Цель данной работы – исследование описанного выше процесса нагружения внутренним давлением тонких оболочек из эластомеров в рамках динамической постановки задачи, обобщающей результаты проведенных ранее [4, 7, 10, 11] исследований. При ее формулировке принципиальное значение, как это следует исходя из анализа полученных ранее [11] результатов, имеет учет деформации обжатия оболочки в поперечном направлении, конечности компонентов истинных деформаций, введение в рассмотрение истинных напряжений по В.В. Новожилову [1] и использование определяющих соотношений [3], связывающих между собой истинные напряжения и истинные деформации.

1. Уравнения движения безмоментной оболочки. Предположим, что в момент времени $t = t_0$ пространство V_0 недеформированной оболочки отнесено к системе криволинейных координат α^1, α^2, z , которая нормально связана со срединной поверхностью σ_0 , имеющей основные базисные векторы $\mathbf{r}_i^0 = \partial \mathbf{r}^0 / \partial \alpha^i$ и компоненты основного метрического тензора $G_{ij}^0 = \mathbf{r}_i^0 \mathbf{r}_j^0$. В принятой системе координат радиус-вектор произвольной точки $M_0 \in V_0$ определяется равенством (здесь и в дальнейшем латинские индексы пробегает значения 1, 2, а греческие – 1, 2, 3)

$$\mathbf{R}^0(\alpha^i, z) = \mathbf{r}^0(\alpha^i) + z\mathbf{e}_3^0, \quad -h/2 \leq z \leq h/2 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}^0(\alpha^i)$ – радиус-вектор точки на поверхности σ_0 , h – начальная толщина оболочки, \mathbf{e}_3^0 – вектор единичной нормали к поверхности σ_0 , составляющий правосторонний триэдр с единичными векторами $\mathbf{e}_i^0 = \mathbf{r}_i^0 / \sqrt{G_{ii}^0}$.

В процессе динамического деформирования оболочки радиус-вектор указанной точки $M_0 \in V_0$, перешедшей к моменту времени t в точку $M(\alpha^i, z) \in V$, по модифицированной модели Кирхгофа–Лява [11] будем определять представлением

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^0 + \mathbf{U} = \mathbf{r} + z(1 + \varphi)\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{U} = \mathbf{u} + z[(1 + \varphi)\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3^0] \tag{1.2}$$

где $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha^0$ – вектор перемещений точек срединной поверхности σ_0 , $\varphi(\alpha^i)$ – введенная в рассмотрение функция поперечной деформации, через которую кратность удлинений λ_3 и истинная деформация ε_3 в поперечном направлении z определяются по формулам [11]

$$\lambda_3 = 1 + \varphi, \quad \varepsilon_3 = \varphi \tag{1.3}$$

а \mathbf{e}_α – единичные векторы на деформированной поверхности σ с радиус-вектором \mathbf{r} , для определения которых имеем формулы

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{r}_i / A_i, \quad A_i = \sqrt{G_{ii}}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \sqrt{G_{11}G_{22}} / \sqrt{G} \tag{1.4}$$

$$G = G_{11}G_{22} - G_{12}^2, \quad G_{ij} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j, \quad \mathbf{r}_i = \partial \mathbf{r} / \partial \alpha^i$$

Отметим, что векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 направлены по касательным к координатным линиям α^i в деформированном состоянии, \mathbf{e}_3 – по нормали к поверхности σ . Разностью компонент метрических тензоров G_{ij} и G_{ij}^0 определяются ковариантные компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_{ij} = (G_{ij} - G_{ij}^0) / 2 \tag{1.5}$$

служащие для вычисления кратностей удлинений λ_1 и λ_2 в направлениях единичных векторов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 и меры сдвиговой деформации $\sin \gamma_{12}$ [9, 11] в соответствии с выраже-

ниями (φ_{12} – угол между базисными векторами \mathbf{r}_1^0 и \mathbf{r}_2^0 в недеформированном состоянии)

$$\lambda_i = 1 + \varepsilon_i = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{(ii)}}, \quad \sin \gamma_{12} = \frac{2\varepsilon_{(12)}}{\lambda_1 \lambda_2 \sin \varphi_{12}}, \quad \varepsilon_{(ij)} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{G_{ii}^0 G_{jj}^0}} \quad (1.6)$$

где ε_i – относительное удлинение, $\varepsilon_{(ij)}$ – безразмерное значение ковариантных компонент тензора деформаций.

Считая оболочку тонкой и безмоментной, в сечениях $\alpha^i = \text{const}$ и $z = \text{const}$ деформированной оболочки, имеющей в момент времени t толщину [11]

$$h_* = h(1 + \varepsilon_3) = h(1 + \varphi) = h\lambda_3$$

введем в рассмотрение векторы истинных напряжений $\boldsymbol{\sigma}^i$ и $\boldsymbol{\sigma}^3$, задав их представлениями

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \sigma^{ij} \mathbf{e}_j, \quad \boldsymbol{\sigma}^3 = \sigma^{33} \mathbf{e}_3 \quad (1.7)$$

в которых величины σ^{ij} и σ^{33} – физические компоненты.

