

Математическое моделирование разгрузки линейного резинового амортизатора, применяемого в авиационной технике

Т.З. ГИМАДИЕВА,
канд. техн. наук,

Р.Ш. ГИМАДИЕВ,

докт. техн. наук

(Казанский государственный
энергетический университет,
г. Казань)

gimadievat@mail.ru

Разработана и численно реализована математическая модель разгона тела по наклонным и горизонтальным рельсам под действием силы натяжения предварительно растянутого амортизатора, изготовленного из резинового шнура. Учитывается нелинейность зависимости нагрузки от деформации. Резиновый амортизатор моделируется абсолютно гибкой деформируемой нитью. Результаты численного исследования сравниваются с данными эксперимента.

Математическая модель, амортизационный шнур, диаграмма деформация-натяжение, абсолютно гибкая нить

В авиационной технике находят применение системы, в которых используется энергия растянутых резиновых амортизационных шнуров (например, для динамического режима испытаний элементов авиационной техники [1]), в пусковых установках (для разгона беспилотных летательных аппаратов [2]). В связи с этим моделирование движения систем, содержащих резиновые амортизационные шнуры, с учетом их гибкости и упругости, является актуальной задачей. При этом необходимо учитывать большую деформативность используемых материалов и волновые процессы в них [1].

Разнообразные задачи математического моделирования гибких линейных элементов с учетом их деформаций успешно решаются на основе использования уравнений движения нити [3].

Представлена математическая модель движения тележки по наклонным и горизонтальным рельсам под действием силы натяжения амортизатора, изготовленного из резинового шнура в несколько сложенных. При расчетах использовалась статическая характеристика разгрузки амортизатора, полученная по результатам экспериментов на горизонтальном стенде НИИ аэроупругих систем (г. Феодосия). Результаты численных экспериментов сравниваются с натурными испытаниями и отмечается их удовлетворительное согласование.

1. Постановка задачи и математическая модель.

Схема фермы AB стенда (в общем случае наклонного, при $\alpha = 0$ – горизонтального) со скользящей по ней тележкой представлена на рис. 1. Тележка движется под действием силы натяжения амортизатора OC , один конец которого крепится к тележке, другой закреплен в неподвижной точке C . В начальный момент тележка находится в точке B , амортизатор растянут ($BC > l_a$, где l_a – длина амортизатора в недеформированном состоянии). При движении тележки к точке A амортизатор сокращается ($AC < BC$). На тележку в процессе движения действуют сила тяжести G_T , сила нормального давления N , сила трения $F_{тр}$, сила аэродинамического сопротивления Q и сила натяжения амортизатора T . Амортизатор при разгрузке деформируется вследствие перемещения его конца O и (в общем случае), действия сил тяжести. Взаимодействие амортизатора с поверхно-

стью стенда не учитывается. В начальный момент и в частном случае движения по горизонтальному стенду форма амортизатора считается прямолинейной.

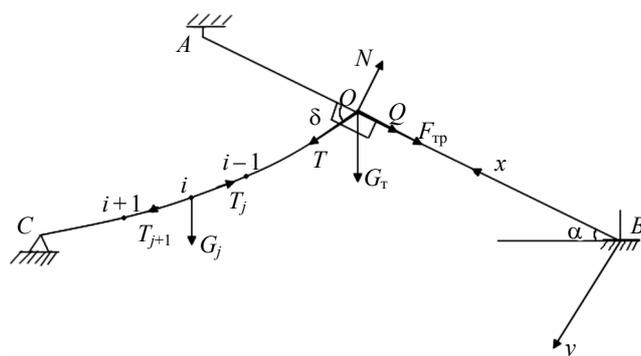


Рис. 1

Задача заключается в определении движения системы тележка – амортизатор.

Будем считать, что амортизатор воспринимает только растягивающие усилия. Тогда моделировать его будем растяжимой весомой идеально гибкой нитью.

Запишем уравнения движения нити в поле силы тяжести в проекциях на оси системы координат Bxy (рис. 1):

$$\rho_a \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{T}{1 + \varepsilon} \frac{\partial x}{\partial s} \right) - \rho_a g \sin \alpha; \quad (1)$$

$$\rho_a \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{T}{1 + \varepsilon} \frac{\partial y}{\partial s} \right) + \rho_a g \cos \alpha,$$

где ρ_a – линейная плотность нити; g – ускорение свободного падения; α – угол наклона фермы к горизонту; v_x, v_y – составляющие скорости движения нити по осям системы координат Bxy ; s – лагранжева координата точки нити, отсчитываемая от точки O ; T – натяжение нити; ε – относительное удлинение нити.

