МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Л.Ш. ХАКИМУЛЛИНА

ЛЕКЦИИ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Статика и Кинематика

Учебное пособие

Казань 2011

УДК 531
ББК 22.21
Х16

Рецензенты:
кандидат технических наук, доцент
Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева
Ф.Ф. Алексеев;
кандидат технических наук, доцент Казанского государственного
энергетического университета *С.А. Лаптев*

Хакимуллина Л.Ш.
Х16 Лекции по теоретической механике. Статика и Кинематика: Учеб. пособие / Л.Ш. Хакимуллина. − Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2011. − 115 с.

В пособии изложена первая часть двухсеместрового курса теоретической механики, включающая разделы «Статика» и «Кинематика». Содержание лекций соответствует государственным образовательным стандартам дисциплины «Теоретическая механика» для названного направления. Теоретический материал сопровождается примерами.

Учебное пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлению 140500 «Энергомашиностроение».

УДК 531
ББК 22.21

Лекция № 1
ВВЕДЕНИЕ

«Книга природы написана
на языке математики…»
Галилео Галилей

Теоретическая механика – это наука о закономерностях механического движения материальных объектов, устанавливающих связи между силами и движением материальных объектов с учетом инерционных свойств последних. Теоретическая механика изучает также частный случай механического движения – *равновесие* материальных объектов.

Под *механическим движением* в механике понимается изменение положения материальных объектов относительно друг друга с течением времени.

Механика, законы которой выражены математически, оперирует не реальными материальными объектами (телами), а их моделями. Таковыми являются *материальная точка*, *механическая система* и *абсолютно твердое тело*.

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела любой формы, размерами и вращением которого можно пренебречь и принять его за геометрическую точку, наделенную механическими свойствами.

Под *механической системой* понимается совокупность взаимодействующих между собой материальных точек, движения которых взаимосвязаны. Частным случаем механической системы является *неизменяемая механическая система*, расстояния между точками которой неизменны при любых взаимодействиях. *Абсолютно твердое тело* также рассматривается как неизменяемая механическая система, масса которого непрерывно распределена по объему тела.

Инерционные свойства материальных объектов зависят от распределения в них массы. Чем больше, например, масса материальной точки, тем медленнее изменяется её движение под действием силы.

Причинами движения тел является взаимодействие с другими телами. Количественными характеристиками этого взаимодействия являются *силы*.

Механика изучает связи между силами и движением материальных объектов, оставляя в стороне изучение физической природы сил. Силы разной природы в механике могут быть равны. *Механика называет силой меру механического взаимодействия материальных объектов, ограничиваясь указанием способа измерения этого взаимодействия.*

Впервые законы механики, связавшие движение тел с приложенными к ним силами в трактовке, сохранившей своё значение в настоящее время, были сформулированы Г. Галилеем (1564–1642) и И. Ньютоном (1643–1727), родившимся через год после смерти Галилея. Своими трудами эти великие мыслители произвели революцию в образе мышления людей относительно окружающего их мира. Люди осознали, что материальные тела ведут себя по неизменным законам, которые могут быть выражены математически, и, следовательно, движение тел предсказуемо и воспроизводимо. Последнее имеет решающее практическое значение при создании машин, механизмов и сооружений. В 1687 году И. Ньютон в своём знаменитом сочинении «Математические начала натуральной философии», завершая работы своего предшественника и результаты своей многолетней деятельности, изложил основные положения теоретической механики, придав ей черты научной теории. «В истории естествознания, – писал академик С. И. Вавилов, – не было события более крупного, чем появление «Начал» Ньютона»[1]. Решающее воздействие оказало сочинение Ньютона и на развитие методологии научных исследований. «Метод принципов», использованный в «Началах», состоит в том, что на основе опытных фактов и их осмысления формулируются наиболее общие закономерности, не требующие доказательств – аксиомы, из которых дедуктивным методом выводятся все те положения механики, которые могут быть проверены и использованы практикой. Эта методология оказалась очень продуктивной и стимулировала развитие механики.

Окончательно, механика как наука сформировалась в XVIII веке в трудах французского учёного Л. Эйлера (1707–1783), который много лет жил и работал в России по приглашению Петербургской Академии наук (1727–1741), (1766–1783). Эйлер занимался развитием аналитических методов в механике, основанных на применении дифференциального и интегрального исчислений. Дальнейшее развитие аналитических методов, ставших основными в механике, связано, главным образом, с именем Ж. Лагранжа (1736–1813), предложившего большое количество новых методов в механике. Введением обобщенных координат он получил новую форму уравнений движения механической системы, носящих его имя.

---

[1] Вавилов С.И. Исаак Ньютон. –М.: изд. АНСССР, 1961. С. 110.

Благодаря Лагранжу часть механики, развивающая аналитические методы, выделилась и получила название «аналитическая механика».

В XIX–XX веках развитие механики было связано со стремительным ростом промышленности, приведшим к необходимости развития специальных разделов механики – гидродинамики, аэродинамики, газовой динамики, теории упругости, теории пластичности, сопротивления материалов и др., которые в дальнейшем отделились от теоретической механики и стали самостоятельными дисциплинами.

Большой вклад в развитие теоретической механики в этот период был сделан выдающимися отечественными учёными М. В. Остроградским (1801–1862), С. В. Ковалевской (1850–1891), А. М. Ляпуновым (1857–1918), Н. Е. Жуковским (1847–1921), С. А. Чаплыгиным (1869–1942), И. В. Мещерским (1859–1935), К. Э. Циолковским (1857–1935), Ф. Н. Крыловым (1863–1945), Н. Г. Четаевым и их учениками.

Механик и математик М. В. Остроградский является автором работ по небесной и аналитической механике. Вслед за ирландским механиком и математиком У. Р. Гамильтоном (независимо от его работ) он сформулировал интегральный вариационный принцип аналитический механики для более общего случая. В настоящее время объединённый принцип называется принципом Гамильтона – Остроградского. С. В. Ковалевская рассмотрела новый случай интегрируемости уравнений движения тяжелого твёрдого тела вокруг неподвижной точки, названный её именем. В 1888 году работа была премирована Парижской Академией наук.

«Отцу русской авиации» Н. Е. Жуковскому принадлежат фундаментальные труды по теории движения твёрдых тел с жидким наполнителем, теории устойчивости движения, динамике полёта аэропланов и многие другие работы, тесно связанные с практическими приложениями и расширяющие границы механики. Жуковский является основоположником аэродинамики. Занимая кафедру теоретической механики Московского университета с 1886 по 1921 годы, Жуковский большое внимание уделял преподаванию теоретической механики, её содержанию и изложению. Его курс теоретической механики, в который он ввёл векторный метод изложения и элементарную статику, получил распространение в России. В дальнейшем введенные им инновации стали традиционными при изложении курса теоретической механики в технических вузах нашей страны. Ученик Н. Е. Жуковского академик С. А. Чаплыгин является автором фундаментальных работ по аналитической механике неголономных систем. Он же является основоположником газовой динамики – аэродинамики больших скоростей. Его исследования внесли большой вклад в развитие методики расчета самолётов. Блестящим представителем перечисленной плеяды отечественных механиков, труды которых в области механики связаны с актуальными задачами техники, является также А. Н. Крылов – автор работ по теории гироскопов и гироскопических приборов, основоположник современной теории корабля.

Математик и механик А. М. Ляпунов является создателем теории устойчивости движения механических систем. Освоение и применение его методов в механике началось в начале 30-х годов XX столетия в сложившейся в Казанском университете, а после открытия в 1932 году в Казанском авиационном институте (в настоящее время КГТУ им. А. Н. Туполева) школе механиков под руководством выдающегося механика Н. Г. Четаева и получившей в дальнейшем широкую известность как Казанская Четаевская школа.

И. В. Мещерский и К. Э. Циолковский являются основоположниками механики тела переменной массы, нашедшей применение в теории реактивного движения. Трудно переоценить вклад Константина Эдуардовича Циолковского в достижения нашей страны в освоении космического пространства. Ему принадлежат основополагающие работы в области ракетной техники и проблем межпланетных сообщений.

Начало XX века ознаменовалось созданием новых моделей механики – релятивистской и квантовой механик, основанных на теории относительности А. Эйнштейна (1879–1955), которая показала ограниченность ньютоновских представлений о пространстве, времени и материи. Однако поправки и изменения, вносимые в законы ньютоновской механики релятивистской и квантовой механиками, исчезающе малы при обычных в технике скоростях движения тел, значительно меньших скорости света, и размерах тел, существенно больших размеров атомов, и практически учитываются только в задачах электродинамики и атомной энергетики. В цитированной выше книге С. В. Вавилов писал: «Механика Ньютона не противоречит механике теории относительности и квантовой механике, – она является только их предельным, крайним случаем. В этом смысле творение Ньютона вечно и никогда не потеряет огромного значения».

Механика продолжает развиваться и в наши дни. Например, в последние десятилетия возникала проблема управления движением. Это задача определения характера изменения сил, с помощью которых можно обеспечить движение тел по заданным программам, а также задача оптимального управления движением. К этому виду задач относится, например, задача об управлении движением ракеты с целью выхода на заданную орбиту при минимальном расходе горючего.

В настоящее время под классической механикой понимается совокупность отраслей знаний, базирующихся на законах Ньютона.

Теоретическая механика является частью классической механики, изучающей движение материальной точки и механической системы, в которой заложены основы ньютоновской механики.

Настоящий курс лекций адресован студентам, обучающимся по направлению 140500 «Энергомашиностроение», для которых теоретическая механика является базовой дисциплиной для специальности и, следовательно, важно практическое применение полученных знаний по дисциплине. Этим обусловлено то, что в лекциях меньше внимания уделено строгости в пользу максимальной простоты доказательств теорем и больше внимания уделено примерам. Студентам, заинтересованным в более углублённом изучении теоретической механики, необходимо воспользоваться учебниками, рекомендуемыми для обучающихся по направлениям «Механика» и «Математика» в классических университетах.

Изложение курса базируется на материалах учебников и учебно-методических пособий [1]−[7]. Он рассчитан на двухсеместровый курс изучения теоретической механики и состоит из двух частей. Представленная первая часть включает разделы «Статика» и «Кинематика». Вторая часть будет содержать раздел «Динамика».

Теоретическая механика делится на три раздела: «Статика», «Кинематика» и «Динамика». Изучение теоретической механики начнем со «Статики».

Основные понятия и определения статики

Статика – раздел теоретической механики, изучающий условия, при которых силы, приложенные к материальным объектам, движения не производят. Материальными объектами статики являются *абсолютно твердые тела* – абстрактные модели реальных тел, расстояния между двумя любыми точками которых остаются неизменными при взаимодействиях с другими телами. В дальнейшем абсолютно твердые тела будем называть твердыми телами. Мерой механического взаимодействия материальных объектов в механике является *сила.* Сила характеризуется интенсивностью (величиной), направленностью (линией действия) и точкой приложения (рис. 1.1), т. е. сила определяется *как связанный вектор*.

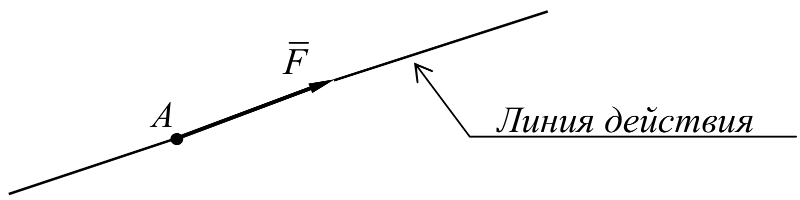


Рис. 1.1

В статике рассматриваются только постоянные силы.

Совокупность сил, приложенных к выделенному твердому телу, называется *системой сил* и обозначается:

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$$

или, если число сил, входящих в систему, нас не интересует, то более компактно $(\overline{F})$.

Равновесие – это покой рассматриваемого твердого тела по отношению к системе отсчета, которую при изучении статики будем связывать с Землей.

Относительное равновесие – покой относительно подвижных систем отсчета – изучается в динамике.

Система сил, под действием которой твердое тело находится в равновесии, называется *уравновешенной системой сил* или системой сил, эквивалентной нулю:

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \sim 0.$$

Система сил, например, ($\overline{Q}$), которая вместе с данной системой сил ($\overline{F}$) образует уравновешенную систему сил, называется *уравновешивающей системой сил*: $(\overline{F}, \overline{Q}) \sim 0$.

Две системы сил, например, $(\overline{F})$ и $(\overline{Q})$ называются *эквивалентными*, если они имеют одну и ту же уравновешивающую систему сил, например $(\overline{G})$:

$$(\overline{F}, \overline{G}) \sim 0, \quad (\overline{Q}, \overline{G}) \sim 0.$$

Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется *равнодействующей*:

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \sim \overline{R}.$$

Основные задачи статики

Статика изучает *две основные задачи:*

1) Приведение заданной произвольной системы сил к простейшему виду.

2) Вывод условий равновесия твердых тел, находящихся под действием систем сил.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение материальной точки.
2. Что называется системой сил?
3. Какая система сил называется уравновешенной?
4. Приведите определение эквивалентности двух систем сил.

5. Дайте определение равнодействующей системы сил.
6. Назовите основные задачи статики.

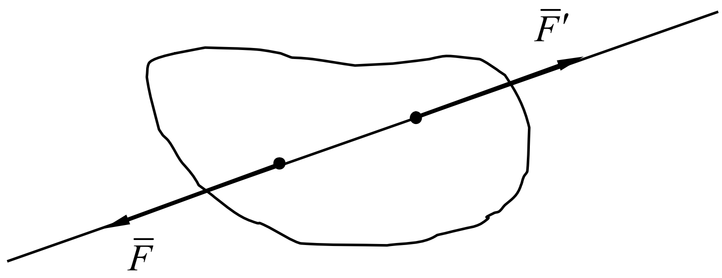
Лекция № 2
АКСИОМЫ СТАТИКИ. ПРОСТЕЙШИЕ СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

Теоретические результаты, получаемые в виде теорем и следствий *геометрической статики* (в отличие от *аналитической статики*, которую здесь не будем рассматривать) опираются на ряд положений, принимаемых без логических доказательств, которые называются *аксиомами статики*.

Аксиомы статики

А1 ***Аксиома двух сил***

Для того, чтобы твердое тело находилось в равновесии под действием двух сил, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были противоравными (рис. 2.1).



$$\boxed{\overline{F}' = -\overline{F}}$$

Рис. 2.1

Аксиома А1 указывает простейшую уравновешенную систему сил.

А2 ***Аксиома добавления и отбрасывания сил***

Состояние равновесия твердого тела не изменится, если к системе сил, действующих на него, добавить или отбросить уравновешенную систему сил, т.е., если, например $(\overline{F}) \sim 0$, $(\overline{Q}) \sim 0$, то $(\overline{F}, \overline{Q}) \sim 0$.

С1 ***Следствие 1***

Добавление или отбрасывание к заданной системе сил любой уравновешенной системы сил дает систему, эквивалентную данной.

Доказательство. Пусть даны произвольные системы сил $(\overline{F})$ и уравновешенная система сил $(\overline{Q})\sim 0$. Докажем, что $(\overline{F},\overline{Q})$ ~ $(\overline{F})$. Составим систему сил $(\overline{F}')$, противоравных системе сил $(\overline{F})$. Очевидно, что система сил $(\overline{F},\overline{F}')\sim 0$ – уравновешенная. Тогда на основании аксиомы А2 система сил $(\overline{F},\overline{F}',\overline{Q})\sim 0$ – также уравновешенная. Так как системы сил $(\overline{F},\overline{F}',\overline{Q})$ и $(\overline{F},\overline{F}')$ имеют одну и ту же уравновешивающую систему сил $(\overline{F}')$, то по определению эквивалентности систем сил $(\overline{F},\overline{Q})$ ~ $(\overline{F})$. Следствие доказано.

C2

Следствие 2

Сила, приложенная к твердому телу, есть вектор скользящий.

Таким образом, силу, приложенную к твердому телу, не изменяя оказываемого ею действия, можно переносить вдоль линии действия (рис. 2.2).