Интегрируя выражения (1.7) по толщине оболочки h_* , получим

$$\mathbf{T}^i = T^{ij} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{T}^3 = T^{33} \mathbf{e}_3 \quad (1.8)$$

где

$$T^{ij} = h\lambda_3 \sigma^{ij}, \quad T^{33} = h\lambda_3 \sigma^{33} \quad (1.9)$$

Предположим, что на выделенный из оболочки бесконечно малый элемент, имеющий толщину h_* , а на поверхности σ – бесконечно малую площадь $d\sigma = \sqrt{G} d\alpha^1 d\alpha^2$, действуют поверхностные силы p^- и p^+ , приложенные в точках лицевых поверхностей $z = -h_*/2$ и $z = h_*/2$, а также массовая сила \mathbf{Q} . Считаем их заданными в виде

$$\mathbf{p} = p \mathbf{e}_3 d\sigma = p \mathbf{e}_3 \sqrt{G} d\alpha^1 d\alpha^2, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{g} h_* \rho dF = \mathbf{g} h_* \rho \sqrt{G} d\alpha^1 d\alpha^2 \quad (1.10)$$

где $p = p^- + p^+$ – избыточное давление, действующее на оболочку и отнесенное к единице площади $d\sigma$, ρ – плотность материала оболочки в деформированном состоянии, которую в дальнейшем будем считать неизменной при рассмотрении оболочек из несжимаемого эластомера, \mathbf{g} – ускорение свободного падения.

В приближении безмоментной теории формирующееся в оболочке внутреннее поперечное усилие T^{33} и проекция главного момента внешних сил на направление нормали \mathbf{e}_3 , в рассматриваемом случае равная

$$M^3 = (p^+ - p^-) h_*$$

в соответствии с ранее полученными результатами [11] должны удовлетворять уравнению равновесия вида

$$T^{33} = -(p^+ - p^-) h_* \quad (1.11)$$

В силу того, что для введенных в рассмотрение истинных напряжений σ^{11} , σ^{12} , σ^{22} , σ^{33} имеют место оценки

$$\sigma^{11} \gg \sigma^{12}, \quad \sigma^{22} \gg \sigma^{12}, \quad \sigma^{11} \gg \sigma^{33}, \quad \sigma^{22} \gg \sigma^{33}, \quad \sigma^{33} \sim (p^- - p^+)$$

равенство (1.11) допустимо заменить равенством $T^{33} \approx 0$, что позволяет считать формирующееся напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочки плосконапряженным. Прикладывая далее к выделенному из оболочки бесконечно малому элементу все указанные выше внутренние и внешние усилия, а также инерционные силы, исходя из принципа Даламбера в векторной форме можно составить уравнение движения следующего вида:

$$\rho h_* \sqrt{G} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha^1} ((T^{11} \mathbf{e}_1 + T^{12} \mathbf{e}_2) \sqrt{G_{22}}) + \frac{\partial}{\partial \alpha^2} ((T^{22} \mathbf{e}_2 + T^{21} \mathbf{e}_1) \sqrt{G_{11}}) + (\mathbf{p} + \rho h_* \mathbf{g}) \sqrt{G} \quad (1.12)$$

в котором, в отличие от ранее полученных уравнений [11], неизвестными являются вектор-функция \mathbf{r} и компоненты истинных внутренних усилий T^{ij} .

В дальнейшем вместо трех неизвестных функций перемещений $u^i(\alpha^1, \alpha^2, t)$ введем в рассмотрение новые неизвестные, принимая для \mathbf{r} представление

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2, t) = \sum_{\gamma=1}^3 x_\gamma \mathbf{i}_\gamma = x_\gamma \mathbf{i}_\gamma, \quad x_\gamma = x_\gamma(\alpha^1, \alpha^2, t) \quad (1.13)$$

где x_γ ($\gamma = 1, 2, 3$) – новые неизвестные, представляющие собой координаты произвольной точки на σ относительно неподвижной ортогональной декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ с ортами \mathbf{i}_γ . Тогда для определения основных базисных векторов \mathbf{r}_i и компонент метрического тензора G_{ij} будем использовать соотношения

$$\mathbf{r}_j = \partial \mathbf{r} / \partial \alpha^j = r_{j,\gamma} \mathbf{i}_\gamma, \quad r_{j,\gamma} = \partial x_\gamma / \partial \alpha^j, \quad G_{jm} = \mathbf{r}_j \mathbf{r}_m = r_{j,k} r_{m,k} \quad (1.14)$$

При этом

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{r}_i / \sqrt{G_{ii}} = l_{i\gamma} \mathbf{i}_\gamma, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \sqrt{G_{11}G_{12}} / \sqrt{G} \quad (1.15)$$

где $l_{\delta\gamma} = \cos(\mathbf{e}_\delta, \mathbf{i}_\gamma)$ – направляющие косинусы, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} l_{j\gamma} &= r_{j,\gamma} / \sqrt{G_{jj}} \\ l_{31} &= (l_{12}l_{23} - l_{13}l_{22}) \sqrt{G_{11}G_{22}} / \sqrt{G} \\ l_{32} &= (l_{13}l_{21} - l_{11}l_{23}) \sqrt{G_{11}G_{22}} / \sqrt{G} \\ l_{33} &= (l_{11}l_{22} - l_{12}l_{21}) \sqrt{G_{11}G_{22}} / \sqrt{G} \end{aligned} \quad (1.16)$$

При составлении скалярных уравнений движения в декартовой системе координат для вектора \mathbf{g} считаем справедливым представление $\mathbf{g} = g\mathbf{i}_3$. Тогда, проектируя уравнение (1.12) на декартовы оси и учитывая соотношения (1.16), получим три уравнения движения

$$\begin{aligned} \rho h_* \sqrt{G} \frac{\partial^2 x_\gamma}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \alpha^1} ((T^{11} l_{1\gamma} + T^{12} l_{2\gamma}) \sqrt{G_{22}}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \alpha^2} ((T^{22} l_{2\gamma} + T^{21} l_{1\gamma}) \sqrt{G_{11}}) + p_3 l_{3\gamma} \sqrt{G} (1 - \delta_{3\gamma} \rho h_* g) \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $\delta_{31} = \delta_{32} = 0, \delta_{33} = 1, \gamma = 1, 2, 3$.