Уравнение движения тележки записывается в виде:

$$m_T \frac{dV_T}{dt} = -F_{тр} + T \cos \delta - G_T \sin \alpha - c_T f_T \frac{\rho V_T^2}{2}, \quad (2)$$

где V_T – скорость тележки; δ – угол между касательной к нити в точке O и фермой (рис. 1); c_T – коэффициент силы сопротивления тележки; f_T – характерная площадь тележки; ρ – плотность воздуха.

При скольжении тележки по ферме сила трения

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (3)$$

где μ – коэффициент трения скольжения.

Учитывая, что тележка движется только в направлении оси Bx , находим

$$N = G_{\text{т}} \cos \alpha + T \sin \delta. \quad (4)$$

Дифференциальные уравнения движения (1), (2) дополняются кинематическими соотношениями для нити:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_x, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v_y; \quad (5)$$

кинематическим соотношением для тележки:

$$\frac{dx_{\text{т}}}{dt} = V_{\text{т}}; \quad (6)$$

геометрическим и физическим соотношениями для нити:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = (1 + \varepsilon)^2; \quad (7)$$

$$T = T(\varepsilon). \quad (8)$$

Начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} y(0, s) &= \frac{y_C}{l_a} s; & x(0, s) &= \frac{x_C}{l_a} s; & v_x(0, s) &= 0; \\ v_y(0, s) &= 0; & x_{\text{т}}(0) &= 0; & V_{\text{т}}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} x(t, 0) &= x_{\text{т}}; & y(t, 0) &= 0; \\ x(t, l_a) &= x_C; & y(t, l_a) &= y_C, \end{aligned} \quad (10)$$

где x_C, y_C – координаты точки C (рис. 1).

На решение накладывается дополнительное ограничение:

$$T(t, s) \geq 0.$$

Для решения системы уравнений (1), (2), (5), (6) применим метод конечных разностей. Введем в рассмотрение дискретную область $s_i = i\Delta s$; $t_j = j\Delta t$ ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots$; $\Delta s = l_a/n$ – длина недеформированного элемента).

Используя для аппроксимации производных центральные разности, запишем систему уравнений (1), (2), (5), (6) в конечно-разностном виде по явной схеме:

$$\begin{aligned} V_{x,i}^{j+1/2} &= V_{x,i}^{j-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho_a \Delta s} \times \\ &\times (T_{i+1}^j \cos \delta_{i+1}^j - T_i^j \cos \delta_i^j - \rho_a g \Delta s \sin \alpha); \\ V_{y,i}^{j+1/2} &= V_{y,i}^{j-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho_a \Delta s} \times \\ &\times (T_{i+1}^j \sin \delta_{i+1}^j - T_i^j \sin \delta_i^j + \rho_a g \Delta s \cos \alpha); \end{aligned} \quad (11)$$

$$V_{\text{т}}^{j+1/2} = V_{\text{т}}^{j-1/2} + \frac{\Delta t}{m_{\text{т}}} \times$$

$$\left[-F_{\text{тр}}^j + T_1^j \cos \delta_1^j - G_{\text{т}} \sin \alpha - c_{\text{т}} f_{\text{т}} \frac{\rho(V_{\text{т}}^{j-1/2})^2}{2} \right],$$

$$x_i^{j+1} = x_i^j + \Delta t \cdot V_{x,i}^{j+1/2}; \quad y_i^{j+1} = y_i^j + \Delta t \cdot V_{y,i}^{j+1/2};$$

$$x_{\text{т}}^{j+1} = x_{\text{т}}^j + V_{\text{т}}^{j+1/2} \Delta t.$$

Длина деформированного i -го элемента:

$$l_1^j = \sqrt{(x_{\text{т}}^j - x_1^j)^2 + (y_{\text{т}}^j - y_1^j)^2}, \quad i = 1;$$

$$l_i^j = \sqrt{(x_i^j - x_{i-1}^j)^2 + (y_i^j - y_{i-1}^j)^2}, \quad i = 2, \dots, n; \quad (12)$$

$$\cos \delta_1^j = \frac{x_1^j - x_{\text{т}}^j}{l_1^j}, \quad \sin \delta_1^j = \frac{y_1^j - y_{\text{т}}^j}{l_1^j}, \quad i = 1;$$

$$\cos \delta_i^j = \frac{x_i^j - x_{i-1}^j}{l_i^j}, \quad \sin \delta_i^j = \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{l_i^j}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (13)$$