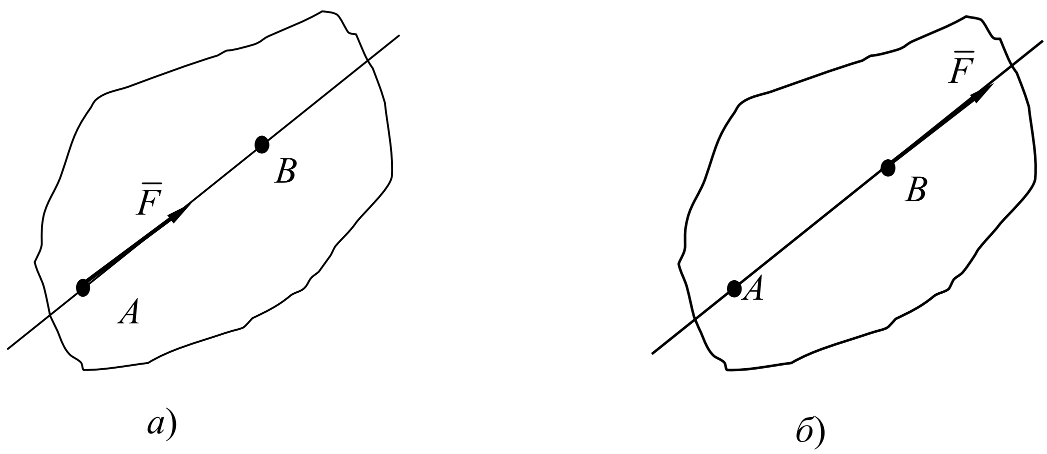


Рис. 2.2

Доказательство. Допустим, к телу в точке *A* приложена сила $(\overline{F})$ (рис. 2.2, *а*). Составим систему противоравных сил $(\overline{F},\overline{F}')\sim 0$, где $\overline{F}'=-\overline{F}$ и приложим её в точке *B*. На основании первого следствия С1 получим систему сил, эквивалентную силе $\overline{F}$, приложенной в точке *A*. Затем на основании того же следствия отбросим силу, приложенную в точке *A*, и противоравную ей силу, приложенную в точке *B*. Следовательно, оставшаяся сила $\overline{F}$, приложенная в точке *B* (рис. 2.2, *б*), будет эквивалентна силе $\overline{F}$, приложенной в точке *A*.

A3 ***Аксиома параллелограмма сил***

Две силы, приложенные к одной точке твердого тела, имеют равнодействующую, определяемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах (рис. 2.3).

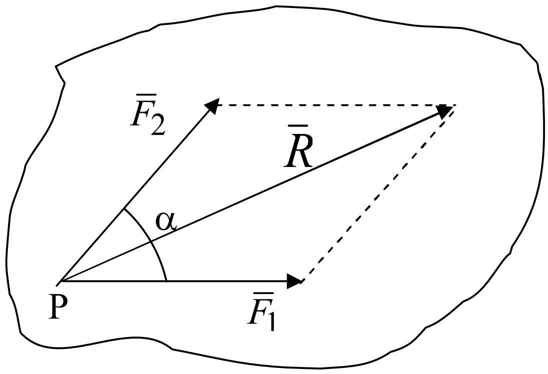


Рис. 2.3

Аксиома А3 утверждает, что $(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \sim \overline{R}$ или $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$.

Если известен угол α между силами, то по теореме косинусов модуль равнодействующей определяется по формуле:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}.$$

A4 ***Аксиома «отвердевания»***

Равновесие деформируемого тела, находящегося под действием системы сил, не нарушится, если тело считать абсолютно твердым.

Поясним аксиому на примере. Пусть к концам нити приложены растягивающие противоравные силы. Нить, являясь деформируемым телом, будет находиться в равновесии. Если представить нить отвердевшей, то равновесие под действием той же системы сил сохранится. Пусть теперь, наоборот, стержень находится в равновесии под действием, например, сжимающей системы двух противоравных сил, приложенных к концам стержня. Если заменить стержень нитью, то она под действием той же системы сил сомнётся и не будет находиться в равновесии. На практике аксиома А4 применяется при решении задач на равновесие составных конструкций, отдельные твёрдые части которых соединены связями, позволяющими телам перемещаться друг относительно друга, и, следовательно, в целом составная конструкция является деформируемой.

A5

Аксиома равенства действия и противодействия

При взаимодействии двух тел силы действия и противодействия, возникающие при этом, являются противоравными.

Аксиомы А1−А5 справедливы только для *свободных* тел, т.е. таких, на перемещения которых не наложено никаких ограничений.

Несвободным телом называется тело, отдельные перемещения которого ограничены другими телами, которые называются *связями*. Силы, с которыми эти связи действуют на рассматриваемое тело, называются *реакциями связей*. Силы, действующие на тело и не зависящие от наложенных на него связей, называются *активными*.

A6

Принцип освобождаемости от связей

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить действующие на него связи, заменив их действие силами – реакциями связей.

Теорема о трёх непараллельных силах

На основе изложенных аксиом можно доказать *теорему о трёх непараллельных силах*:

Если твердое тело находится в равновесии под действием трёх непараллельных сил и две из них лежат в одной плоскости, то линии действия всех сил пересекаются в одной точке.

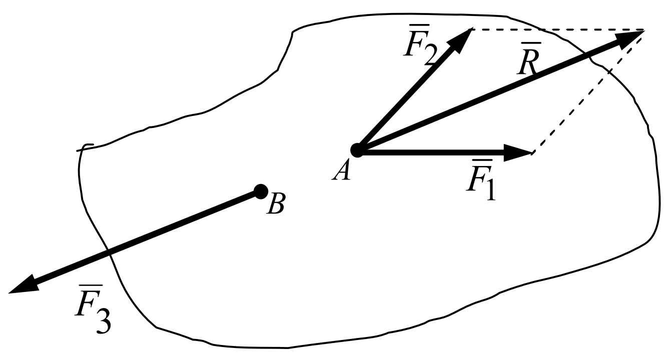


Рис. 2.4

Доказательство. Пусть силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ лежат в одной плоскости (рис. 2.4). Тогда линии их действия пересекаются, например, в точке A.

Перенесём силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ на основании следствия С2 в точку A и сложим их по аксиоме А3. Пусть $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$. Тогда на основании аксиомы А1 силы $\overline{R}$ и $\overline{F}_3$ являются противоравными, и, следовательно, линии их действия совпадают, а линия действия силы $\overline{F}_3$ проходит через точку A. Теорема доказана.

Простейшие связи и их реакции

Связи, которые рассматриваются в статике, реализуются при помощи твердых и гибких тел. Сила, с которой данное тело действует на связь, и реакция связи по аксиоме А3 являются *противоравными силами*.

1. *Идеально гладкая поверхность* (рис. 2.5).

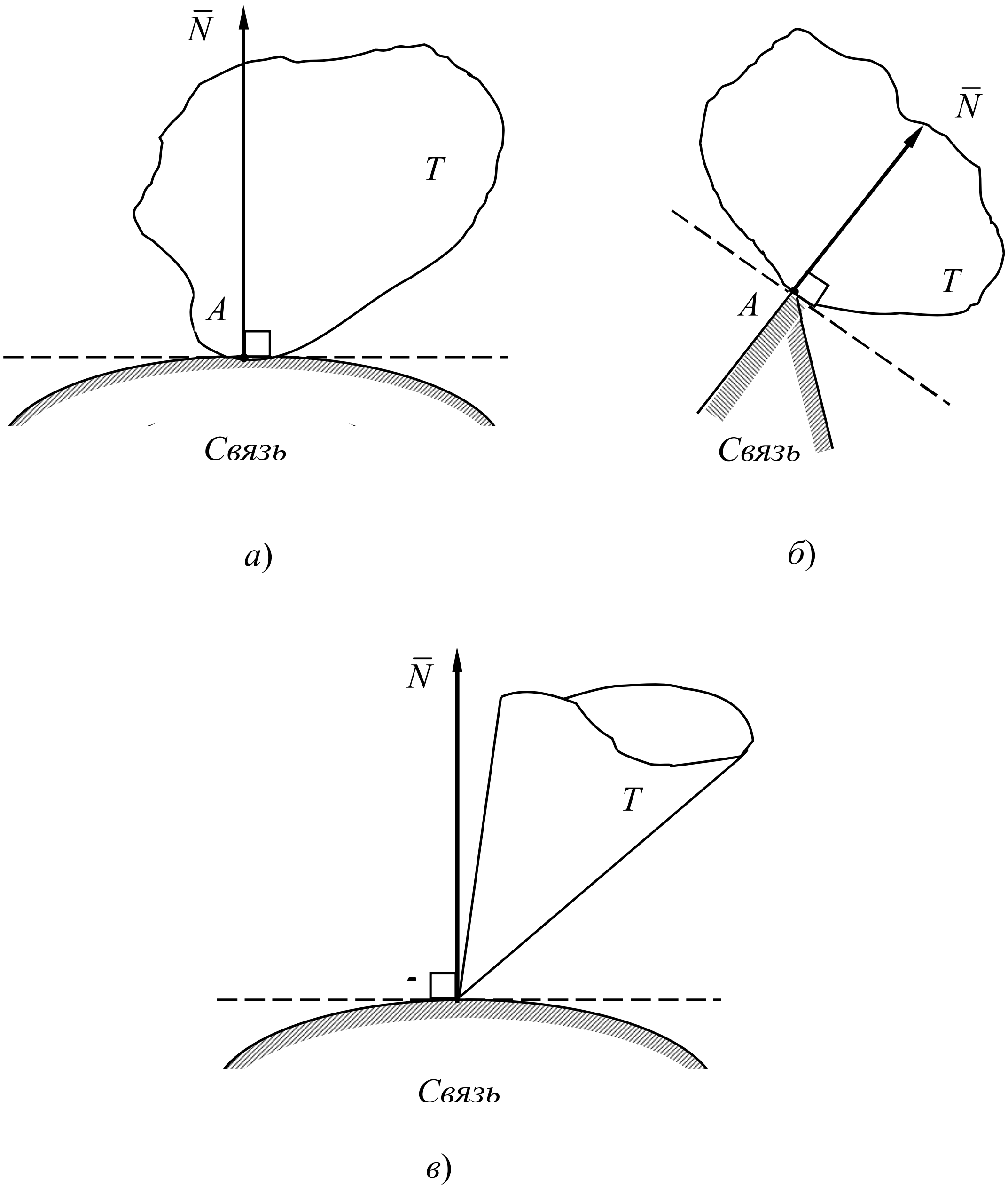


Рис. 2.5

Тело T опирается в точке A на гладкую поверхность, которая является для него связью. Реакция $\overline{N}$ гладкой поверхности приложена в точке A и направлена по общей нормали к телу и гладкой поверхности (рис 2.5, *а*). Возможен также случай, когда твёрдое тело опирается на остриё идеальной связи. В этом случае реакция связи будет направлена по нормали, проведенной к поверхности самого тела в точке опоры (рис. 2.5, *б*). В случае, когда само тело упирается остриём в идеальную поверхность, реакция связи проводится по нормали к поверхности идеальной связи (рис. 2.5, *в*).

2. *Цилиндрический шарнир* (рис. 2.6).

В цилиндрическое отверстие тела T вставляется цилиндрический болт (заштрихован на рис. 2.6) несколько меньшего диаметра, чем отверстие. Тело T может вращаться вокруг оси болта. Реакция $\overline{R}$ цилиндрического шарнира лежит в плоскости, перпендикулярной оси болта, проходит через центр болта и точку касания с телом. Таким образом, направление реакции $\overline{R}$ неизвестно и определяется в зависимости от приложенных к телу сил. Часто, чтобы не вводить неизвестный угол α, определяющий направление реакции $\overline{R}$, ее заменяют двумя другими составляющими по взаимно ортогональным направлениям:

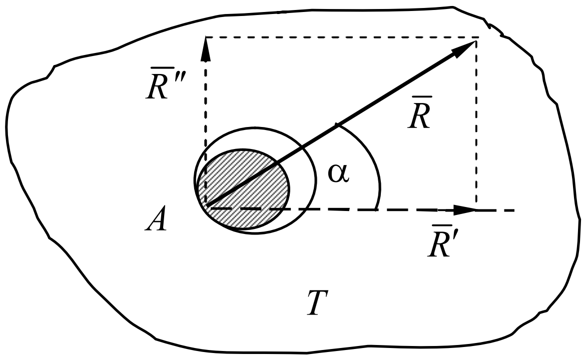


Рис. 2.6

$$\overline{R} = \overline{R}' + \overline{R}''.$$

3. *Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора (подвижной каток)* (рис. 2.7).

Тело T опирается на гладкую поверхность через шарнир, поставленный на катки. Реакция $\overline{R}$ шарнирно-подвижной опоры направлена перпендикулярно опорной поверхности.

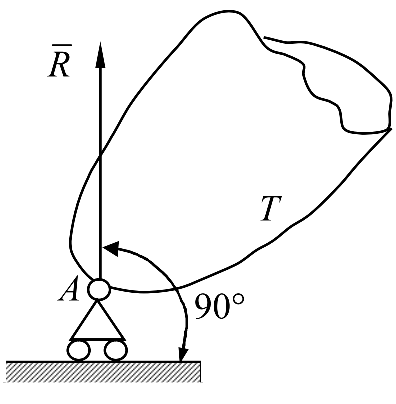


Рис. 2.7

4. *Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора* (рис. 2.8).

Тело T прикреплено с помощью шарнира к неподвижной поверхности. Направление реакции $\overline{R}$ опоры может быть любым, в зависимости от приложенных сил. Как и в случае цилиндрического шарнира, чтобы не вводить неизвестный угол α, реакцию $\overline{R}$ раскладывают по двум взаимно ортогональным направлениям:

$$\overline{R} = \overline{R}' + \overline{R}''.$$

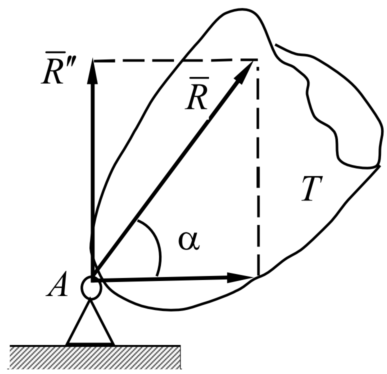


Рис. 2.8

5. *Гибкая нерастяжимая нить* (рис. 2.9).

Реакция нити $\overline{R}$, называемая натяжением нити, направлена вдоль нити к точке подвеса.

6. *Невесомый шарнирно - закрепленный на концах стержень* (рис. 2.10).

Реакция $\overline{R}$ невесомого стержня направлена вдоль него. При этом стержень может быть как сжат, и тогда его реакция направлена от стержня к телу $(\overline{R}_A, \overline{R}_B)$, так и растянут, тогда его реакция направлена в сторону от тела к стержню $(\overline{R}_C)$.

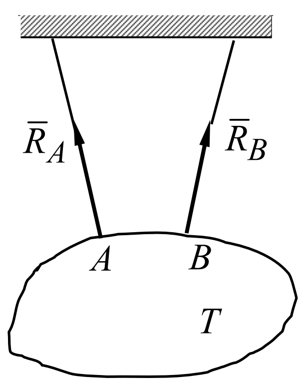


Рис. 2.9

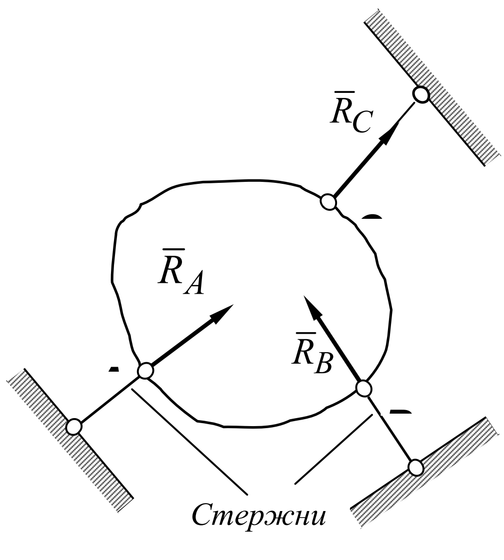


Рис. 2.10

7. *Жесткая заделка* (рис. 2.11).