Для замыкания полученной системы уравнений, состоящей из уравнений движения (1.17), геометрических и кинематических соотношений (1.14) и (1.16), формул (1.8)

и равенства $T^{33} \approx 0$, необходимо составить физические соотношения, связывающие между собой напряжения σ^{ij} , σ^{33} с параметрами деформаций в виде кратностей удлинений $\lambda_i = 1 + \varepsilon_i$, $\lambda_3 = 1 + \varepsilon_3 = 1 + \varphi$ и меры сдвиговой деформации $\sin \gamma_{12}$. В силу того, что

$$h_* = h(1 + \varphi), \quad \sqrt{G_{ii}} = A_i = A_i^0(1 + \varepsilon_i) = A_i^0 \lambda_i$$

где $A_i^0 = \sqrt{G_{ii}^0}$, в полученных уравнениях напряжения σ^{1j} , являющиеся истинными, содержат сомножители $\lambda_3 \lambda_2$, а напряжения σ^{2j} – сомножители $\lambda_3 \lambda_1$. Поэтому в свете полученных ранее результатов [9, 11] для рассматриваемого варианта системы уравнений (1.17) физические соотношения должны иметь следующую структуру:

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ij}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \sin \gamma_{12}), \quad \sigma^{33} = \sigma^{33}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \quad (1.18)$$

2. Тонкие оболочки вращения из эластомеров под действием внутреннего давления. Такие оболочки при $h = h(\alpha^1)$ могут находиться только в осесимметричном напряженно-деформированном состоянии, если в последнем уравнении движения системы (1.17) ($\gamma = 3$) не учитывается сила тяжести $\rho h_* g \sqrt{G}$. По механическому поведению они близки к мягким тканевым оболочкам [5–7], детально исследованным к настоящему времени в парашютостроении [9], в строительных пневматических и судовых конструкциях [13, 14], которые в “рабочем” состоянии могут находиться в условиях двухстороннего растяжения. При появлении напряжений σ^{12} , когда $\sigma^{11} > 0$, $\sigma^{22} > 0$, или в условиях, когда $\sigma^{11} > 0$ при $\sigma^{22} \leq 0$ и $\sigma^{22} > 0$ при $\sigma^{11} \leq 0$, в них появляются локальные зоны сморщивания оболочки, и при этом оболочка переходит в режим одноосного нагружения.

В дальнейшем будем считать, что в рассматриваемых оболочках формируется НДС, которое удовлетворяет условиям и оценкам

$$\sigma^{12} \approx 0, \quad \sigma^{11} > 0, \quad \sigma^{22} > 0, \quad \sigma^{11}, \sigma^{22} \gg \sigma^{12} \quad (2.1)$$

В силу условий и оценок (2.1) вместо (1.18) будем использовать физические соотношения

$$\sigma^{ii} = \sigma^{ii}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2), \quad \sigma^{33} = \sigma^{33}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad \dot{\varepsilon}_i = \partial \varepsilon_i / \partial t$$

введя в них слагаемые, связанные с учетом внутреннего трения в материале оболочки для описания быстро протекающих процессов деформирования при значительных скоростях деформации $\dot{\varepsilon}_i$. Для резиноподобных несжимаемых материалов такие соотношения могут быть составлены исходя из результатов К.Ф. Черных [3] и модели Кельвина–Фойгта, которые в силу принятого допущения $\sigma^{33} \approx 0$ представимы в виде

$$\begin{aligned} \sigma^{ii} &\approx \mu[(1 + \beta)\lambda_i - (1 - \beta)\lambda_i^{-1}] + q + \eta \dot{\varepsilon}_i \\ \mu[(1 + \beta)\lambda_3 - (1 - \beta)\lambda_3^{-1}] + q &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

где q – гидростатическое давление, μ и β – характеристики материала, равные для одной из резин (ИРП-2052) $\mu = 8.75$ и $\beta = 1.43$ [3], причем характеристика μ по физическому смыслу соответствует модулю упругости первого рода E , η – параметр, характеризующий внутреннее вязкое трение и имеет смысл комплексного модуля упругости [15]. Следует отметить, что в быстро протекающих динамических процессах учет внутреннего трения в соотношениях (2.2) позволяет гасить скорости волн напряжений в на-

правлениях α^1 и α^2 и обеспечивает устойчивость численных алгоритмов решения рассматриваемых ниже задач.

После исключения из соотношений (2.2) неизвестной функции q в соответствии с известными результатами [3, 9] и формулами (1.9) устанавливаются физические зависимости следующего вида:

$$T^{ii} = h_* \{ \mu [(1 + \beta) (\lambda_i - \lambda_i^{-1} \lambda_2^{-1}) + (1 - \beta) (\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_i^{-1})] + \eta \dot{\epsilon}_i \} \quad (2.3)$$

При $\mathbf{r}_1^0 \mathbf{r}_2^0 = 0$ (ортогональные криволинейные координаты) и учете напряжений σ^{12} соотношения (2.3) могут быть дополнены соотношением

$$T^{12} = T^{21} = h_* \left(K_{12} \frac{G_{12}}{\lambda_1 \lambda_2} + \eta_\gamma \dot{G}_{12} \right) \quad (2.4)$$

в котором η_γ – параметр внутреннего вязкого трения при сдвиговых деформациях, G_{12} вычисляется по формуле (1.14), а $K_{12} = K_{12}(G_{12})$ представляет собой касательный модуль сдвига материала оболочки, и его зависимость от меры сдвиговой деформации G_{12} (или [3, 11] $\sin \gamma_{12}$) может быть установлена только экспериментально.