Относительное удлинение:

$$\varepsilon_i^j = \begin{cases} l_i^j / \Delta s, & \text{если } l_i^j / \Delta s \geq 1, \\ 0 & \text{если } l_i^j / \Delta s < 1. \end{cases} \quad (14)$$

Натяжение:

$$T_i^j = T(\varepsilon_i^j). \quad (15)$$

Координаты точек i в начальный момент времени:

$$x_i = \frac{x_C}{n} i; \quad y_i = \frac{y_C}{n} i \quad (i = 1, \dots, n-1). \quad (16)$$

Так как используемая разностная схема является явной, при численном решении возникают высокочастотные осцилляции в значениях величин. Для подавления этих осцилляций используется непосредственная корректировка скоростей узловых точек расчетной сетки [4] по формулам:

$$\tilde{V}_x = V_x + \beta \frac{\partial^2 V_x}{\partial s^2}; \quad \tilde{V}_y = V_y + \beta \frac{\partial^2 V_y}{\partial s^2}. \quad (17)$$

По представленной математической модели была составлена программа моделирования движения тележки по ферме стенда под действием силы натяжения резинового амортизатора.

2. Тестовая отработка программы. Программа проверялась на тестовых расчетах.

Сравнение величины максимального провисания под действием силы тяжести нити, натянутой между двумя неподвижными опорами, расстояние между которыми равно «а», с аналитическим решением [5]:

$$y_{\text{max}} = \frac{a^2(1 + \varepsilon)}{8E\varepsilon} \rho_a g, \quad (18)$$

где

$$\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{\gamma}{2} + \left[\left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma}{3} \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}}} + \sqrt[3]{\frac{\gamma}{2} - \left[\left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma}{3} \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}}};$$

γ – параметр нагружения, определяемый по формуле

$$\gamma = (\rho_a g)^2 a^2 / (24E^2).$$

Численные расчеты хорошо согласуются с аналитическим решением.

Сравнение численных расчетов частоты колебаний амортизатора с частотой колебаний струны в основном тоне [6]:

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{ml}}, \quad (19)$$

где m – масса струны.

В численных расчетах начальное возмущение задавалось по скорости узла в середине струны $V_i = 20$ м/с ($i = n/2, n = 50$) в направлении нормали к струне. Результаты численных расчетов отличаются от результатов расчетов по формуле (19) не более чем на 2%.

На основании тестовых расчетов коэффициент β был выбран равным $0,015 \Delta s^2$. Шаг интегрирования Δt выбирался путем проведения расчетов на сгущающихся сетках в области устойчивости по критерию Куранта $\Delta t < \Delta s \sqrt{\rho_a / E_a}$, где E_a – предельный модуль упругости амортизатора.

В процессе тестовой отработки также численно моделировались:

- распространение продольной волны в амортизаторе с линейным и нелинейным законами $T(\epsilon)$;
- отражение продольной волны от заделки;
- стоячие волны;
- резонанс.

3. Сравнение численных и натуральных экспериментов на горизонтальном стенде. Для проверки соответствия разработанной модели реальному процессу и оценки достоверности вычисляемых величин скоростей было проведено сравнение численных и натуральных экспериментов.

На рис. 2 приведена средняя статическая диаграмма разгрузки нового резинового амортизатора $\varnothing 20$ мм в 20 сложений, составленная по результатам пяти экспериментов, проведенных на стендовой базе в НИИ АУС (г. Феодосия).

Экспериментальные точки аппроксимированы по методу наименьших квадратов полиномом:

$$T(\epsilon) = 598,01\epsilon^5 - 1461,3\epsilon^4 + 1376,8\epsilon^3 - 596,66\epsilon^2 + 126,63\epsilon + 2,6475.$$