Конец балки AB жестко заделан в стену. При нагрузке на балку в заделке возникают реакции, состоящие из реакции заделки $\overline{R}_A$ и пары с реактивным моментом заделки m_A. Так как направление реакции заделки $\overline{R}_A$ неизвестно, ее обычно раскладывают по двум взаимно ортогональным направлениям:

$$\overline{R}_A = \overline{X}_A + \overline{Y}_A .$$

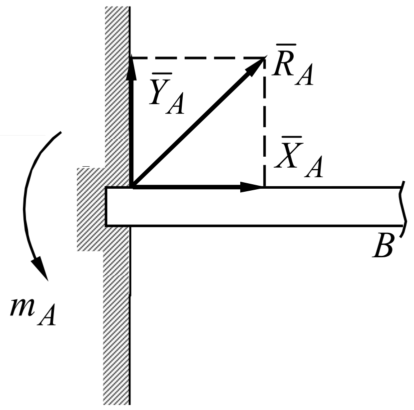


Рис. 2.11

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте первую аксиому статики.
2. Изменится ли состояние равновесия тела, если силы, приложенные к нему перенести вдоль линий их действия в другие точки тела?
3. В чём заключается аксиома параллелограмма сил?
4. Определите модуль равнодействующей двух равных по модулю сил $F_1 = F_2 = 2$ Н, приложенных в одной точке и образующих между собой прямой угол.
5. Какое тело называется несвободным?
6. Что называется связью?
7. В чём заключается аксиома освобождаемости от связей?
8. Как должна быть направлена реакция невесомого шарнирно-закрепленного стержня?
9. Чему равно количество неизвестных составляющих реакции цилиндрической шарнирно-неподвижной опоры?
10. Чему равно количество неизвестных составляющих реакции жесткой заделки?

Лекция № 3
ТЕОРИЯ ПАР

Для решения основной задачи статики – определения условий равновесия твердых тел, находящихся под действием системы сил,– необходимо ввести понятия моментов силы.

Момент силы относительно точки

Пусть на твердое тело в точке A действует сила $\overline{F}$. Выберем произвольную точку пространства O и укажем линию действия силы $\overline{F}$ (рис. 3.1).

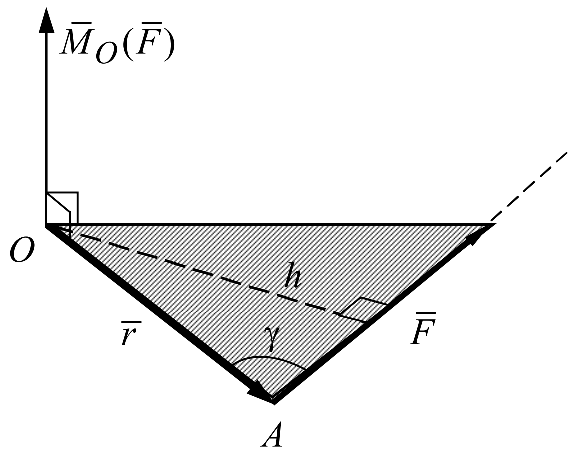


Рис. 3.1

Точка O и линия действия силы определяют в пространстве плоскость. Заштрихуем ее. Восстановим перпендикуляр к этой плоскости в точке O. Вдоль этой прямой в точке O направим вектор, который обозначим $\overline{m}_O(\overline{F})$, в ту сторону, откуда сила видна, стремящейся повернуть тело, к которому она приложена, против хода часовой стрелки. Опустим из точки O перпендикуляр h на линию действия силы и введем модуль вектора $\overline{m}_O(\overline{F})$ так, чтобы он равнялся $F \cdot h$, где h назовем плечом силы относительно точки O.

Определение. *Моментом силы относительно произвольной точки пространства O называют вектор, построенный в точке O перпендикулярно к плоскости, содержащей силу и точку O, направленный в ту сторону, откуда сила видна, стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки и равной по величине произведению модуля силы на ее плечо.* Момент силы относительно точки характеризует её вращательное действие.

Вектор $\overline{m}_O(\overline{F})$ зависит как от самой силы $\overline{F}$, так и от выбора точки *O*. Это связанный с точкой *O* вектор, единицей измерения модуля которого в системе СИ является Н·м = кг· м^2/с^2.

Способ отыскания момента силы относительно точки

Найдем формулу, выражающую вектор $\overline{m}_O(\overline{F})$. Рассмотрим векторное произведение $\overline{r}\times\overline{F}$. По определению векторного произведения векторы $\overline{r}\times\overline{F}$ (рис. 3.2) и $\overline{m}_O(\overline{F})$ совпадают по направлению.

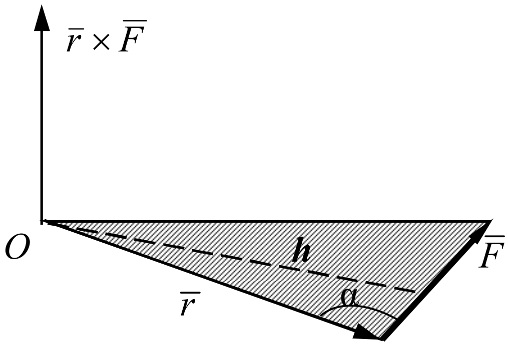


Рис. 3.2

Определим модуль вектора $\overline{r}\times\overline{F}$:

$\left|\overline{r}\times\overline{F}\right| = \left|\overline{F}\right|\cdot\left\|\overline{r}\right\|\cdot\sin\left(\overline{F},\overline{r}\right) = F\cdot r\cdot\sin\alpha = F\cdot h$.

Таким образом, векторы $\overline{r}\times\overline{F}$ и $\overline{m}_O(\overline{F})$ совпадают по величине и по направлению:

$$\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{r}\times\overline{F} \qquad (3.1)$$

Момент силы относительно произвольной точки пространства O равен векторному произведению радиуса-вектора точки приложения силы относительно точки O на саму силу.

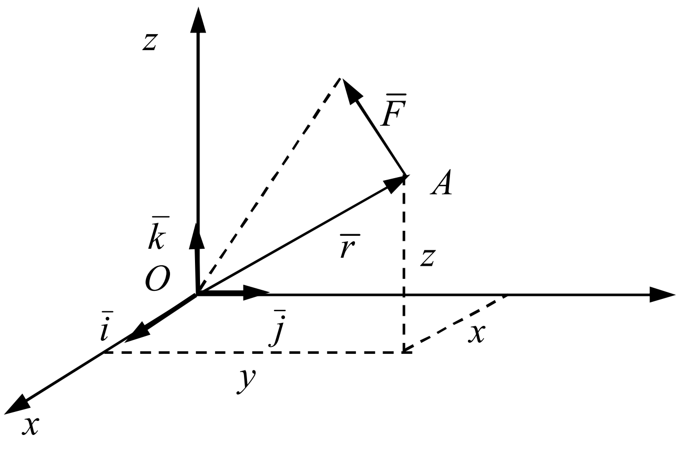


Рис. 3.3

Вспомним из векторной алгебры, как можно представить векторное произведение, если заданы векторы $\overline{r}$ и $\overline{F}$. В декартовой системе координат с началом в точке *O* (рис. 3.3) представим векторы:

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k},$$

$$\overline{F} = F_x\overline{i} + F_y\overline{j} + F_z\overline{k}.$$

Тогда векторное произведение равно:

$$\overline{m}_O(\overline{F}) = \overline{r}\times\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\overline{i} + (zF_x - xF_z)\overline{j} + \qquad (3.2)$$

$$+ (xF_y - yF_x)\overline{k}.$$

В формуле (3.2) коэффициенты при ортах $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - это проекции момента силы на оси *x, y, z*:

$$m_{Ox} = yF_z - zF_x,$$
$$m_{Oy} = zF_x - xF_z, \qquad (3.3)$$
$$m_{Oz} = xF_y - yF_x.$$

Значит, можно найти модуль момента:

$$m_O(\bar{F}) = \sqrt{\left(m_{Ox}(\bar{F})\right)^2 + \left(m_{Oy}(\bar{F})\right)^2 + \left(m_{Oz}(\bar{F})\right)^2}. \qquad (3.4)$$

Чтобы вектор полностью определить, можно найти его направляющие косинусы:

$$\cos(\bar{m}_O(\bar{F}), \bar{i}) = \frac{m_{Ox}(\bar{F})}{m_O(\bar{F})}, \ \cos(\bar{m}_O(\bar{F}), \bar{j}) = \frac{m_{Oy}(\bar{F})}{m_O(\bar{F})},$$

$$\cos(\bar{m}_O(\bar{F}), \bar{k}) = \frac{m_{Oz}(\bar{F})}{m_O(\bar{F})}. \qquad (3.5)$$

***Некоторые свойства момента силы относительно точки*:**

1) момент силы относительно точки не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия;

2) момент силы относительно точки равен нулю, когда а) $F = 0$; б) $h = 0$, т. е. когда точка O расположена на линии действия силы.

Момент силы относительно оси

Пусть даны сила $\bar{F}$ и ось l. На оси возьмем произвольную точку O и проведем через нее перпендикулярную оси l плоскость П. Найдем проекцию силы $\bar{F}$ на эту плоскость и опустим перпендикуляр $h_П$ на линию действия этой проекции.

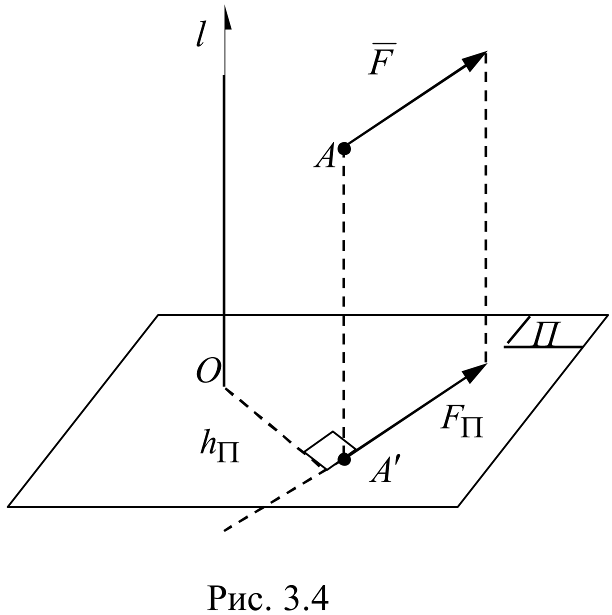


Рис. 3.4

Определение. *Момент силы* $\bar{F}$ *относительно оси l, обозначаемый* $m_l(\bar{F})$, *- это скалярная величина, равная произведению модуля проекции силы* $\bar{F}_П$ (рис.3.4) *на плоскость П, перпендикулярную оси l, на плечо* $h_П$ *этой проекции относительно точки O пересечения оси и плоскости. Момент берётся со знаком плюс при стремлении силы повернуть тело, к которому она приложена, против хода часовой стрелки, если смотреть* *с конца оси, и со знаком минус − в противоположном случае:*

$$\boxed{m_l(\overline{F}) = \begin{cases} +F_{\Pi} \cdot h_{\Pi} \\ -F_{\Pi} \cdot h_{\Pi} \end{cases}} \qquad (3.6)$$

Из формулы (3.6) видно, что момент силы относительно оси равен нулю, если либо сила параллельна оси $(\overline{F}_{\Pi} = 0)$, либо сила пересекает ось $(h_{\Pi} = 0)$.

Связь между моментами силы относительно оси и произвольной точки этой оси

Пусть даны сила $\overline{F}$ и ось *l*. Возьмем произвольную точку *O* на оси *l* и найдем вектор $\overline{m}_O(\overline{F})$ (рис. 3.5). Обозначим γ угол, который составляет вектор $\overline{m}_O(\overline{F})$ с осью *l*. Возьмем другую точку O' на оси *l* и проведём через нее плоскость П, перпендикулярную оси *l*. Спроектируем силу $\overline{F}$ на плоскость П. Из геометрии известно, что если нормали к двум плоскостям составляют угол γ, то и плоскости составляют этот угол и для площадей треугольников справедлива формула:

$$S_{\Delta O'ab} = S_{\Delta OAB} \cos\gamma . \qquad (3.7)$$

В формуле (3.7):

$$S_{\Delta O'ab} = F_{\Pi} \cdot h_{\Pi} / 2, \quad S_{\Delta OAB} = \left|\overline{m}_O(\overline{F})\right| / 2.$$

Следовательно,

$m_l(\overline{F}) = \left|m_O(\overline{F})\right| \cdot \cos\alpha$ или

$$m_l(\overline{F}) = m_{Ol}(\overline{F}) .$$

Полученная в конце формула показывает, что *момент силы относительно оси равен проекции на эту ось момента силы относительно любой точки этой оси.*

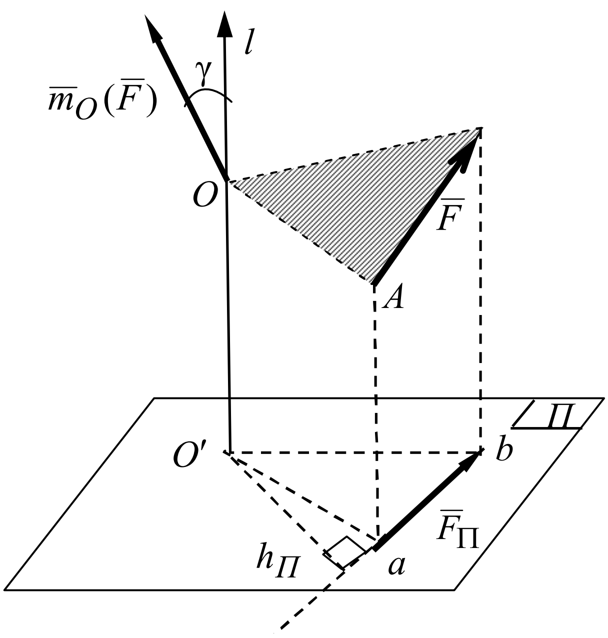


Рис. 3.5

Главный вектор системы сил

Пусть дана система сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n)$.

Определение. *Главным вектором системы сил называется вектор, равный геометрической сумме векторов всех сил системы*:

$$\overline{R}^{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \,. \tag{3.8}$$

Главный вектор не является силой. Это свободный вектор, полученный формальным сложением, перенесенных в любую точку векторов сил системы (рис. 3.6).

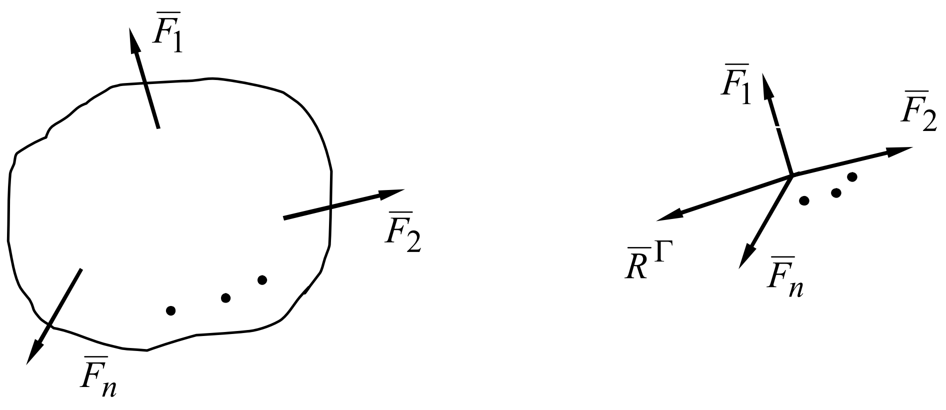


Рис. 3.6

Способ нахождения главного вектора системы сил

Выберем некоторую систему координат *Oxyz*. По отношению к этой системе координат силы можно разложить по ортам $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\overline{F}_k (F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}), \ \ k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\overline{F}_k = F_{kx}\bar{i} + F_{ky}\bar{j} + F_{kz}\bar{k} \,. \tag{3.9}$$

По определению:

$$\overline{R}^{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = \bar{i} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} + \bar{j} \sum_{k=1}^{n} F_{ky} + \bar{k} \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \,. \tag{3.10}$$

С другой стороны:

$$\overline{R}^{\Gamma} = R_x^{\Gamma}\bar{i} + R_y^{\Gamma}\bar{j} + R_z^{\Gamma}\bar{k} \,. \tag{3.11}$$

Сравнивания формулы (3.10) и (3.11), определяем проекции главного вектора системы сил на оси *Ox*, *Oy*, *Oz*:

$$R_x^{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}\,,\; R_y^{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}\,,\; R_z^{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}\,.$$

Тогда по модулю:

$$R^{\Gamma} = \sqrt{(R_x^{\Gamma})^2 + (R_y^{\Gamma})^2 + (R_z^{\Gamma})^2}\,. \qquad (3.12)$$

Направление главного вектора системы сил определяется направляющими векторами:

$$\cos(\overline{R}^{\Gamma},\bar{i}) = \frac{R_x^{\Gamma}}{R^{\Gamma}},\; \cos(\overline{R}^{\Gamma},\bar{j}) = \frac{R_y^{\Gamma}}{R^{\Gamma}},\; \cos(\overline{R}^{\Gamma},\bar{k}) = \frac{R_z^{\Gamma}}{R^{\Gamma}}\,. \qquad (3.13)$$

Главный вектор всегда можно найти, в отличие от равнодействующей.