При решении конкретных задач о раздувании оболочки вращения при ее надувании избыточное давление p , действующее в точках лицевой поверхности $z = -h_*/2$, аппроксимируем зависимостью

$$p(t) = \tilde{p}(t) (1 - v^n V^n)^2 \operatorname{sgn}(1 - v^n V^n) \quad (2.5)$$

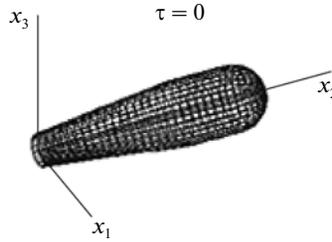
широко используемой в теории мягких оболочек при исследовании динамики парашютов [7]. В этой зависимости закон распределения избыточного давления $\tilde{p}(t)$ по пространственным координатам α^1, α^2 считается равномерным и заданным. В нее внесены также слагаемые, учитывающие изменение давления от колебаний самой оболочки: при движении элемента оболочки против внутреннего давления действующий на этот элемент перепад давления увеличивается, а в противоположном направлении – уменьшается, т.е. происходит демпфирование раздува колебанием самой оболочки. С целью учета такого динамического процесса в зависимость (2.5) введено слагаемое $v^n V^n$, в котором v^n – коэффициент аэродинамического демпфирования среды при движении в ней оболочки со скоростью $V^n = \partial u_3 / \partial t$ в направлении нормали \mathbf{e}_3 к поверхности σ . Компонента u_3 вектора перемещений вычисляется по формуле $u_3 = \mathbf{u} \mathbf{e}_3$.

В дальнейшем будем считать, что при $t = t_0$ начальная форма оболочки σ_0 описывается уравнением

$$\mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2, t_0) = \mathbf{r}_0(\alpha^1, \alpha^2)$$

в котором α^1 – криволинейная координата вдоль образующей оболочки, изменяющаяся в пределах $l_0 \leq \alpha^1 \leq l_1$, а окружная координата α^2 – полярный угол, изменяющийся в пределах $0 \leq \alpha^2 \leq 2\pi$. Элементы оболочки в начальный момент времени считаем неподвижными:

$$\left. \frac{d\mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2, t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \mathbf{V}_0(\alpha^1, \alpha^2) = 0$$



Фиг. 1

Для составленных уравнений движения считаем заданными граничные условия, представляя при $\alpha^1 = l_0$ и $t \geq t_0$ уравнение поверхности σ в виде

$$\mathbf{r}(l_0, \alpha^2, t) = \mathbf{r}_0(\alpha^1 = l_0, \alpha^2)$$

Входное отверстие оболочки (фиг. 1) считается фиксированным, остальные части оболочки перемещаются в пространстве.

3. Разностная схема решения задачи. Рассмотрим элемент (i, j) разностной сетки, покрывающей деформированную поверхность. Предполагаем, что его масса сосредоточена в узле (i, j) .

В каждый момент времени кратности удлинений в направлениях α^1 и α^2 будем вычислять по формулам

$$\lambda_1^{i+1/2, j} = h_1^{-1} \left(\sum_{j=1}^3 (x_{i+1, j}^\gamma - x_{i, j}^\gamma)^2 \right)^{1/2}$$

$$\lambda_2^{i, j+1/2} = h_2^{-1} \left(\sum_{j=1}^3 (x_{i, j+1}^\gamma - x_{i, j}^\gamma)^2 \right)^{1/2}$$
(3.1)

$$\lambda_1^{i+1/2, j+1/2} = (\lambda_1^{i+1/2, j+1} + \lambda_1^{i+1/2, j})/2$$

$$\lambda_2^{i+1/2, j+1/2} = (\lambda_2^{i+1, j+1/2} + \lambda_2^{i, j+1/2})/2$$

где $h_1 = h_1(i, j)$ ($h_2 = h_2(i, j)$) – расстояние между точками сетки $(i + 1/2, j)$ ($(i, j + 1/2)$) и (i, j) .

Для вычисления направляющих косинусов основных базисных векторов используются соотношения

$$\{l_{1, \gamma}\}_j^i = \frac{x_{i+1, j}^\gamma - x_{i, j}^\gamma}{h_1 \lambda_1^{i+1/2, j}}, \quad \{l_{2, \gamma}\}_i^j = \frac{x_{i, j+1}^\gamma - x_{i, j}^\gamma}{h_2 \lambda_2^{i, j+1/2}}$$
(3.2)

Уравнениям движения (1.17), допускающим относительно компонент вектора скорости представление в некотором обобщенном виде (A и B – некоторые постоянные)

$$\partial V / \partial t - A \partial T / \partial s = B$$
(3.3)

ставятся в соответствие их разностные аналоги. Например, при $2 \leq i \leq n_1 - 1, 2 \leq j \leq n_2 - 1$