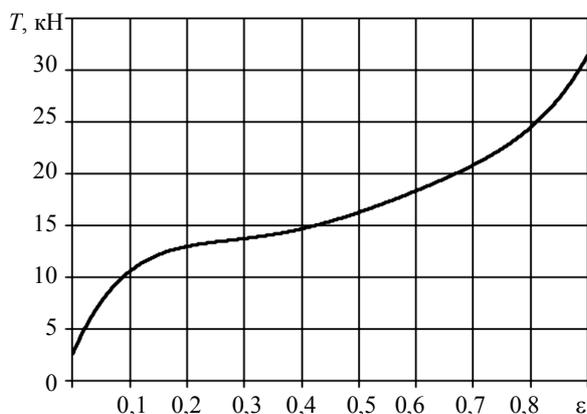


Рис. 2. Диаграмма разгрузки нового резинового амортизатора в 20 сложений

С этим же амортизатором длиной 50 м на стендовой базе НИИ АУС были проведены эксперименты разгона тележки массой 47 кг на горизонтальном стенде с различным начальным удлинением амортизатора.

На рис. 3 показаны графики зависимости скорости от времени для двух экспериментов с одинаковыми начальными условиями. Максимальные скорости в двух натуральных экспериментах отличаются на 8%, что объясняется невозможностью создания на стенде стабильных условий эксперимента. На горизонтальном стенде при применении резиновых амортизаторов в натуральных экспериментах удается достичь скоростей до 65 м/с.

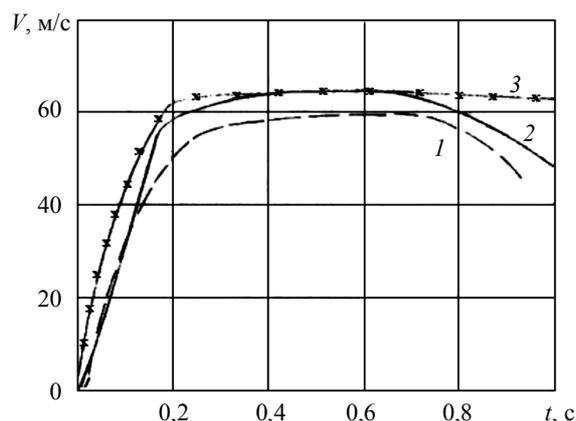


Рис. 3. Изменение скорости тележки в процессе движения при начальном удлинении амортизатора $\epsilon_a = 0,9$: 1, 2 – эксперимент; 3 – расчет

На рис. 3 показана также расчетная зависимость скорости тележки, движущейся под действием силы натяжения амортизатора, от времени. Как видно, скорость тележки в эксперименте возрастает медленнее, чем расчетная. Максимальная скорость в расчетах больше экспериментальной на 0 – 8%. Это расхождение объясняется тем, что в модели не учитывается трение при движении амортизатора по поверхности стенда.

4. Использование резиновых амортизаторов для разгона тележки на наклонном стенде. Для исследования возможности использования наклонного стенда с регулируемым углом наклона фермы с целью придать начальные скорости полета небольшим изделиям были проведены численные эксперименты движения тележки по наклонной ферме стенда при углах ее установки $\alpha = 10^\circ$ и 30° и различных массах тележки: $m_t = 25, 50$ и 100 кг. Длина наклонной фермы $L = 45$ м.

Расчеты проводились при количестве сложений амортизационного шнура $k = 4, 10, 18$. Натяжение амортизационного шнура считалось пропорциональным числу сложений.

Координата точки C определялась из условия, что в начальный момент, когда тележка находится в точке B , амортизатор растянут на 80%, т.е. $BC = 1,8l_a$. Расстояние от точки A (см. рис. 1) до точки C принималось равным длине амортизатора в недеформированном состоянии: $AC = l_a$.

Коэффициент трения при движении тележки по ферме принимался равным $\mu = 0,1$. Коэффициент сопротивления тележки $c_T = 0,95$; характерная площадь тележки $f_T = 0,25 \text{ м}^2$.

На рис. 4 приведены расчетные зависимости скорости тележки от ее перемещения $V_T(x_T)$. Кривые 1, 2, 4 иллюстрируют влияние количества сложенных амортизационного шнура на изменение скорости тележки. Кривые 4, 5, 6 показывают влияние массы тележки на ее движение. Сплошные кривые построены по результатам расчетов при $\alpha = 10^\circ$, штриховая – при $\alpha = 30^\circ$.