Пример.

Силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ не пересекаются в одной точке, следовательно, не эквивалентны одной силе, т. е. равнодействующей.

Главный вектор $\overline{R}^{\Gamma} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$ можно взять в любой точке, например *O* (рис. 3.7).

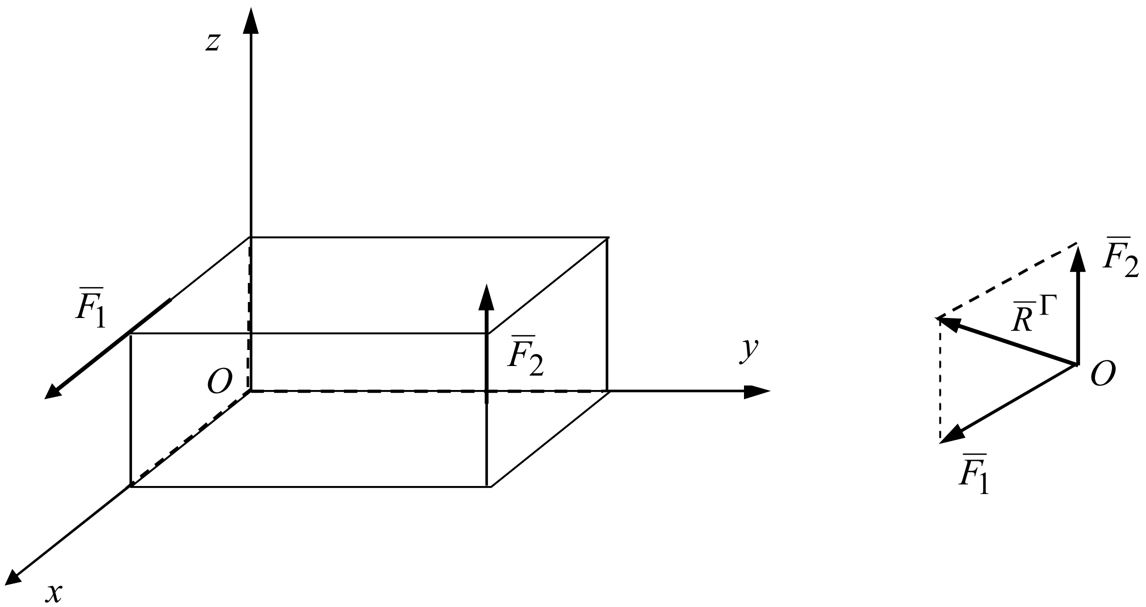


Рис. 3.7

Главный момент системы сил

Пусть имеем систему сил, действующую на материальный объект $(F_1, F_2, ..., F_n)$. Выберем также произвольную, фиксированную точку *O*.

Определение. *Главным моментом системы сил относительно некоторой точки O является приложенный в этой точке вектор, равный* *геометрической сумме моментов всех сил системы относительно этой точки*

$$\overline{M}_O^{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_k). \tag{3.14}$$

Способ вычисления главного момента системы сил

В точке O выберем систему координат (рис. 3.8). Разложим силы и главный момент системы сил относительно точки O по ортам:

$$\overline{F}_k = F_{kx}\bar{i} + F_{ky}\bar{j} + F_{kz}\bar{k}, \; k = 1,2...,n.$$

$$\overline{M}_O^{\Gamma} = M_x^{\Gamma}\bar{i} + M_y^{\Gamma}\bar{j} + M_z^{\Gamma}\bar{k}. \tag{3.15}$$

По определению:

$$\overline{M}_O^{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times \overline{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ F_{kx} & F_{ky} & F_{kz} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (y_k F_{kz} - z_k F_{ky})\bar{i} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} (z_k F_{kx} - x_k F_{kx})\bar{j} + \sum_{k=1}^{n} (x_k F_{ky} - y_k F_{kx})\bar{k}. \tag{3.16}$$

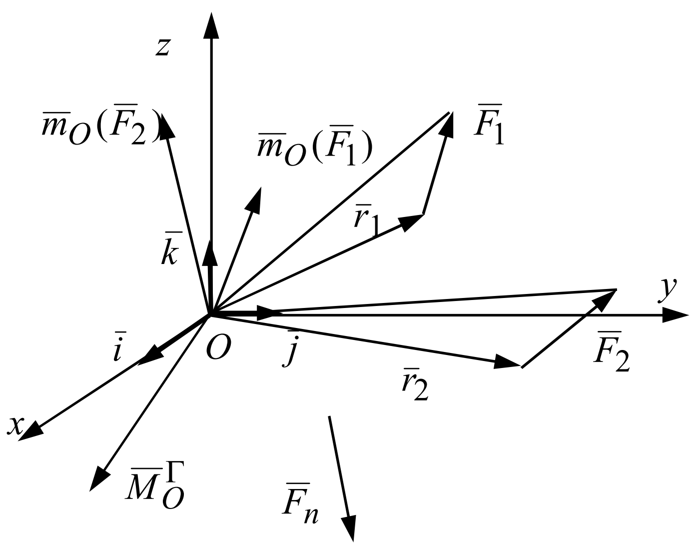


Рис. 3.8

Сравнивая формулы (3.17) и (3.18), получим:

$$M_x^{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n} (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}),$$

$$M_y^{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n}(z_k F_{kx} - x_k F_{kz}),$$

$$M_z^{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n}(x_k F_{ky} - y_k F_{kx}).$$

Тогда модуль главного момента системы сил равен:

$$M_O^{\Gamma} = \sqrt{(M_x^{\Gamma})^2 + (M_y^{\Gamma})^2 + (M_x^{\Gamma})^2}\ .$$

Направление главного момента определится направляющими косинусами:

$$\cos(\overline{M}_O^{\Gamma}, \bar{i}) = \frac{M_x^{\Gamma}}{M_O^{\Gamma}}, \quad \cos(\overline{M}_O^{\Gamma}, \bar{j}) = \frac{M_y^{\Gamma}}{M_O^{\Gamma}}, \quad \cos(\overline{M}_O^{\Gamma}, \bar{k}) = \frac{M_z^{\Gamma}}{M_O^{\Gamma}}.$$

Главный момент системы сил существенным образом зависит от выбора точки *O,* в отличие от главного вектора, который от выбора точки *O* не зависит.

Пара сил. Момент пары

Определение. *Парой сил называется совокупность двух равных по величине, параллельных и противоположно направленных сил* (рис. 3.9).

Плоскость П, проходящая через линии действия сил пары, называется плоскостью действия пары. Расстояние *h* между силами пары называется плечом пары.

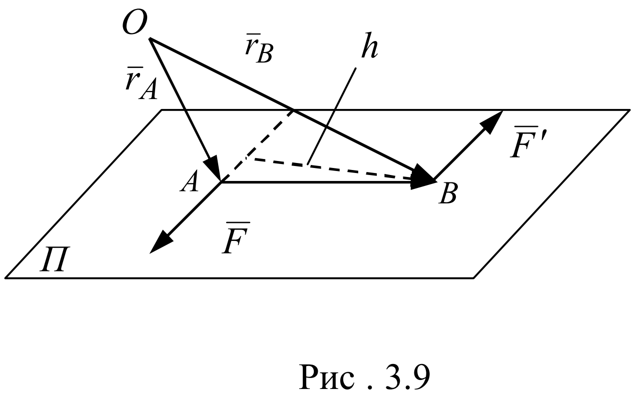


Рис . 3.9

Найдем главный вектор и главный момент пары:

$$\overline{R}^{\Gamma} = \overline{F} + \overline{F}' = \overline{F} - \overline{F} = 0\,.$$

Выберем произвольную точку пространства *O* (рис. 3.9). По определению главного момента:

$$\overline{M}_O^{\Gamma}=\overline{m}_O(\overline{F})+\overline{m}_O(\overline{F}')=\overline{r}_A\times\overline{F}+\overline{r}_B\times\overline{F}'==\overline{r}_A\times\overline{F}-\overline{r}_B\times\overline{F}=$$
$$=(\overline{r}_A-\overline{r}_B)\times\overline{F}=\overrightarrow{BA}\times\overline{F}=\overline{m}_B(\overline{F})=(-\overrightarrow{BA})\times(-\overline{F})=\overrightarrow{AB}\times\overline{F}'=\overline{m}_A(\overline{F}'). \tag{3.19}$$

Вывод: *Главный момент пары сил не зависит от выбора точки О, является свободным вектором и равен моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы пары. Он называется моментом пары и обозначается* $\overline{M}(\overline{F},\overline{F}')$.

$$\overline{M}(\overline{F},\overline{F}')=\overline{m}_B(\overline{F})=\overline{m}_A(\overline{F}'),\ \overline{M}(\overline{F},\overline{F}')\perp\text{пл. П.}$$

По модулю:

$$\left|\overline{M}(\overline{F},\overline{F}')\right|=\left|\overline{m}_B(\overline{F})\right|=\left|\overline{m}_A(\overline{F}')\right|=F\cdot h\,.$$

Таким образом, для этой простейшей системы сил главный вектор равен нулю, а главный момент относительно любой точки равен моменту пары. Момент пары определяет действие пары на тело и является свободным вектором, направленным перпендикулярно плоскости действия пары. Из доказанного выше следуют некоторые преобразования пар, не изменяющие момента пары.

Свойства пар сил

1. Пару, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно переносить в теле куда угодно в плоскости действия пары.
2. У пары, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно произвольно менять модули сил и длину плеча, сохраняя ее момент.
3. Пару, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно перенести в теле из данной плоскости в любую другую плоскость, параллельную данной.

Теорема эквивалентности пар

Для эквивалентности двух пар необходимо и достаточно, чтобы их моменты были равны.

Теорема доказывается на основании перечисленных свойств пар. Путем переноса одной из пар в плоскость действия другой пары, перенося пару в этой плоскости и путем изменения её плеча, пары с одинаковыми моментами могут быть преобразованы одна в другую. Это и доказывает теорему.

Теорема сложения пар

Система, состоящая из нескольких пар $(\overline{F}_1,\overline{F}_1')$, $(\overline{F}_2,\overline{F}_2')$, ..., $(\overline{F}_n,\overline{F}_n')$ *эквивалентна одной паре* $(\overline{F}_1,\overline{F}_1')$, *момент которой равен геометрической сумме моментов заданных пар*:

$$(\overline{F}_1,\overline{F}_1') \sim (\overline{F}_1,\overline{F}_1',\overline{F}_2,\overline{F}_2',...,\overline{F}_n,\overline{F}_n'),$$

$$\overline{M}(\overline{F}\ ,\overline{F}') = \sum_{k=1}^{n} m_k(\overline{F}_k,\overline{F}_k').$$

Докажем теорему для двух пар с моментами $\overline{m}_1$ и $\overline{m}_2$, лежащих в плоскостях I и II (рис. 3.10).

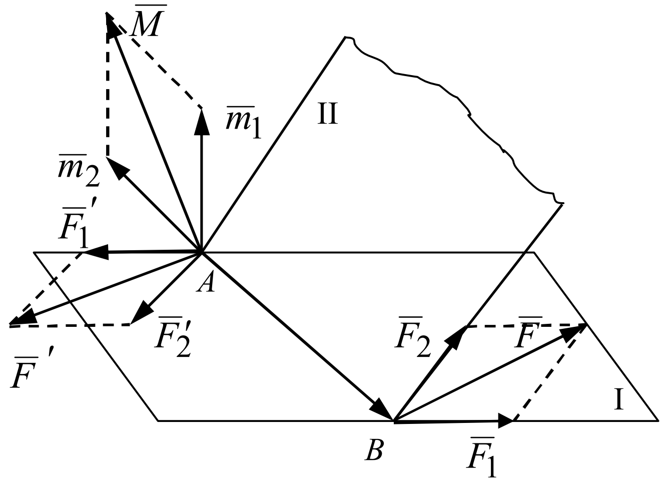


Рис.3.10

Доказательство. Возьмем на линии пересечения плоскостей отрезок $AB = d$ и изобразим пару с моментом $\overline{m}_1$ силами $\overline{F}_1,\overline{F}_1'$, а пару с моментом $\overline{m}_2$ – силами $\overline{F}_2,\overline{F}_2'$. Сложив силы в точках A и B, убеждаемся, что пары $\overline{F}_1,\overline{F}_1'$ и $\overline{F}_2,\overline{F}_2'$ действительно эквивалентны одной паре $\overline{F},\overline{F}'$. Найдем момент этой пары. Так как $\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$, то $\overline{M} = \overrightarrow{AB}\times\overline{F} = \overrightarrow{AB}\times\overline{F}_1 + \overrightarrow{AB}\times\overline{F}_2$ и следовательно $\overline{M} = \overline{m}_1 + \overline{m}_2$.

Последовательно применяя результат, полученный для двух пар, найдем, что данная система пар будет эквивалентна одной паре с моментом:

$$\overline{M} = \overline{m}_1 + \overline{m}_2 + ... + \overline{m}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_k.$$

Условие равновесия пар

Для того чтобы система пар сил составляла уравновешенную систему, необходимо и достаточно, чтобы момент результирующей пары равнялся нулю:

$$\overline{M} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_k = 0,$$

так как если $M = F \cdot h = 0$, то либо $F = 0$, либо плечо пары $h = 0$ и силы пары будут противоравными. Тогда на основании аксиомы А1 они составят уравновешенную систему сил. И наоборот, если силы, составляющие пары уравновешены, то на основании аксиомы А1 они являются противоравными и плечо пары $h = 0$. Следовательно, $M = F \cdot h = 0$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение момента силы относительно точки.
2. Каковы свойства момента силы относительно точки?
3. Как определить момент силы относительно оси?
4. Что называется главным вектором системы сил?
5. Перечислите свойства пар сил.
6. Сформулируйте теорему о сложении пар.
7. Приведите условия равновесия пар сил.

Лекция № 4
ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ

Элементарные преобразования системы сил

Элементарными преобразованиями системы сил являются присоединение к ней или отбрасывание двух противоравных сил, перенос сил вдоль линий их действия, сложение и разложение сил по аксиоме А3.

***Свойства элементарных преобразований*:**

1. Элементарные преобразования переводят систему сил в другую систему, ей эквивалентную.
2. Элементарные преобразования не меняют векторные характеристики системы сил (главного вектора и главного момента системы сил) ни для какой точки.

Рассмотрим две вспомогательные теоремы, при доказательстве которых применяется метод Пуансо.

Теорема о параллельном переносе силы

Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя оказываемого ею действия, переносить из данной точки в любую другую *точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится.*

Доказательство. Пусть в точке *A* к телу приложена сила $\overline{F}$ (рис. 4.1, *а*)

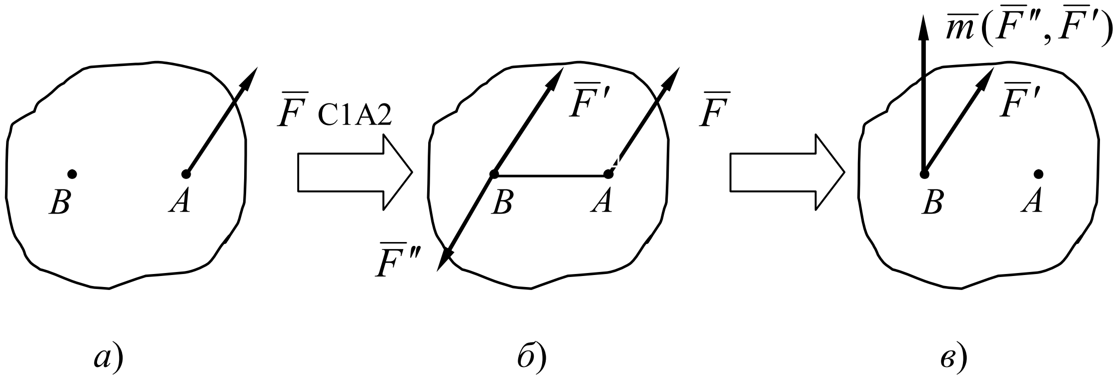


Рис. 4.1

На основании следствия С1 приложим в точке *B* систему противоравных сил $(\overline{F}', \overline{F}'')$ (рис. 4.1, *б*), где $\overline{F}' = \overline{F}$. Тогда система сил $(\overline{F}, \overline{F}'')$ составляет пару с моментом $\overline{m}(\overline{F}'', \overline{F}') = \overline{m}_B(\overline{F})$, а сила $\overline{F}' = \overline{F}$ (рис. 4.1, *в*). Таким образом, $\overline{F} \sim (\overline{F}, \overline{F}', \overline{F}'') \sim (\overline{F}$, пара $\overline{F}, \overline{F}''$). Теорема доказана.