$$\begin{aligned} \{V^\gamma\}_{i,j}^{n+1/2} = & \{V^\gamma\}_{i,j}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho h_*} \left(\sum_{\pm} [\{T^{11}\lambda_2\}_{j\pm 1/2}^{i+1/2} \{l_\gamma\}_{j\pm 1/2}^i - \{T^{11}\lambda_2\}_{j\pm 1/2}^{i-1/2} \{l_\gamma\}_{j\pm 1/2}^i + \right. \\ & + \{T^{12}\lambda_2\}_{i+1/2}^{j\pm 1/2} \{l_{2\gamma}\}_{i+1/2}^{j\pm 1/2} - \{T^{12}\lambda_2\}_{i-1/2}^{j\pm 1/2} \{l_{2\gamma}\}_{i-1/2}^{j\pm 1/2}] / (2h_1) + \\ & + \sum_{\pm} [\{T^{22}\lambda_1\}_{i\pm 1/2}^{j+1/2} \{l_{2\gamma}\}_{i\pm 1/2}^{j+1/2} - \{T^{22}\lambda_1\}_{i\pm 1/2}^{j-1/2} \{l_{2\gamma}\}_{i\pm 1/2}^{j-1/2} + \\ & \left. + \{T^{21}\lambda_1\}_{j+1/2}^{i\pm 1/2} \{l_\gamma\}_{j+1/2}^{i\pm 1/2} - \{T^{21}\lambda_1\}_{j-1/2}^{i\pm 1/2} \{l_\gamma\}_{j-1/2}^{i\pm 1/2}] / (2h_2) + \rho h_* (1 - \delta_{3\gamma}) \right) + P_{i,j} \frac{\Delta t}{h_1 h_2} F_{i,j}^\gamma \quad (3.4) \end{aligned}$$

Здесь, к примеру, $\{l_\gamma\}_{j-1/2}^i = [x_{i+1,j-1/2}^\gamma - x_{i,j-1/2}^\gamma] / [h_1 \lambda_{i+1/2,j-1/2}^1]$, а $F_{i,j}^\gamma$ – сумма проекций площадей восьми треугольников, примыкающих к узлу (i, j) , на плоскость $x^\gamma = 0$ ($\gamma = 1, 2, 3$). Так, для первого треугольника имеем

$$\begin{aligned} F_{i,j}^1 = & [x_{i,j}^2 (x_{i+1/2,j}^3 - x_{i+1/2,j+1/2}^3) + x_{i+1/2,j}^2 (x_{i+1/2,j+1/2}^3 - x_{i,j}^3) + \\ & + x_{i+1/2,j+1/2}^2 (x_{i,j}^3 - x_{i+1/2,j}^3)] / 2 \quad (3.5) \end{aligned}$$

Проекции площади на другие плоскости $x^2 = 0$ и $x^3 = 0$ определяются аналогично. При этом индексы 1, 2, 3 меняются циклической перестановкой.

Шаг интегрирования выбирается в соответствии с критерием Куранта–Фридрихса–Леви

$$\Delta t < \alpha_k \min(h_1, h_2) / c \quad (3.6)$$

где α_k – коэффициент Куранта, c – скорость распространения малых возмущений в материале (скорость звука).

Оценка погрешности аппроксимации производных. Рассмотрим в уравнении (3.3) производную $\partial T / \partial s$ относительно полуцелой сетки

$$s_{i+1/2} = (i + 1/2)h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M - 1$$

при фиксированном времени t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Для нее, раскладывая значения функции T в полуцелых точках в ряд Тейлора, в окрестности целой точки можно записать [16]

$$\frac{T(s_{i+1/2}, t_n) - T(s_{i-1/2}, t_n)}{h} = \frac{\partial T}{\partial s}(s_i, t_n) + \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3 T}{\partial s^3}(s_i, t_n) + O(h^4)$$

Отсюда следует, что центральная разность по лагранжевой координате на полуцелой сетке аппроксимирует производную $\partial T / \partial s$ со вторым порядком точности.

Аналогичным образом вычисляются и производные $\partial V / \partial t$, причем значения Δt и Δs связаны линейным соотношением (3.6), $\Delta t = c_1 h$, где $c_1 = \alpha_k / c$. Следовательно, центральные разности относительно полуцелой сетки аппроксимируют частные производные $\partial T / \partial s, \partial V / \partial t$ в уравнении (3.3) со вторым порядком точности.

Граничные условия для оболочки будем удовлетворять на расширенной сетке, размеры которой определяются числами $1, n_1$ и $1, n_2$. Индексы i и j будут меняться при этом в пределах $1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2$. Искомые координаты узловых точек оболочки на временных слоях определяются по формулам

$$\{x_{i,j}^\gamma\}^{n+1} = \{x_{i,j}^\gamma\}^n + \Delta t \{V^\gamma\}_{i,j}^{n+1/2}, \quad \gamma = 1, 2, 3 \quad (3.7)$$

Таким образом, в основе построения численного решения сформулированной задачи используется явная схема метода конечных разностей. В результате при построении решения составленной системы уравнений вводится в рассмотрение дискретная область

$$S_{n_i} = n_i h_i, \quad n_i = 1, 2, 3, \dots, \quad S_i / \Delta s_i; \quad t_n = n \Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad t / \Delta t - 1$$

При этом значения искомых функций на каждом шаге интегрирования определяем через уже известные их значения на предыдущем шаге в рамках единого алгоритма сквозного счета.

В начальный момент времени при $n = 0$ (т.е. при $t = -\Delta t/2$) в уравнениях вида (3.4) необходимо для начала счета задать $\{V_{i,j}^y\}^{-1/2}$ на расширенной сетке. В дальнейшем при времени $t > 0$ эти скорости на каждом шаге пересчитываются на расширенной сетке.

Выбор коэффициентов η и η_γ (формулы (2.3) и (2.4)), учитывающих влияние внутреннего трения в материале на динамику оболочки, шага интегрирования Δt и шагов расчетной сетки h_1 и h_2 , связанных соотношением (3.6), осуществляется на основе численного эксперимента.

Заметим, что изложенный алгоритм позволяет исследовать также и статические задачи механики эластомерных оболочек методом установления.