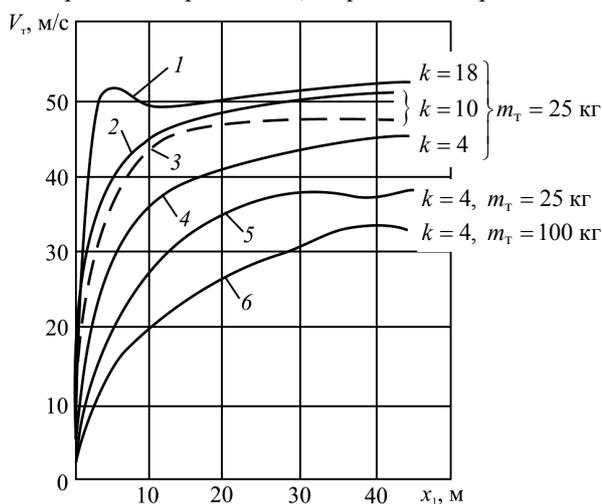


Рис. 4. Зависимость скорости тележки от перемещения:
— $\alpha = 10^\circ$; - - - $\alpha = 30^\circ$

На рис. 5 представлены графики изменения силы натяжения по длине амортизатора (по оси абсцисс отложена безразмерная лагранжева координата амортизатора) для разных моментов времени, указанных с соответствующими им перемещениями тележки массой 25 кг при наклоне фермы $\alpha = 30^\circ$ и числе сложенных амортизационного шнура $k = 10$. Как видно из графиков, сначала натяжение в амортизаторе уменьшается в области крепления к тележке, в дальнейшем возмущение распространяется к неподвижно закрепленной точке, а при достижении тележкой конца фермы натяжение в окрестности точки С падает до нуля.

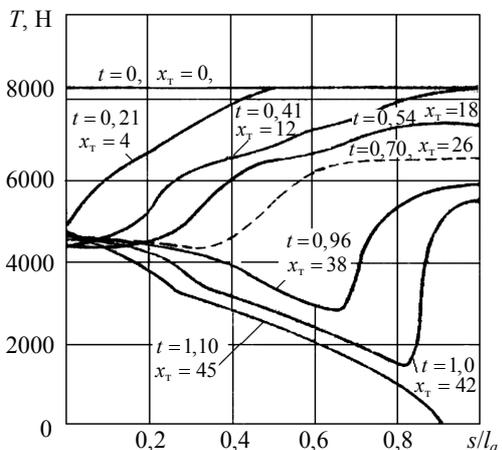


Рис. 5. Изменение силы натяжения в амортизаторе во времени: $m_T = 25 \text{ кг}$, $k = 10$, $\alpha = 30^\circ$

Из графиков на рис. 5 видно, что на участке движения тележки от 4 до 45 м натяжение в точке крепления амортизатора к тележке изменяется мало. Тем не менее, на графике изменения скорости (см. рис. 4, штриховая кривая) видно, что ускорение на этом участке изменяется очень значительно, а начиная с $x_T = 30 \text{ м}$ скорость тележки падает. Это объясняется уменьшением проекции силы натяжения в амортизаторе на направление движения тележки: при $x_T = 24 \text{ м}$ $\delta = 77^\circ$, $\cos \delta = 0,223$; при $x_T = 45 \text{ м}$ $\delta = 79^\circ$, $\cos \delta = 0,188$.

На рис. 6 изображена форма амортизатора для перемещений тележки по ферме стенда при $x_T = 0 \text{ м}$, $x_T = 24 \text{ м}$, $x_T = 45 \text{ м}$. В этом варианте ярко проявляется влияние формы амортизатора на движение тележки.

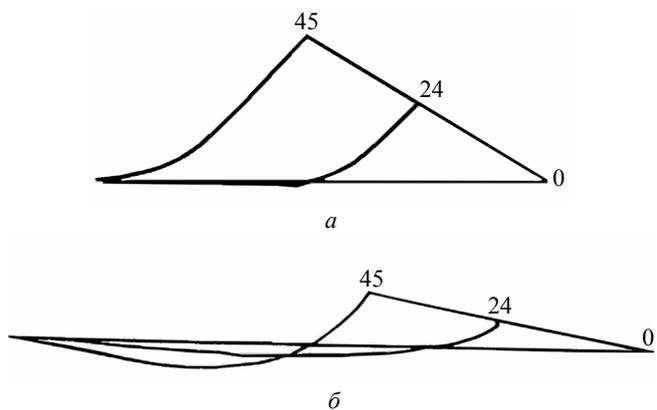


Рис. 6. Форма амортизатора в процессе движения:
а – $m_T = 25 \text{ кг}$; $k = 10$; $\alpha = 30^\circ$; б – $m_T = 25 \text{ кг}$; $k = 10$; $\alpha = 10^\circ$