Теорема о приведении системы сил к силе и паре

Любую систему сил, приложенную к твердому телу, элементарными преобразованиями можно привести к одной силе, равной главному вектору $\overline{R}^{\Gamma}$ системы сил и приложенной в произвольно выбранной точке О, и к паре, момент которой равен главному моменту $\overline{M}_O^{\Gamma}$ данной системы сил относительно точки О.

Доказательство. Пусть на твердое тело действует произвольная система сил $(\overline{F}_1', \overline{F}_2', ..., \overline{F}_n')$ (рис.4.2, *а*).

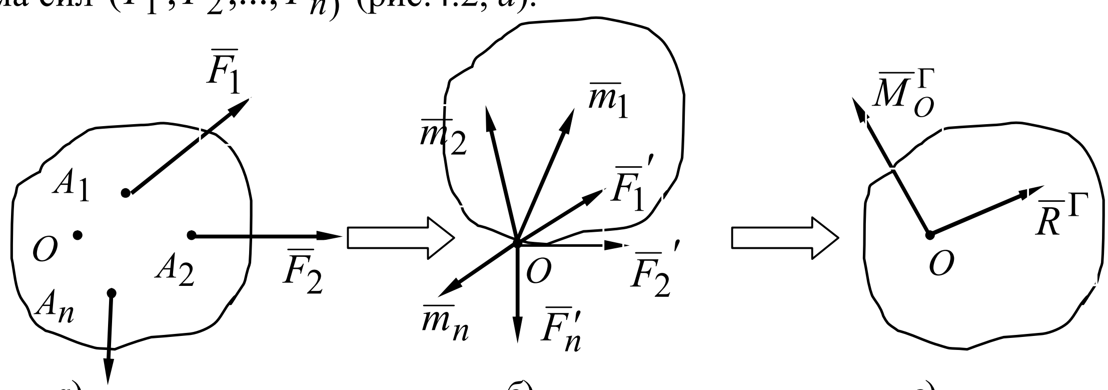


Рис. 4.2

Выберем какую-нибудь точку *O* за центр приведения и, пользуясь приведённой выше теоремой, перенесем все силы в центр *O*, присоединяя при этом соответствующие пары. Тогда на тело будут действовать система сил $(\overline{F}_1', \overline{F}_2', ..., \overline{F}_n')$, приложенная в точке *O*, и система пар, моменты которой равны: $\overline{m}_1 = \overline{m}_O(\overline{F}_1)$, $\overline{m}_2 = \overline{m}_O(\overline{F}_2), ...,$ $\overline{m}_n = \overline{m}_O(\overline{F}_n)$. Сходящие силы по аксиоме А3 заменим одной силой, которая по определению равна главному вектору (рис. 4.2, *в*)

$$\overline{R}^{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k' = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k.$$

Чтобы сложить пары, нужно сложить моменты этих пар (рис. 4.2, *в*). В результате получим главный момент системы сил по определению: $\overline{M}_O^{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_k)$. Таким образом,

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \sim (\overline{F}_1', \overline{F}_2', ..., \overline{F}_n', \overline{m}_1, \overline{m}_2, ..., \overline{m}_n) \sim (\overline{R}^{\Gamma}, \overline{M}_O^{\Gamma}) \qquad (4.1)$$

Теорема доказана.

Примечание. Значение $\overline{R}^{\Gamma}$ от выбора центра *O* не зависит, значение же $\overline{M}_O^{\Gamma}$ при изменении центра *O* может в общем случае измениться.

Частные случаи

1. Если $\overline{R}^{\Gamma} = 0$, $\overline{M}_O^{\Gamma} \neq 0$, то система сил приводится к одной паре с моментом $\overline{M}_O^{\Gamma}$. В этом случае значение $\overline{M}_O^{\Gamma}$ не зависит от выбора центра *O* (иначе одна и та же система сил заменяется разными, не эквивалентными парами).

2. Если $\overline{R}^{\Gamma} \neq 0$, $\overline{M}_O^{\Gamma} = 0$, то система сил приводится к одной силе, т.е. к равнодействующей, приложенной в центре *O*.

3. При $\overline{R}^{\Gamma} \neq 0$, $\overline{M}_O^{\Gamma} \neq 0$, $\overline{R}^{\Gamma} \perp \overline{M}_O^{\Gamma}$ система сил приводится к равнодействующей $\overline{R}$, причем $\overline{R} = \overline{R}^{\Gamma}$, но линия действия равнодействующей отстоит от центра приведения *O* на расстоянии $h = \dfrac{M_O^{\Gamma}}{R^{\Gamma}}$.

Общий случай приведения системы сил

$\overline{R}^{\Gamma} \neq 0$, $\overline{M}_O^{\Gamma} \neq 0$, угол между главным вектором и главным моментом $\alpha \neq 90^{\circ}$. Если разложить вектор главного момента $\overline{M}_O^{\Gamma} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2$, где вектор $\overline{M}_1 \perp \overline{R}^{\Gamma}$, а вектор $\overline{M}_2$ направлен вдоль главного вектора, то система сил, как и в предыдущем случае, сводится к одной силе $\overline{R}$, отстоящей от точки O на расстоянии $h = \dfrac{M_1}{R^{\Gamma}} = \dfrac{M_O^{\Gamma} \sin\alpha}{R^{\Gamma}}$, и к дополнительной паре с моментом $M_2 = M_O^{\Gamma} \cos\alpha$, параллельным силе. Такая система сил называется *силовым винтом.*

Основная теорема статики

Для уравновешенности системы сил необходимо и достаточно, чтобы ее главный вектор и главный момент относительно произвольной точки О равнялись нулю.

Доказательство необходимости.

Дано: $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \sim 0$.

Доказать: $\overline{R}^{\Gamma} = 0$, $\overline{M}_O^{\Gamma} = 0$.

Если какое-то условие не выполняется, например, $\overline{R}^{\Gamma} \neq 0$, то система сил приводится к равнодействующей, и, следовательно, система не является уравновешенной. Если $\overline{M}_O^{\Gamma} \neq 0$, система сил приводится к паре с моментом $\overline{M}_O^{\Gamma}$, и система также не является уравновешенной, что противоречит условию.

Доказательство достаточности.

Дано: $\overline{R}^{\Gamma} = 0$, $\overline{M}_O^{\Gamma} = 0$.

Доказать: $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \sim 0$.

Так как $\overline{R}^{\Gamma} = 0$, то система сил приводится к паре с моментом $\overline{M}_O^{\Gamma}$, а так как и $\overline{M}_O^{\Gamma} = 0$, то система сил находится в равновесии. Теорема доказана.

Скалярная форма условия равновесия

На основании основной теоремы статики имеем:

1) $\overline{R}^{\Gamma} = 0 \Rightarrow R^{\Gamma} = \sqrt{(\overline{R}_x^{\Gamma})^2 + (\overline{R}_y^{\Gamma})^2 + (\overline{R}_z^{\Gamma})^2} = 0$.

Так как под корнем имеем три неотрицательных выражения, то $\overline{R}^{\Gamma}=0$ только тогда, когда:

$$\begin{cases} R_x^{\Gamma}=\sum\limits_{k=1}^{n}F_{kx}=0; \\ R_y^{\Gamma}=\sum\limits_{k=1}^{n}F_{ky}=0; \\ R_z^{\Gamma}=\sum\limits_{k=1}^{n}F_{kz}=0. \end{cases} \tag{4.2}$$

2) Из второго условия теоремы $\overline{M}_O^{\Gamma}=0$ следует:

$$M_O^{\Gamma}=\sqrt{(M_{Ox}^{\Gamma})^2+(M_{Oy}^{\Gamma})^2+(M_{Oz}^{\Gamma})^2}=0.$$

Аналогично $\overline{M}_O^{\Gamma}=0$ только тогда, когда

$$\begin{cases} M_{Ox}^{\Gamma}=\sum\limits_{k=1}^{n}m_x(\overline{F}_k)=0; \\ M_{Oy}^{\Gamma}=\sum\limits_{k=1}^{n}m_y(\overline{F}_k)=0; \\ M_{Oz}^{\Gamma}=\sum\limits_{k=1}^{n}m_z(\overline{F}_k)=0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Таким образом, для произвольной пространственной системы сил имеем шесть условий равновесия.

Условия равновесия для частных случаев систем сил

1. *Плоская система сил* (рис. 4.3).

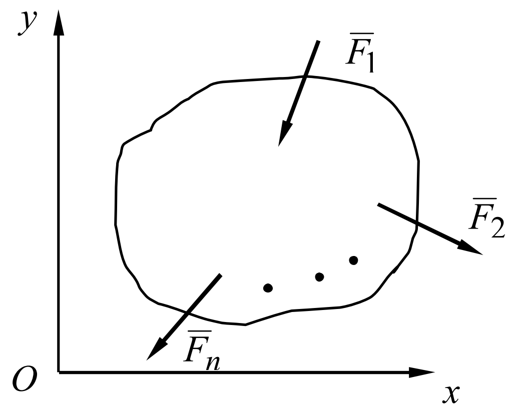


Рис. 4.3

В этом случае все силы, действующие на тело, расположены в одной плоскости. Выберем в этой плоскости оси *Oxy*, относительно которых рассматривается равновесие тела (рис. 4.3). Тогда условия равновесия запишутся в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) = 0. \tag{4.4}$$

Остальные условия равновесия системы (4.2), (4.3) обратятся в тождества 0 ≡ 0. Поскольку все силы расположены в плоскости, перпендикулярной оси z, моменты сил относительно нее определяются по формуле:

$$m_z(\overline{F}) = \begin{cases} +F \cdot h \\ -F \cdot h \end{cases},$$

где h – плечо силы (рис. 4.4).

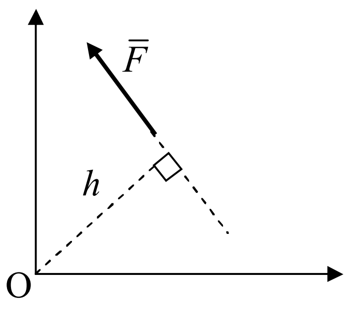


Рис. 4.4

Так как в этом случае направление оси z (она всегда будет направлена на нас) не сказывается на результате, то момент силы относительно оси, перпендикулярной плоскости действия сил, принято называть *алгебраическим моментом относительно точки* пересечения этой оси с плоскостью или просто *моментом силы относительно точки O*:

$$\boxed{m_O(\overline{F}) = \begin{cases} +F \cdot h \\ -F \cdot h \end{cases}} \tag{4.5}$$

Точка O может быть любой точкой плоскости действия сил. Условия (4.4), записанные в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_O(\overline{F}_k) = 0 \tag{4.6}$$

являются основной или первой формой условий равновесия для плоской системы сил. При решении задач статики возможно применение еще двух форм условий равновесия для плоской системы сил.

Вторая форма условий равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_B(\overline{F}_k) = 0,$$

где отрезок AB, соединяющий точки A и B, не должен быть перпендикулярен оси x.

Третья форма условий равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k)=0,\ \sum_{k=1}^{n} m_B(\overline{F}_k)=0,\ \sum_{k=1}^{n} m_C(\overline{F}_k)=0,$$

где точки *A*, *B*, *C* – произвольные точки плоскости действия сил, не лежащие на одной прямой.

2. *Система сходящихся сил*

В этом случае линии действия всех сил, приложенных к твердому телу, пересекаются в одной точке. Выбирая начало координат в этой точке, получим три условия равновесия для сходящейся системы сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}=0,\quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky}=0,\quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz}=0. \tag{4.7}$$

Остальные условия обратятся в тождества $0 \equiv 0$. Если система сходящихся сил лежит в одной плоскости, то для осей *Oxy* получим два условия равновесия:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} F_{kx}=0,\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky}=0.} \tag{4.8}$$

3. *Система параллельных сил*

Направив одну из осей, например *z*, параллельно силам, получим три скалярных условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz}=0,\ \sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k)=0,\ \sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k)=0. \tag{4.9}$$

Остальные условия обратятся в тождества $0 \equiv 0$.

Если среди сил, уравновешенность которых рассматривается, есть неизвестные, то условия равновесия (4.2), (4.3), (4.6)–(4.9) становятся уравнениями равновесия для их определения. При решении задач статики заранее неизвестными величинами всегда являются реакции связей. Очевидно, что для того, чтобы задача статики по определению неизвестных сил при равновесии твердого тела была разрешимой, необходимо, чтобы число уравнений равновесия равнялось числу неизвестных величин. В этом случае задача статики называется *статически определенной*. Задачи, в которых число неизвестных величин больше числа уравнений, называются статически неопределенными. Такими являются задачи по определению реакции связей при наложении лишних связей. Статически неопределенные задачи решаются при изучении дисциплины «Сопротивление материалов».

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите элементарные преобразования системы сил.
2. Сформулируйте теорему о параллельном переносе силы.
3. О чём гласит основная теорема статики?
4. Запишите первую форму условий равновесия для плоской системы сил.
5. Запишите условия равновесия для сходящейся системы сил.

Лекция № 5
ТЕОРЕМА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Пусть имеем две системы сил:

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n),\ (\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \ldots \overline{Q}_n).$$

Теорема. *Для эквивалентности двух систем сил необходимо и достаточно, чтобы были равны их главные векторы и главные моменты относительно любого произвольного центра.*

Представим теорему в виде схемы (см. рис. 5.1).

Условие теоремы		Утверждение теоремы
$\overline{R}^{\Gamma}(\overline{F}) = \overline{R}^{\Gamma}(\overline{Q})$ $\overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{F}) = \overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{Q})$ т.O – произвольная	*Достаточность* $\longrightarrow$ *Необходимость* $\longleftarrow$	$(\overline{F}) \sim (\overline{Q})$

Рис. 5.1

Доказательство необходимости:

Дано: $(\overline{F}) \sim (\overline{Q})$.

Доказать: $\overline{R}^{\Gamma}(\overline{F}) = \overline{R}^{\Gamma}(\overline{Q}),\ \overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{F}) = \overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{Q})$, точка O – произвольная точка пространства.

Из условия $(\overline{F}) \sim (\overline{Q})$ по определению эквивалентности системы сил следует существование такой системы сил $(\overline{G}) = (G_1, G_2, ..., G_l)$, что

$$1)\ (\overline{F}, \overline{G}) \sim 0,$$

$$2)\ (\overline{Q}, \overline{G}) \sim 0.$$

По основной теореме статики из первого условия следует:

$$\begin{cases} \overline{R}^{\Gamma}(\overline{F}, \overline{G}) = 0, \\ \overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{F}, \overline{G}) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Из второго условия следует:

$$\begin{cases} \overline{R}^{\Gamma}(\overline{Q}, \overline{G}) = 0, \\ \overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{Q}, \overline{G}) = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

По определению:

$$\overline{R}^{\Gamma}(\overline{F}, \overline{G}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \overline{G}_k = \overline{R}^{\Gamma}(\overline{F}) + \sum_{k=1}^{l} \overline{G}_k = 0, \tag{5.3}$$

$$\overline{R}^{\Gamma}(\overline{Q}, \overline{G}) = \sum_{k=1}^{m} \overline{Q}_k + \sum_{k=1}^{l} \overline{G}_k = \overline{R}^{\Gamma}(\overline{Q}) + \sum_{k=1}^{l} \overline{G}_k = 0. \tag{5.4}$$

Из формулы (5.3) и (5.4) следует:

$$\begin{cases} \overline{R}^{\Gamma}(\overline{F}) = -\sum_{k=1}^{l} \overline{G}_i, \\ \overline{R}^{\Gamma}(\overline{Q}) = -\sum_{k=1}^{l} \overline{G}_i. \end{cases} \tag{5.5.}$$

Сравнивая формулы (5.5), получим:

$$\boxed{\overline{R}^{\Gamma}(\overline{F}) = \overline{R}^{\Gamma}(\overline{Q}).}$$

Далее аналогично

$$\begin{cases} \overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{F}, \overline{G}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{F}_k) + \sum_{k=1}^{l} \overline{M}_O(\overline{G}_k) = 0 \\ \overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{Q}, \overline{G}) = \sum_{k=1}^{m} \overline{M}_O(\overline{Q}_k) + \sum_{k=1}^{l} \overline{M}_O(\overline{G}_k) = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Из формулы (5.6) следует:

$$\begin{cases} \overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{F}) = -\sum_{k=1}^{l} \overline{M}_O(\overline{G}_k), \\ \overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{Q}) = -\sum_{k=1}^{l} \overline{M}_O(\overline{G}_k). \end{cases} \tag{5.7}$$

Откуда

$$\boxed{\overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{F}) = \overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{Q}).}$$

Доказательство достаточности:

Дано: $\begin{cases} \overline{R}^{\Gamma}(\overline{F}) = \overline{R}^{\Gamma}(\overline{Q}) \\ \overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{F}) = \overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{Q}) \end{cases}$, точка O – произвольная точка пространства.