4. Уравнения движения в безразмерном виде. Для представления уравнения (1.12) в безразмерном виде задаются: характерный размер L [м], представляющий собой длину образующей оболочки, перепад давления и плотность воздуха ρ_B [кг/м³], по которым определяется характерная скорость V_0 [м/с], вводятся в рассмотрение характерная сила $T_0 = \rho_B V_0^2 L^2$ [Н] и характерная масса $M_s = 2\pi r L \rho$ [кг], где r – максимальный радиус оболочки в начальном состоянии, ρ – плотность материала оболочки, параметр Ньютона $A_N = \rho_B L^3 / M_s$. Размерное значение ускорения $\mathbf{a} = \partial^2 \mathbf{r} / \partial t^2$ выражается через безразмерный параметр $\tilde{\mathbf{a}}$ в соответствии с зависимостью $\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}} V_0^2 / L$, а также производится замена $t = \tau L / V_0$, где τ – безразмерное время, и

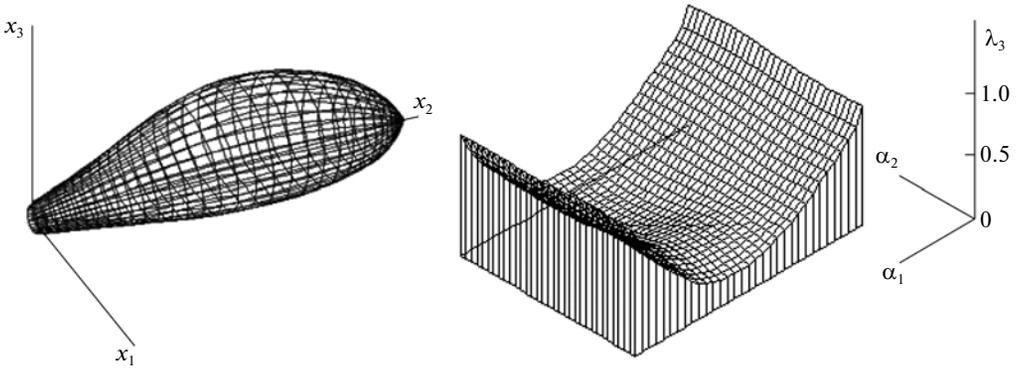
$$T_{ij} = \tilde{T}_{ij} T_0 / L, \quad p = \tilde{p} T_B / L^2, \quad g = \tilde{g} V_0^2 / L, \quad \eta = \tilde{\eta} T^0 / V_0, \quad \rho = \tilde{\rho} M_c / L^2$$

Подстановкой принятых зависимостей уравнение движения элемента оболочки (1.12) приводится к безразмерному виду.

5. Примеры расчетов. В качестве примеров рассматривались процессы неосесимметричного (за счет ограничения движения оболочки плоскостью) и осесимметричного наполнения оболочки вращения, выполненной из эластомера (резины ИРП-2052 [3]), имеющей следующие начальные размеры (фиг. 1): максимальный диаметр $2r = 0.0292$ м, диаметр входного сечения $2r_0 = 0.0146$ м, начальная длина образующей оболочки $L = 0.12$ м, начальная толщина материала оболочки $h = 0.25 \cdot 10^{-4}$ м. Физические соотношения приняты в виде (2.3), причем коэффициент внутреннего трения в материале

$$\eta = 7.5 \cdot 10^{-6} \text{ Нс/м.}$$

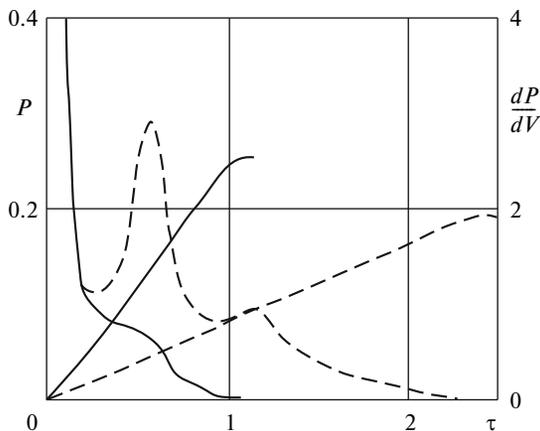
В расчетах использовалась нерегулярная сетка с числом ячеек 32×32 вдоль образующей оболочки и окружности, соответственно. Расчетное значение перепада давления $p = 1570$ Н/м², плотность воздуха $\rho_B = 0.125$ кг/м³, соответствующая характерная скорость составляла $V_0 = 80$ м/с, масса единицы площади оболочки в недеформированном состоянии $\rho_0 = 0.005$ кг/м². Задача решалась в безразмерном виде в соответствии с изложенным в разд. 4.