Максимальная скорость, которой может достичь тележка при увеличении числа сложенных амортизационного шнура, ограничена в связи с тем, что скорость сокращения (разгрузки) амортизатора конечна. Наиболее наглядно это иллюстрирует рис. 4. Для тележки $m_T = 25 \text{ кг}$ при увеличении числа сложенных амортизатора до 18 скорость на участке, где перемещения тележки $x_T < 6 \text{ м}$, возрастает на 70 и 22 % по сравнению с числом сложенных амортизационного шнура $k = 4$ и $k = 10$. Однако в связи с большими ускорениями тележки на начальном участке пути натяжение в амортизаторе не успевает перераспределяться по всей его длине, и к тому времени, когда тележка перемещается на 6 м, натяжение на участке крепления амортизатора к тележке падает до нуля и тележка движется с отрицательным ускорением до $x_T = 14 \text{ м}$, когда натяжение в области крепления амортизатора к тележке достигает 702 Н. В дальнейшем скорость тележки незначительно возрастает.

На рис. 6 показана форма амортизатора для $m_T = 25 \text{ кг}$; $k = 10$; $\alpha = 10^\circ$. Сравнивая поз. а и б, отметим, что поскольку при $\alpha = 10^\circ$ тележка разгоняется быстрее, чем при $\alpha = 30^\circ$, неравномерность распределения натяжения по длине амортизатора и кривизна в конце движения при $\alpha = 10^\circ$ больше, чем при $\alpha = 30^\circ$.

Использование амортизационного шнура $\varnothing 20 \text{ мм}$ в 4–18 сложенных позволит разогнать тележку массой 25 ÷ 100 кг при наклоне фермы 10 ÷ 30° до скоро-

стей $\sim 23 \div 53$ м/с (для сравнения: по справочным данным [7] скорость звука в резине 54 м/с).

Выводы. Для моделирования разгрузки резиновых амортизационных шнуров эффективно применять уравнение движения нити, а физическое соотношение задавать в виде нелинейного закона (см. рис. 2).

Разработана математическая модель и численный алгоритм испытаний на горизонтальном и наклонном стендах с учетом нелинейности диаграммы разгрузки резинового амортизатора. Численные эксперименты по разработанному алгоритму хорошо согласуются с натурными испытаниями.

На горизонтальном стенде с помощью резинового амортизатора можно достичь скоростей до 64 м/с, а на наклонном стенде – скоростей до 53 м/с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гимадиева Т.З. Сравнение двух методов расчета силы натяжения линейного амортизатора // IX Дальневосточная

конференция по мягким оболочкам: тез. докл. Владивосток, 1991. С. 78–80.

2. Аленченков Г.С. Стартовые устройства. Моделирование процесса запуска беспилотного летательного аппарата // Современное машиностроение. Наука и образование. 2011. № 1. С. 108–115.

3. Гимадиев Р.Ш. Динамика мягких оболочек парашютного типа. Казань: Казан. гос. энерг. ун-т. 2006. 208 с.

4. Теймуров Ф.Д. О решении задачи поперечного удара по гибкой связи на ЭЦВМ // Материалы Всесоюз. симпозиума по распространению упругопластических волн в сплошных средах. Баку, 1964 г. / Баку, 1966 г. С.182–192.

5. Гимадиев Р.Ш., Динмухаметов Ф.Ф., Галимуллин Н.Р. Расчет пространственной динамики ЛЭП при совместном воздействии ветровой и весовой нагрузки // Изв. вузов. Проблемы энергетики. 2010. № 3–4. С. 28–37.

6. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М: Наука, 1973. 400 с.

7. Кухлинг Х. Справочник по физике / пер. с нем. М.: Мир, 1982. 520 с.

Поступила в редакцию
15.04.13

Mathematical Modeling of Unloading a Linear Shock Cord Used in Aircraft Engineering

T.Z. GIMADIEVA AND R.SH. GIMADIEV

A mathematical model of accelerating a body along the inclined and horizontal rails under the tension force of the prestretched shock cord has been developed and numerically realized. The nonlinearity of load-strain dependence is taken into account. The shock is modeled as an absolutely flexible deformable thread. The results of numerical study are compared with the experiment data.

Mathematical model, shock cord, strain–tension curve, absolutely flexible thread