Доказать: $(\overline{F}) \sim (\overline{Q})$.

Добавим к обеим системам систему сил $(-\overline{F})$ с противоравными системе $(\overline{F})$ силами:

$$(\overline{F}, -\overline{F}) \sim 0,$$

$$(\overline{Q}, -\overline{F}).$$

Найдем главный вектор и главный момент системы сил $(\overline{Q}, -\overline{F})$:

$$\overline{R}^{\Gamma}(\overline{Q}, -\overline{F}) = \sum_{k=1}^{m} \overline{Q}_k + \sum_{k=1}^{m} (-\overline{F}_k) = \overline{R}^{\Gamma}(\overline{Q}) - \sum_{k=1}^{m} \overline{F}_k = \overline{R}^{\Gamma}(\overline{Q}) - \overline{R}^{\Gamma}(\overline{F}) = 0,$$

$$\overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{Q}, -\overline{F}) = \sum_{k=1}^{m} \overline{M}_O(\overline{Q}_k) + \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_O(-\overline{F}_k) = \overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{Q}) - \overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{F}) = 0.$$

На основании основной теоремы статики:

$$(\overline{Q}, -\overline{F}) \sim 0.$$

Но и $(\overline{F}, -\overline{F}) \sim 0$.

Следовательно, по определению эквивалентности систем сил

$$\boxed{(\overline{Q}) \sim (\overline{F}).}$$

Теорема доказана.

На практике при вычислениях моментов сил часто используется *теорема Вариньона*, которая непосредственно следует из теоремы эквивалентности.

Теорема Вариньона

Если система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно произвольной точки (либо оси) равен соответственно геометрической (или алгебраической) сумме моментов сил системы относительно той же точки (либо оси).

Дано: $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \sim \overline{R}$, где $\overline{R}$ – равнодействующая.

Доказать: $\overline{m}_O(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_k)$, точка O – произвольная точка пространства:

$$m_z(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k),$$

где z − неподвижная ось.

Доказательство. Воспользуемся вторым условием эквивалентности систем сил:

$$\overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{F}) = \overline{m}_O(\overline{R}).$$

По определению главного момента системы сил:

$$\overline{M}_O^{\Gamma}(\overline{F}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_k).$$

Следовательно,

$$\overline{m}_O(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_k). \quad (5.8)$$

Проектируя (5.8) на ось z получим:

$$\boxed{m_z(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k).} \quad (5.9)$$

Теорема доказана.

Пример 1.

Определить алгебраический момент силы $\overline{F}$ относительно точки A (рис. 5.2) при заданном угле α и размерах a и b.

Решение. Разложим силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F} = \overline{F}' + \overline{F}''$ (рис. 5.2). Тогда сила $\overline{F}$ будет равнодействующей для составляющих $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$. Следовательно, можно воспользоваться теоремой Вариньона:

$$m_A\overline{F} = m_A(\overline{F}') + m_A(\overline{F}'') = -F'b - F''a,$$

где $F' = F\sin\alpha$, $F'' = F\cos\alpha$ и следовательно,

$$m_A\overline{F} = -Fb\sin\alpha - Fa\cos\alpha.$$

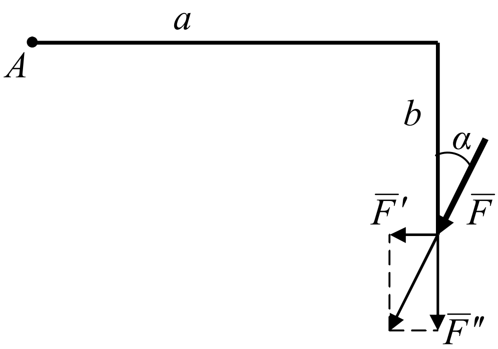


Рис. 5.2

Теорема о трех непараллельных силах

Если под действием трех непараллельных сил твердое тело находится в равновесии, то все силы необходимо пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть даны три непараллельные силы $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3)$. Возьмем точку O, например, на линии действия силы $\overline{F}_3$ (рис. 5.3).

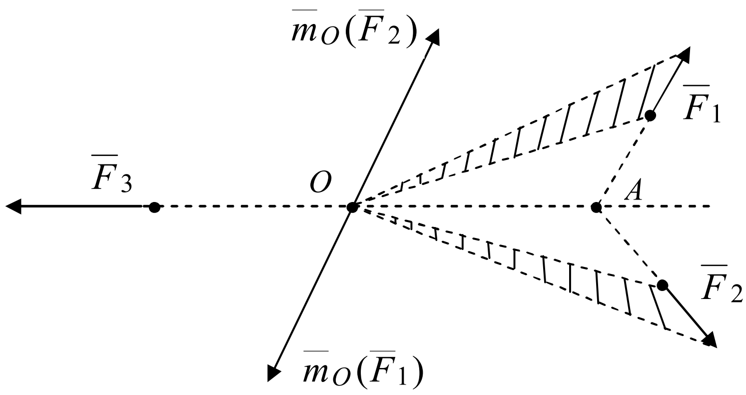


Рис. 5.3

Тогда на основании основной теоремы статики:

$$\overline{m}_O(\overline{F}_1) + \overline{m}_O(\overline{F}_2) + \overline{m}_O(\overline{F}_3) = 0.$$

Так как $\overline{m}_O(\overline{F}_3) = 0$, то $\overline{m}_O(\overline{F}_1) = -\overline{m}_O(\overline{F}_2)$.

Следовательно, силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ лежат в одной плоскости, проходящей через точку *O* и так как они не параллельны, то линии их действия пересекаются, пусть в точке *A*.

Заменив их на равнодействующую $\overline{R}$ по аксиоме А1, получим, что линия действия силы $\overline{F}_3$ должна проходить через точку *A*.

Теорема доказана.

Пример 2.

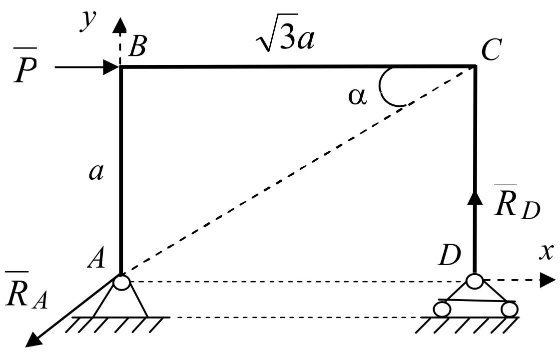


Рис. 5.4

Рама *ABCD*, изображенная на рис. 5.4, концом *A* закреплена на неподвижной опоре цилиндрическим шарниром, а концом *D* положена на подвижный каток. Определить опорные реакции $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_D$, возникающие при действии горизонтальной силы $\overline{P}$, приложенной в точке *B*. Весом рамы пренебречь.

Решение. Рама находится в равновесии под действием трех непараллельных сил $\overline{P}$, $\overline{R}_A$, $\overline{R}_D$. Реакция подвижной опоры $\overline{R}_D$ направлена по нормали к опорной поверхности. Линию действия реакции $\overline{R}_A$ определим из теоремы о трех непараллельных силах, соединив точку *A* с точкой пересечения *C* силы $\overline{P}$ и реакции $\overline{R}_D$.

Определим угол α из прямоугольного треугольника ABC.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \alpha = 30^{\circ}.$$

Зная угол α, реакции опор можно определить геометрически из силового треугольника (рис. 5.5) либо аналитически, составив уравнения равновесия.

Из прямоугольного силового треугольника:

$$R_A = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{2P}{\sqrt{3}},\ R_B = \frac{R_A}{2} = \frac{P}{\sqrt{3}}.$$

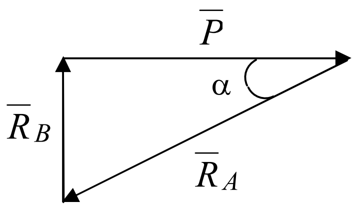


Рис. 5.5

Решим задачу, составив уравнения равновесия для плоской сходящейся системы сил, направив координатные оси согласно рис. 5.2:

$$\begin{aligned} &\sum F_{kx} = -R_A\cos 30^{\circ} + P = 0, \\ &\sum F_{kx} = -R_A\sin 30^{\circ} + R_B = 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Из уравнений (5.10) $R_A = \dfrac{P}{\cos 30^{\circ}} = \dfrac{2P}{\sqrt{3}},\ R_B = \dfrac{R_A}{2} = \dfrac{P}{\sqrt{3}}.$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение эквивалентности двух систем сил.
2. Сформулируйте теорему об эквивалентности.
3. О чём гласит теорема Вариньона?
4. Можно ли теорему Вариньона применить к главному вектору системы сил?
5. Сформулируйте теорему о трёх силах в общем виде.
6. Направление реакции какой опоры можно определить, если к задаче на определение реакций опор применима теорема о трёх силах?

Лекция № 6
РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ С УЧЁТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

Трение скольжения в состоянии покоя

История развития вопросов трения берет начало с работ Леонардо да Винчи. В дальнейшем французские ученые Амонтон (1663−1705) и Кулон (1736−1806) установили экспериментальные законы трения, применяемые в теоретической механике.

Пусть дано тело, которое контактирует с другим телом, являющимся для него связью.

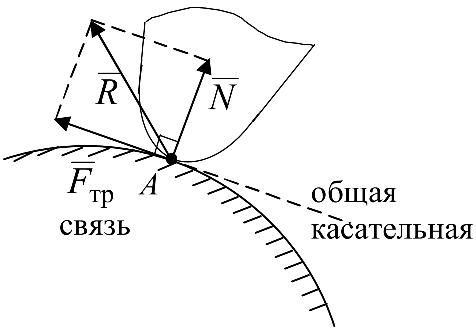


Рис. 6.1

Если связь идеально гладкая, то реакция связи $\overline{N}$ перпендикулярна общей касательной. Если же связь не идеальная, то вследствие сцепления поверхностей возникает сила, препятствующая движению $\overline{F}_{тр}$ (рис. 6.1), и реакция связи $\overline{R}$ будет равна

$$\overline{R} = \overline{N} + \overline{F}_{тр}.$$

Сила $\overline{F}_{тр}$ называется *силой трения.* Рассмотрим пример.

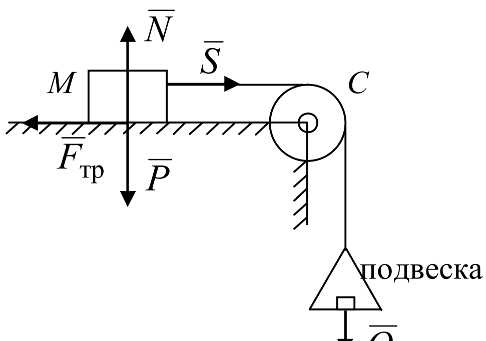


Рис. 6.2

Пример 1. Тяжелое тело *M*, изображенное на рис. 6.2, под действием малого груза $\overline{Q}$ на подвеске будет находиться в покое. Величина натяжения троса S, переброшенного через неподвижный блок *C*, один конец которого прикреплён к тяжелому телу *M*, а другой – к подвеске, равна весу *Q*.

Будем увеличивать вес *Q*. До некоторого момента тело *M* будет находиться в равновесии, т.е. возникает сила $\overline{F}_{тр}$, которая оказывает сопротивление движению. По величине $F_{тр} = S$, и сила трения будет расти до некоторого предельного максимального значения $F_{тр\,\max}$ (когда тело ещё находится в покое), после которого оно придёт в движение. Этот опыт демонстрирует основные *законы трения скольжения*, установленные экспериментально Амонтоном и Кулоном:

1) $0 \le F_{тр} \le F_{тр\,max}$;

2) $F_{тр\,max} = f \cdot N$, где f – коэффициент трения;

3) коэффициент трения зависит лишь от пары взаимодействующих поверхностей тело – связь и от качества обработки их поверхностей. Она не зависит от площади соприкосновения взаимодействующих тел.

Установленные законы представляют некоторую математическую модель взаимодействия негладких тел.

Коэффициент трения для случая покоя и движения различен, и поэтому существуют коэффициент трения скольжения в покое и коэффициент трения скольжения в движении. Обычно коэффициент трения в покое больше коэффициента трения скольжения в движении. Это экспериментально установленный факт.

Решение задач статики с учётом сил трения проводят, чаще всего, рассматривая предельное состояние равновесия, когда сила трения достигает своего максимального значения, которое определяется формулой:

$$F_{тр\,max} = f \cdot N,$$

т.е. если имеем систему сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$~0, в состав которой входят силы трения, то необходимо использовать соотношения $F_{тр\,max_i} = f_i \cdot N_i$. Силы трения скольжения направляют в сторону, противоположную предполагаемому движению.

Угол и конус трения

Рассмотрим случай, когда

$$\overline{F}_{тр} = \overline{F}_{тр\,max}.$$

Тогда угол, составляемый реакцией связи $\overline{R}$ с нормальной составляющей, $\overline{N}$, называется *углом трения*. Из рисунка 6.3 видно, что

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{F_{тр\,max}}{N} = \frac{fN}{N} = f,$$

откуда $\varphi = \mathrm{arctg}\, f$.

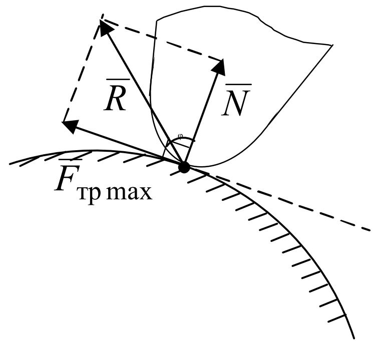


Рис. 6.3

В справочных таблицах задают либо угол трения, либо коэффициент трения для пары тело – связь, определяемые экспериментально.

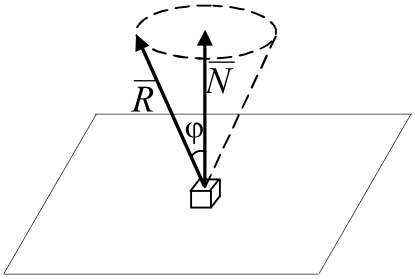


Рис. 6.4

Если пытаться сдвинуть тело на поверхности по всем возможным направлениям, то реакция связи $\overline{R}$ образует *конус трения* (рис. 6.4). Для изотропных материалов конус трения будет круговым. Если равнодейст-вующая всех активных сил будет располагаться внутри конуса трения или на границе, то тело будет находиться в равновесии.

Трение качения

Пусть имеем шероховатую поверхность, на которой расположено тяжелое твёрдое тело весом *P*. Приложим к нему небольшую силу $\overline{Q}$ (рис. 6.5). Возникает сила трения $\overline{F}_{\text{тр}}$.

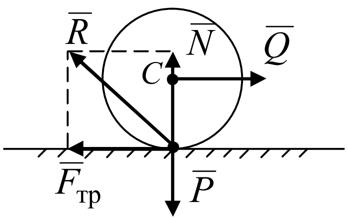


Рис. 6.5

Если сила $\overline{Q}$ небольшая, то тело останется в равновесии. Если увеличивать силу $\overline{Q}$, то при достижении её какого-то значения, тело покатится. Пусть сила $\overline{Q}$ небольшая и тело находится в равновесии $(\overline{P}, \overline{Q}, \overline{N}, \overline{F}_{\text{тр}})$~0. Реакции $\overline{F}_{\text{тр}}$ и $\overline{N}$ можно заменить по аксиоме А3 реакцией $\overline{R}$. Тогда $(\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R})$~0. Тело под действием трёх непараллельных сил находится в равновесии. Но линии действия сил не пересекаются в одной точке. Получаем противоречие теореме о трёх непараллельных силах. Несоответствие теореме здесь можно объяснить тем, что использовали гипотезу о том, что тело и связь являются абсолютно твёрдыми телами.