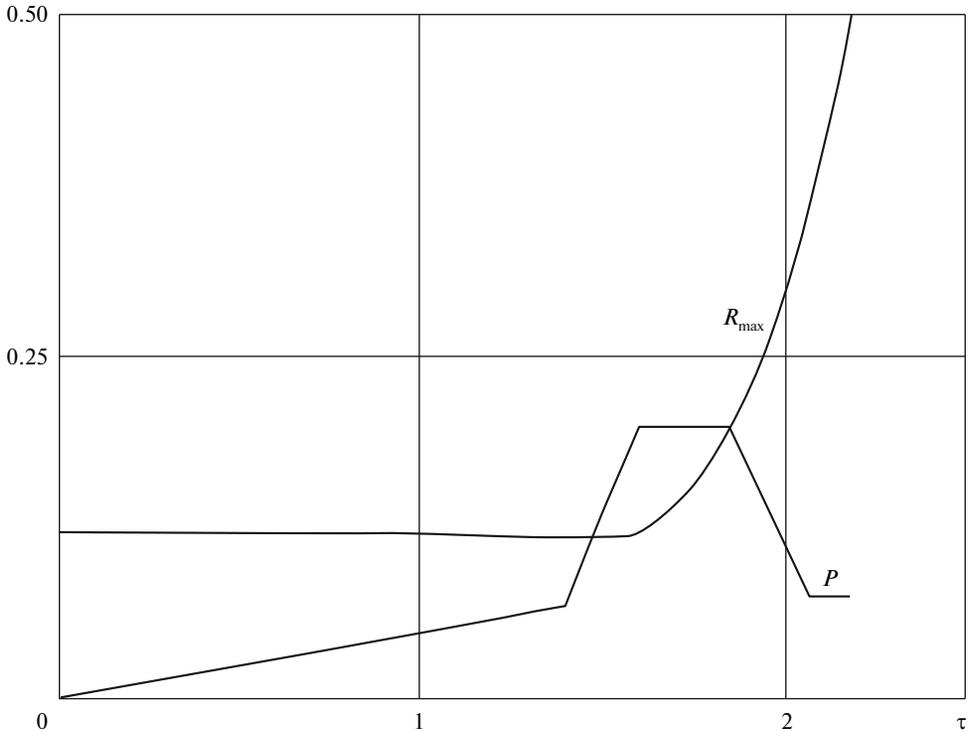
Фиг. 2

Результаты расчетов. На фиг. 1 изображена начальная форма оболочки в декартовой системе координат. Для отработки алгоритма рассмотрен случай реализации неосесимметричной деформации оболочки путем ограничения движения оболочки плоскостью $x_3 = -r$ в процессе ее наполнения (левая часть фиг. 2). Введение в рассмотрение такой плоскости соответствует случаю, когда при достижении элементами оболочки этой плоскости они к ней “прилипают”. Расчеты показывают, что влияние веса оболочки на ее деформированное состояние при выбранном режиме нагружения ничтожно мало. Поэтому исследование процесса наполнения оболочки при отсутствии ограничивающей плоскости $x_3 = -r$ проводилось при осесимметричном нагружении. В правой части фиг. 2 показаны степени уменьшения толщины при неосесимметричном нагружении оболочки, форма которой показана слева: для наглядности в развертке оболочки зоны вершины баллона и входного сечения расширены до прямоугольника.

Установлено, что на процесс наполнения оболочки существенно влияет интенсивность нагружения. На фиг. 3 для двух разных интенсивностей роста давления во времени в процессе наполнения (сплошные и штриховые линии) приводятся результаты



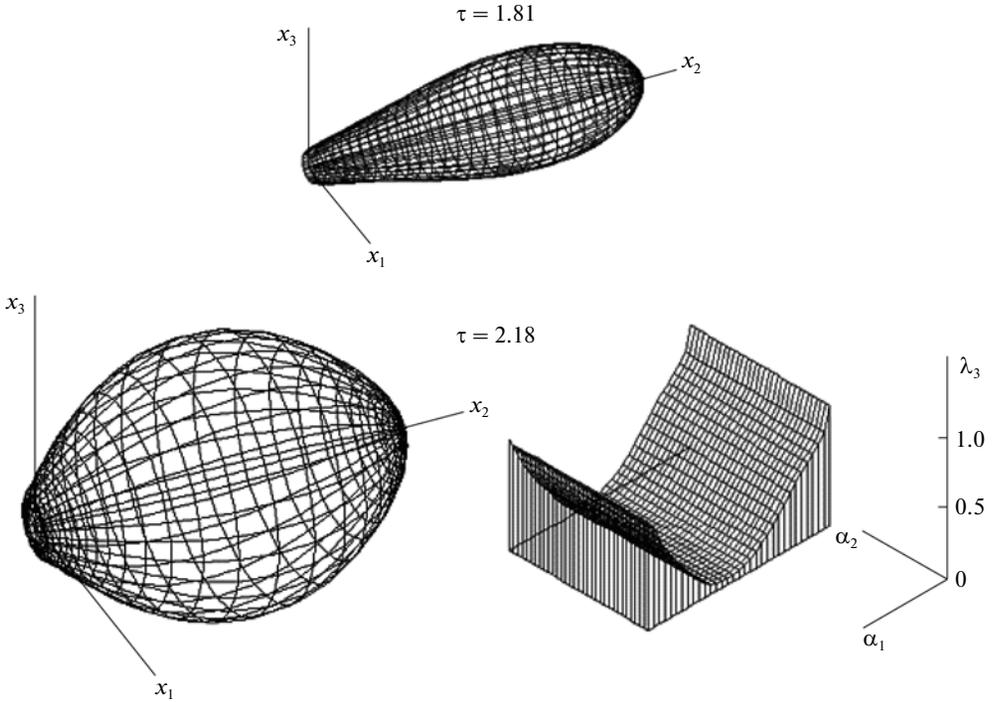
Фиг. 3



Фиг. 4

расчетов, показывающие изменения величины давления P и скорости изменения давления по объему dP/dV . В обоих расчетах возрастание давления задается по кусочно-линейному закону. Расчеты показывают, что в начале наполнения объем изменяется незначительно. При этом скорость возрастания давления по объему dP/dV очень велика, но имеет тенденцию к уменьшению. В случае большой интенсивности надува (сплошные кривые) график производной dP/dV имеет перегиб при $\tau \approx 0.3$, затем dP/dV продолжает уменьшаться. При $\tau \approx 1$ приращение объема настолько велико (хотя давление и продолжает расти), что оболочка наполняется с большой скоростью и переходит в режим критического наполнения. В случае меньшей интенсивности надува (штриховые кривые) длительность процесса наполнения до достижения степени уменьшения толщины стенки оболочки 0.05 увеличивается, а функция dP/dV имеет два локальных максимума (при $\tau \approx 0.55$ и ≈ 1.25). Увеличение значения dP/dV до первого локального максимума связано с тем, что при уменьшении интенсивности давления основное движение оболочки происходит вдоль оси x_2 (фиг. 1) и при этом объем оболочки изменяется незначительно. А при $\tau > 0.55$ реализуется процесс интенсивного увеличения объема оболочки. Второй локальный максимум (при $\tau \approx 1.25$) менее ярко выражен.