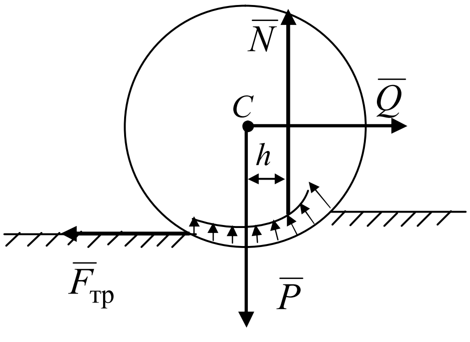


Рис. 6.6

Реально же происходит смятие материала поверхности, причём больше с той стороны, куда пытаются сместить твёрдое тело (рис. 6.6).

В результате равнодействующая реакций связи $\overline{N}$ будет смещаться на расстоянии *h* и будет создавать момент относительно точки *C*, оказывающий сопротивление качению тела $M_{\text{тр}} = h \cdot N$.

В дальнейшем будем пользоваться моделью, когда и тело, и связь являются абсолютно твёрдыми, но к телу будем прикладывать момент трения качения (если есть сила $\overline{Q}$) (рис. 6.7). Вышесказанное сформулируем в виде основных законов трения качения.

Законы трения качения

1) $0 \le M_{\text{тр}} \le M_{\text{тр max}}$.

2) $M_{\text{тр max}} = \delta N$,

где δ – коэффициент трения качения, имеющий размерность длины, является предельным значением величины *h* для данной пары материалов.

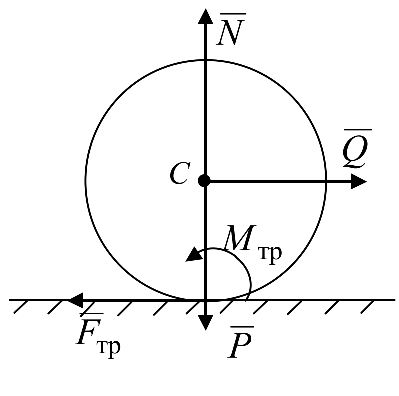


Рис. 6.7

3) Коэффициент трения качения δ зависит от пары материалов и качества обработки их поверхностей. Момент трения качения направлен в сторону, обратную предполагаемому качению тела.

При решении задач статики с учётом сил трения качения чаще всего рассматривают предельные состояния равновесия, когда момент трения качения имеет максимальное значение.

Пример 2. Однородный тяжелый стержень (рис. 6.8) *AB* весом *P* и длиной *l* опирается одним концом *A* на гладкую вертикальную систему, а другим концом *B* на шероховатую вертикальную стенку. Расстояние между стенками $h < l$.

Определить коэффициент трения скольжения *f*, при котором возможно равновесие.

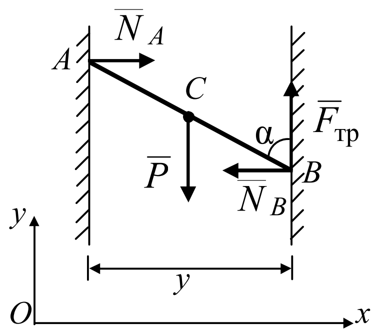


Рис. 6.8

Решение. Освободимся от связей и приложим к стержню реакцию гладкой поверхности $\overline{N}_A$ в точке *A* и реакции $\overline{F}_{\text{тр}}$ и $\overline{N}_B$ в точке *B*. К стержню в центре тяжести *C* приложена также сила тяжести $\overline{P}$. Выберем оси координат *Oxy* и для плоской системы сил составим уравнения равновесия:

1) $\sum\limits_k F_{kx} = N_A - N_B = 0$.

2) $\sum_k F_{ky} = F_{\text{тр}} - P = 0$.

3) $\sum_k m_B(\bar{F}_k) = \dfrac{P \cdot h}{2} - N_A \cdot l \cdot \cos\alpha = 0$.

Добавим к системе уравнений неравенство для силы трения.

4) $F_{\text{тр}} \le fN_B$. (6.1)

Из первых двух уравнений имеем:

$N_A = N_B, \quad F_{\text{тр}} = P$.

Из третьего уравнения получим:

$$N_A = N_B = \frac{P \cdot h}{2l \cdot \cos\alpha}, \tag{6.2}$$

где $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l}$.

Подставим значение N_B по формуле (6.2) в неравенство (6.1):

$$F_{\text{тр}} \le \frac{f \cdot P \cdot h \cdot l}{2l\sqrt{l^2 - h^2}}.$$

Так как $F_{\text{тр}} = P$, то получим $\dfrac{f \cdot P \cdot h}{2\sqrt{l^2 - h^2}} \ge P$,

откуда $f \ge \dfrac{2\sqrt{l^2 - h^2}}{h}$ или $f \ge 2\text{ctg}\alpha$.

Вопросы для самопроверки

1. Запишите формулу для предельной силы трения скольжения.
2. Приведите определение угла трения.
3. Запишите зависимость между углом трения и коэффициентом трения.
4. Что такое конус трения и как его получить?
5. В чем заключается противоречие теореме о трех непараллельных силах при движении тела по шероховатой поверхности?
6. Какой геометрический смысл имеет коэффициент трения качения. В чем измеряется коэффициент трения качения?
7. Сформулируйте законы трения качения.

Лекция № 7

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Центр параллельных сил

Рассмотрим произвольную систему параллельных сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$, приложенных к твердому телу в точках $A_1, A_2, ..., A_n$, имеющих в системе координат $Oxyz$ радиусы-векторы $\overline{r}_1, \overline{r}_2, ..., \overline{r}_n$ (рис. 7.1). Предположим главный вектор $\overline{R}^{\Gamma} = \sum\limits_{s=1}^{n} \overline{F}_s \neq 0$. Так как моменты сил относительно любого общего центра направлены по определению перпендикулярно силам, то $\overline{M}_O^{\Gamma} \perp \overline{R}^{\Gamma}$.

Следовательно, система сил имеет равнодействующую $\overline{R}$.

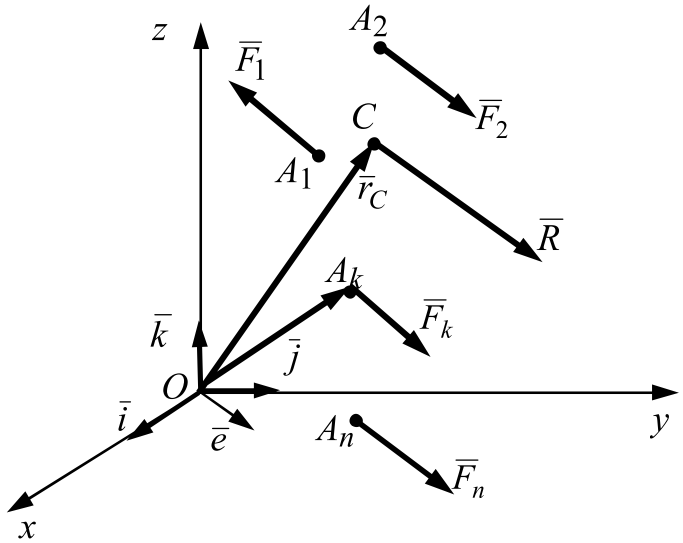


Рис. 7.1

Выберем параллельно силам единичный орт $\overline{e}$. Тогда можно записать:

$$\overline{F}_k = F_k \cdot \overline{e}\,,\ \overline{R} = R \cdot \overline{e}\,,\ k = 1, \ldots, n, \qquad (7.1)$$

где F_k, R – проекции сил $\overline{F}_k$ и $\overline{R}$ на направление $\overline{e}$.

Пусть равнодействующая $\overline{R}$ приложена в точке C. Точка приложения равнодействующей называется центром параллельных сил. Пусть $\overline{r}_C$ – радиус-вектор точки приложения равнодействующей. Получим формулу для его определения. По теореме Вариньона для точки O будем иметь:

$$\overline{r}_C \times \overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k\,. \qquad (7.2)$$

Подставляя формулы (7.1) в (7.2), получим:

$$\bar{r}_C \times (R\bar{e}) = \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times (F_k \bar{e}).$$

Далее, выделяя множитель $\bar{e}$, будем иметь

$$(R\bar{r}_C - \sum_{k=1}^{n} F_k \bar{r}_k) \times \bar{e} = 0. \qquad (7.3)$$

Рассмотрим теперь другие системы параллельных сил, отличающиеся от заданной системы только вектором $\bar{e}$, т.е. систему сил с теми же проекциями F_k и точками приложения A_k, но одинаково повернутые по отношению к силам системы $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n)$. Так как в (7.3) первый множитель не изменится, для того, чтобы условие (7.3) выполнялось при любых направлениях $\bar{e}$, этот первый множитель должен равняться нулю:

$$R\bar{r}_C - \sum_{k=1}^{n} F_k \bar{r}_k = 0, \qquad (7.4)$$

откуда $\bar{r}_C = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} F_k \bar{r}_k}{R}$ или в координатах $x_C = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} F_k x_k}{\sum F_k}$, $y_C = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} F_k y_k}{\sum F_k}$.

Пример 1.

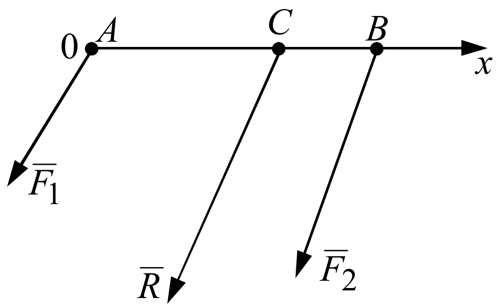


Рис.7.2

Определить центр параллельных сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, направленных в одну сторону (рис. 7.2).

Решение. Проведем через точки приложения сил *A* и *B* ось *x*, совместив ее начало с точкой *A*. Тогда $x_1 = 0$, $x_2 = AB$, $x_C = AC$. По формуле (7.4) для координаты x_C имеем:

$$x_C = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2}. \qquad (7.5)$$

Подставляя в формулу (7.5) значения координат, получим

$$AC = \frac{F_2 \cdot AB}{F_1 + F_2},$$

откуда $F_2 (AB - AC) = F_1 \cdot AC$ или $\dfrac{CB}{AC} = \dfrac{F_1}{F_2}$.

Центр тяжести твердого тела

Рассмотрим твердое тело, считая, что оно расположено около поверхности Земли и его размеры таковы, что силы тяжести отдельных его частиц образуют систему параллельных сил одного направления, которое не изменяется при изменении положения тела относительно Земли.

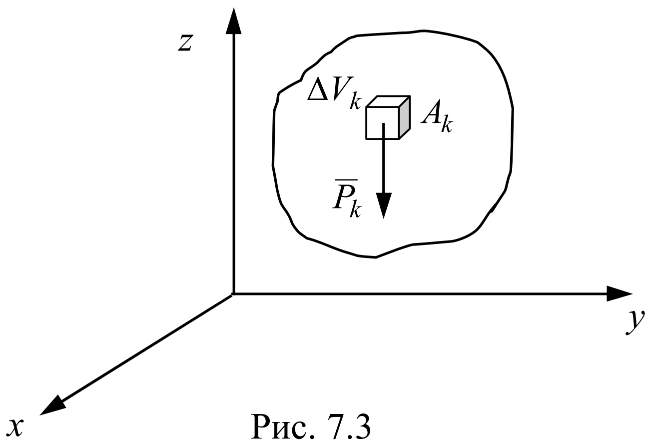


Рис. 7.3

Мысленно разобьем тело на n частей. Будем иметь систему сил тяжести частиц $(\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_k, ..., \overline{P}_n)$ (рис. 7.3), приложенную в центрах $A_k(x_k, y_k, z_k)$ (k = 1, 2,… n) частиц с элементарными объемами ΔV_k.

Центр параллельных сил тяжести частиц C определяется по формуле:

$$\tilde{r}_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} P_k \bar{r}_k}{P}. \qquad (7.6)$$

Аналогично определяются координаты точки C

$$\tilde{x}_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} P_k x_k}{P},\ \tilde{y}_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} P_k y_k}{P},\ \tilde{z}_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} P_k z_k}{P}, \qquad (7.7)$$

где $P = \sum\limits_{k=1}^{n} P_k$ — сила тяжести тела.

Формулы (7.6), (7.7) дают приближенные значения для координат центра тяжести твердого тела. Точные выражения для радиуса-вектора центра тяжести получим, если перейдем к пределу при $n \to \infty$ при одновременном стремлении $P_k \to 0$:

$$\bar{r}_C = \frac{1}{P} \lim_{n\to\infty} P_k \bar{r}_k = \frac{1}{P} \int\limits_{(V)} \bar{r} dP.$$

Соответственно, координаты центра тяжести определяются по формулам:

$$x_C = \frac{1}{P} \int\limits_{(V)} x dP,\ y_C = \frac{1}{P} \int\limits_{(V)} y dP,\ z_C = \frac{1}{P} \int\limits_{(V)} z dP, \qquad (7.8)$$

где интегралы, записанные условно, распространены по объему тела V.

Координаты центров тяжести однородных тел

Величина $\gamma(x,y,z)=\lim\limits_{\Delta V_k\to 0}\dfrac{P_k}{\Delta V_k}=\dfrac{dP}{dV}$, являющаяся функцией координат точек тела, называется *удельным весом тела*. Его размерность $\left[\text{Н/м}^3\right]$.

Если $\gamma=\dfrac{dP}{dV}=\text{const}$, то тело называется *однородным*. В этом случае $P=\gamma\cdot V$ и формулы (7.8) примут вид:

$$x_C=\frac{1}{V}\int\limits_{(V)}xdV,\ y_C=\frac{1}{V}\int\limits_{(V)}ydV,\ z_C=\frac{1}{V}\int\limits_{(V)}zdV. \tag{7.9}$$

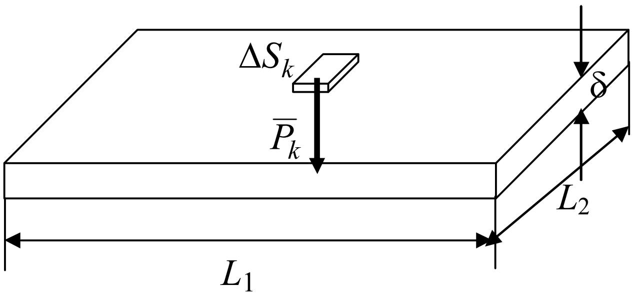


Рис. 7.4

Обычно твердое тело характеризуется тремя размерами. Если один из этих размеров существенно меньше других размеров (рис. 7.4), то тело называется *пластиной* или *оболочкой* $\delta \ll L_1$, $\delta \ll L_2$. Если при этом $\gamma_1=\lim\limits_{\Delta S_k\to 0}\dfrac{P_k}{\Delta S_k}=\dfrac{dP}{dS}=\text{const}$, где ΔS_k – элементарные площади частиц тела, то тело является однородной пластиной, где размерность удельного веса $\gamma_1\left[\dfrac{\text{Н}}{\text{м}^2}\right]$, S – площадь тела.

Координаты центра тяжести при этом определяются по формулам:

$$x_C=\frac{1}{S}\int\limits_{(S)}xdS,\ y_C=\frac{1}{S}\int\limits_{(S)}ydS,\ z_C=\frac{1}{S}\int\limits_{(s)}zdS, \tag{7.10}$$

где интегралы, записанные условно, распространены по площади тела S.

Далее рассмотрим тело, два характерных размера которого, значительно меньше третьего (рис. 7.5) $\delta_1 \ll l$, $\delta_2 \ll l$. Такое тело называется *тяжелой линией*. Если при этом $\gamma_2=\lim\limits_{\Delta l_k\to 0}\dfrac{P_k}{\Delta l_k}=\dfrac{dP}{dl}=\text{const}$, то тело является однородной тяжелой линией. Для

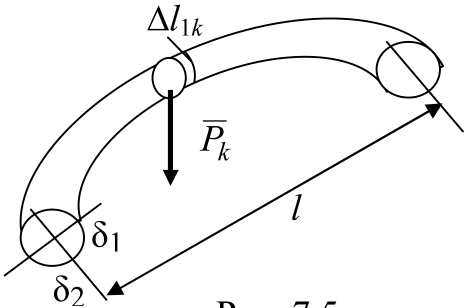


Рис. 7.5

него $P = \gamma_2 \cdot l$, где γ_2 – погонный вес с размерностью $\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}}\right]$, l – длина линии.