Таким образом, из анализа графиков, приведенных на фиг. 3, следует, что при уменьшении интенсивности роста давления (угла наклона графика зависимости перепада давления от времени) критическое значение давления в динамической задаче уменьшается, продолжительность наполнения оболочки до заданной степени 0.05 утоньшения ее стенки увеличивается.



Фиг. 5

Рассмотрим режим критического нагружения оболочки. На фиг. 4 приведен закон изменения перепада давления, принятый в расчетах процесса наполнения оболочки. На графике перепада давления значение, соответствующее горизонтальной полке, подобрано на основании численных экспериментов таким образом, что ниже этой полки реализуется наполнение до формы равновесного состояния, а при величине давления, равной и выше этой полки – неустойчивое “критическое” наполнение. Анализ графика расчетного изменения максимального радиуса оболочки R_{\max} во времени показывает, что вблизи значения времени $\tau \approx 2$, хотя и задано уменьшение перепада давления, но процесс раздувания оболочки продолжается интенсивно, так как сила давления, действующая на элемент оболочки, определяется как произведение давления на площадь деформированного элемента. И эта площадь увеличивается быстрее, чем падает заданное давление, чему способствует также увеличивающийся радиус кривизны оболочки.

На фиг. 5 приведены результаты расчета формы оболочки в моменты времени раздува $\tau = 1.81$ (соответствующей полке графика давления на фиг. 4) и $\tau = 2.18$ (соответствующей степени утоньшения стенки $\lambda_3 = 0.05$, при которой завершается расчет). В момент времени $\tau = 2.18$ оболочка близка по форме к эллипсоиду вращения, ее длина 1.58, диаметр 1.09 (максимальный диаметр несколько смещен в сторону вершины оболочки и соответствует лагранжевой координате 0.59). Начальный объем баллона 0.233 единиц, а в момент времени $\tau = 2.18$ составляет 6.66 единиц. В правой нижней части фиг. 5 изображена эпюра, показывающая изменение степени утоньшения стенки оболочки вдоль образующей в момент времени $\tau = 2.18$. Здесь, как и на фиг. 3, для наглядности в развертке оболочки зоны вершины баллона и входного сечения расширены до прямоугольника. К это-

му времени степень утоньшения стенки в средней части оболочки достигает величины $\lambda_3 = 1/(\lambda_1\lambda_2) = 0.05$.

В точках на образующей оболочки, расположенных на равных расстояниях, начиная с входного сечения, степень утоньшения стенки оболочки λ_3 составила:

0.959, 0.607, 0.391, 0.168, 0.060, 0.060, 0.215, 0.496, 0.864.

6. Заключение. Как показали результаты вычислительных экспериментов, критическое значение внутреннего давления, при достижении которого наступает неустойчивость процесса наполнения (т.е. интенсивное раздувание оболочки при уменьшающемся внутреннем давлении), существенно зависит от скорости наполнения оболочки: чем больше эта скорость, тем большим оказывается и критическое значение давления, что и наблюдается в процессе надувания резиновых шаров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожиллов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
2. *Галимов К.З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. 326 с.
3. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
4. *Гиниятуллин А.Г., Гимадиев Р.Ш.* Исследование наполнения оболочки баллонного катетера // Медицинская техника. 1993. Вып. 2. С. 30–33.
5. *Ридель В.В., Гулин Б.В.* Динамика мягких оболочек. М.: Наука, 1996. 205 с.
6. *Шагидуллин Р.Р.* Проблемы математического моделирования мягких оболочек. Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва, 2001. 235 с.
7. *Гимадиев Р.Ш.* Динамика мягких оболочек парашютного типа. Казань: Изд-во Казан. гос. энерг. ун-та, 2006. 208 с.
8. *Паймушин В.Н.* Об уравнениях геометрически нелинейной теории упругости и безмоментных оболочек при произвольных перемещениях // ПММ. 2008. Т. 72. № 5. С. 822–841.
9. *Паймушин В.Н.* Исследование уравнений теории упругости и пластичности при произвольных перемещениях и деформациях // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 67–80.
10. *Бережной Д.В., Паймушин В.Н.* О двух постановках упругопластических задач и теоретическое определение места образования шейки в образцах при растяжении // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 4. С. 635–659.
11. *Паймушин В.Н.* Теория тонких оболочек при конечных перемещениях и деформациях, основанная на модифицированной модели Кирхгофа–Лява // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 813–829.
12. *Gimadiev R.Sh., Gimadieva T.Z., Paimushin V.N.* Mathematical simulation of dynamics at elastomeric shells inflation // Int. Conf. Methods of Aerophysical Research. Kazan, Russia. 2012. Pt I. P. 114–115.
13. *Otto F., Trostel R.* Zugbeanspruchte Konstruktionen. Bd. 1. Pneumatische Konstruktionen. Frankfurt, Berlin: Ullstein Fachverlag, 1962 = *Отто Ф., Тростель Р.* Пневматические строительные конструкции. М.: Стройиздат, 1967. 320 с.
14. *Магула В.Э.* Судовые эластичные конструкции. Л.: Судостроение, 1978. 263 с.
15. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. Киев: Наук. думка, 1986. 224 с.
16. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992. 422 с.