Координаты центра тяжести однородной линии определяются формулами:

$$x_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} x dl,\ y_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} y dl,\ z_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} z dl, \tag{7.11}$$

где интегралы берутся вдоль тяжелой линии.

Способы нахождения координат центров тяжести однородных тел

На практике центр тяжести тела часто можно определить с помощью простых методов.

1. *Способ симметрии.* Очевидно, что если однородное твердое тело имеет плоскость материальной симметрии, то центр тяжести тела лежит в этой плоскости. Если однородное тело имеет ось или центр материальной симметрии, то центр тяжести тела находится на оси или в центре симметрии.

2. *Способ разбиения.* Способ основан на разбиении тела на несколько простых тел, положения центров тяжести которых известны или легко определяются, например, по первому способу. Тогда центр тяжести тела определяется по формулам (7.7).

Пример 2.

Дана плоская фигура, верхней границей которой, является ломаная линия (рис. 7.6). Разобьем фигуру на три прямоугольника. Центры тяжести прямоугольников C_1, C_2, C_3 легко определяются. Тогда центр тяжести плоской фигуры определится по формулам:

$$x_C = \frac{\sum S_k x_k}{\sum S_k} = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_1 + S_2 + S_3}.$$

$$y_C = \frac{\sum S_k y_k}{\sum S_k} = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3}.$$

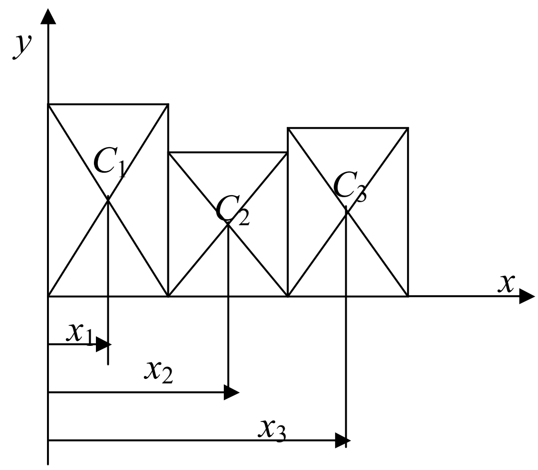


Рис. 7.6

Пример 3.

Определим центр тяжести треугольника (рис. 7.7). Разобьем площадь треугольника на элементарные полоски прямыми, параллельными стороне BD (рис. 7.7). Центры тяжести элементарных полосок будут лежать на медиане AK треугольника. Следовательно, и центр тяжести треугольника должен лежать на медиане AK. Аналогично, разбивая треугольник на элементарные полоски прямыми параллельными сторонам AB и AD, получим, что центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медиан, для которой

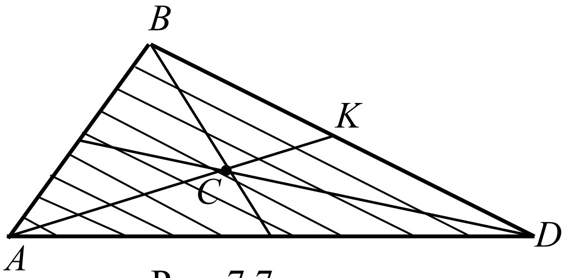


Рис. 7.7

$$CK = \frac{1}{3} AK .$$

3. *Способ дополнения*. Способ применяется для определения центров тяжести тел, имеющих вырезы. Поясним метод на примере.

Пример 4.

Определить центр тяжести квадрата со стороной a и с круглым отверстием радиуса r (рис. 7.8). Плоская фигура имеет ось материальной симметрии, и, следовательно, центр тяжести лежит на оси x.

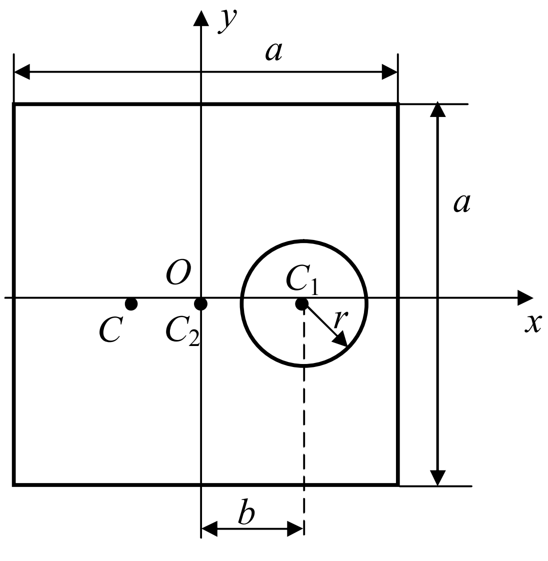


Рис. 7.8

Дополним отверстие кругом площадью $S_2 = \pi r^2$ до полного квадрата площади $S_2 = a^2$, а затем вычтем из полученной площади площадь круга $S = S_2 - S_1 = a^2 - \pi r^2$. Соответствующие координаты центров тяжести равны: $x_1 = b$, $x_2 = 0$. Тогда

$$x_C = \frac{S_2 x_2 - S_1 x_1}{S_2 - S_1} = -\frac{b\pi r^2}{b^2 - \pi r^2} .$$

4. *Способ интегрирования*. Если центр тяжести однородного тела не удается определить перечисленными способами, применяют формулы (7.9) − (7.10).

Пример 5.

Определим центр тяжести дуги окружности радиуса R с центральным углом $2\alpha_1$. Расположим дугу окружности таким образом, чтобы ось Ox была для нее осью симметрии (рис. 7.9). Тогда центр тяжести дуги будет находиться на этой оси. Рассматривая дугу как однородную тяжелую линию, по формуле (7.11) будем иметь:

$$x_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} x dl. \qquad (7.12)$$

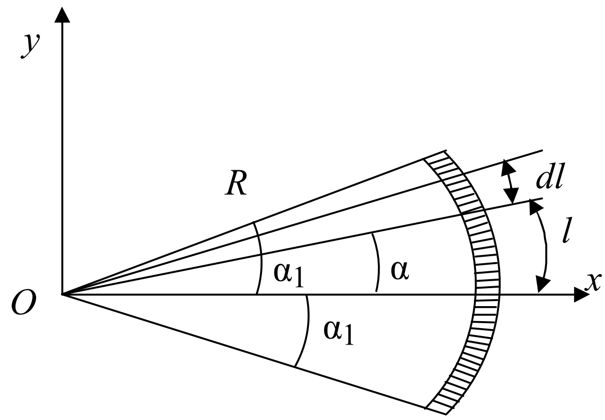


Рис.7.9

Выделим на дуге элемент длиной $dl = Rd\alpha$, положение которого определяется произвольным углом α. Координата элемента дуги dl равна $x = R\cos\alpha$, длина всей дуги $L = 2R\alpha_1$. Подставляя полученные выражения в формулу (7.12), получим:

$$x_C = \frac{1}{R \cdot 2\alpha_1}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} R^2 \cos\alpha d\alpha = \frac{R}{2\alpha_1}\sin\alpha \Bigg|_{-\alpha_1}^{\alpha_1} = \frac{R}{2\alpha_1} 2\sin\alpha_1 = R\frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1}.$$

Таким образом, $x_C = R\dfrac{\sin\alpha_1}{\alpha_1}$.

5. *Экспериментальный способ.* Центры тяжести неоднородных тел сложной формы определяют экспериментально, например, методом подвешивания за разные точки тела. Центр тяжести будет находиться в точке пересечения линий подвеса тела.

Вопросы для самопроверки

1. Каково условие того, что система параллельных сил имеет равнодействующую?

2. Как называется точка, в которой приложена равнодействующая параллельных сил?

3. Запишите формулы, определяющие координаты центра параллельных сил.

4. Перечислите способы определения центра тяжести однородных тел.

5. Запишите формулы, определяющие координаты центров тяжести плоских однородных фигур.

Лекция № 8
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Кинематика изучает движение тел по отношению к системе координат, связанной с другим телом (например, с Землей) с геометрической стороны, без учета причин, вызывающих это движение. При этом движение тел предполагается совершающимся во времени.

Для простоты изучения в кинематике изучается сначала движение одной точки, а затем – движение твердых тел.

Но прежде чем приступить к изучению кинематики точки, рассмотрим понятие производной вектора по скалярному аргументу.

Переменный вектор и его производная по скалярному аргументу

Если каждому значению независимого скалярного переменного u в интервале $b < u < c$ соответствует определенный вектор $\overline{a}$, то будем говорить, что вектор $\overline{a}$ есть непрерывная функция скалярного переменного u:

$$\overline{a} = \overline{a}(u). \tag{8.1}$$

Если вектор $\overline{a}$ при своем изменении сохраняет одно и то же начало (пусть точка O) (рис. 8.1), то уравнение (8.1) определяет движение его конца. Кривая, которую описывает конец вектора, называется годографом переменного вектора.

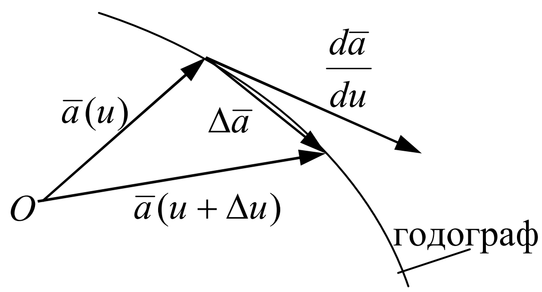


Рис. 8.1

Пусть u − некоторое фиксированное значение аргумента вектора $\overline{a}$, Δu – его приращение, тогда при значении $u + \Delta u$ – будем иметь другой вектор $\overline{a}(u+\Delta u)$.

Разность $\Delta\overline{a} = \overline{a}(u+\Delta u) - \overline{a}(u)$ называется приращением вектора $\overline{a}$. Предел отношения

$$\frac{\Delta\overline{a}}{\Delta u} = \frac{\overline{a}(u+\Delta u) - \overline{a}(u)}{\Delta u}$$

при $\Delta u \Rightarrow 0$, если он существует, называется производной вектора $\overline{a}$ по скалярному аргументу u и обозначается:

$$\frac{d\overline{a}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\overline{a}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\overline{a}(u+\Delta u) - \overline{a}(u)}{\Delta u}.$$

Вектор $\Delta\overline{a}$ всегда направлен по секущей (рис. 8.1). При $\Delta u \Rightarrow 0$ секущая займет предельное положение, совпадающее с касательной к годографу вектора $\bar{a}$. Следовательно, производная вектора по скалярному аргументу всегда направлена по касательной к годографу этого вектора.

Свойства производной вектора по скалярному аргументу

1. $\dfrac{d\bar{a}}{du} = 0$, если $\bar{a} = \overline{\text{const}}$.

2. $\dfrac{d\bar{a}}{du} \perp \bar{a}(u)$, если $|\bar{a}(u)| = \text{const}$, т.е. изменяется только направление вектора в пространстве. Годограф при этом находится на поверхности сферы, а касательная к сфере перпендикулярна ее радиусу.

3. $\dfrac{d}{du}(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}) = \dfrac{d\bar{a}}{du} + \dfrac{d\bar{b}}{du} - \dfrac{d\bar{c}}{du}$.

4. $\dfrac{d}{du}(\lambda(u) \cdot \bar{a}(u)) = \dfrac{d\lambda}{du}\bar{a}(u) + \lambda\dfrac{d\bar{a}}{du}$,

где λ − скалярный коэффициент.

5. $\dfrac{d}{du}(\bar{a}(u) \cdot \bar{b}(u)) = \dfrac{d\bar{a}(u)}{du}\bar{b}(u) + \bar{a}(u)\dfrac{d\bar{b}(u)}{du}$.

6. $\dfrac{d}{du}(\bar{a}(u) \times \bar{b}(u)) = \dfrac{d\bar{a}(u)}{du} \times \bar{b}(u) + \bar{a}(u) \times \dfrac{d\bar{b}(u)}{du}$.

Пусть вектор $\bar{a}$ задан в неподвижной прямоугольной системе координат (рис. 8.2).

Тогда

$$\bar{a} = a_x(u)\bar{i} + a_y(u)\bar{j} + a_z(u)\bar{k}, \tag{8.2}$$

где a_x, a_y, a_z − проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси, а $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ − орты этих осей.

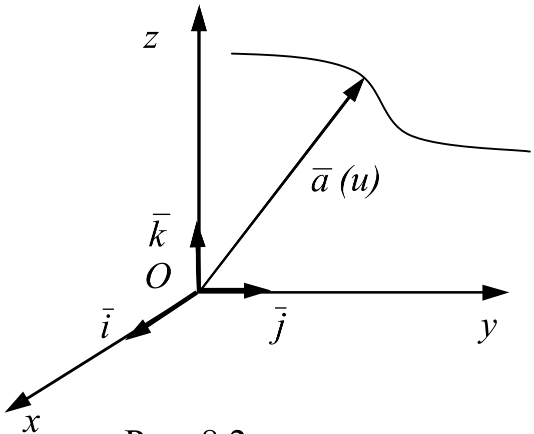


Рис. 8.2

Так как $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ − постоянные векторы, то

$$\frac{d\bar{a}}{du} = \frac{da_x}{du}\bar{i} + \frac{da_y}{du}\bar{j} + \frac{da_z}{du}\bar{k}. \tag{8.3}$$

С другой стороны, вектор $\dfrac{d\bar{a}}{du}$ можно также записать через его проекции:

$$\frac{d\bar{a}}{du} = \left(\frac{d\bar{a}}{du}\right)_x \bar{i} + \left(\frac{d\bar{a}}{du}\right)_y \bar{j} + \left(\frac{d\bar{a}}{du}\right)_z \bar{k}. \tag{8.4}$$

Сравнивая формулы (8.3) и (8.4), получим:

$$\left(\frac{d\bar{a}}{du}\right)_x = \frac{da_x}{du},\ \left(\frac{d\bar{a}}{du}\right)_y = \frac{da_y}{du},\ \left(\frac{d\bar{a}}{du}\right)_z = \frac{da_z}{du}. \tag{8.5}$$

Таким образом, доказали:

проекция производной вектора на неподвижное направление равна производной от проекции вектора на соответствующее направление.

Перейдем к изучению кинематики точки.

Основные задачи кинематики точки

Кинематика точки рассматривает две основные задачи.

1. Задача задания движения точки. Движение точки в пространстве считается заданным, если найден способ, при помощи которого каждому моменту времени t однозначно ставится в соответствие положение точки в пространстве.

2. Задача определения кинематических характеристик движения точки – скорости точки и ускорения точки.

Существует три способа задания движения точки: *векторный, координатный и естественный.*

Векторный способ задания движения точки

Рассмотрим движение материальной точки M относительно некоторого тела, которое считается неподвижным. Пусть O – точка принадлежащая этому телу (рис. 8.3). Радиус-вектор $\bar{r}$ движущейся точки M относительно точки O можно задать как вектор-функцию времени t:

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{8.6}$$

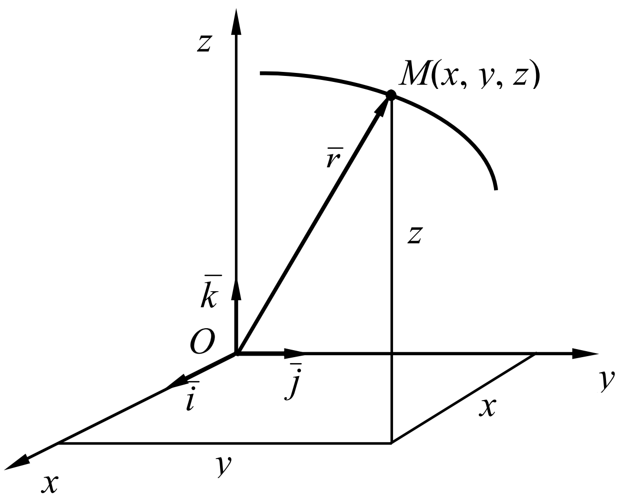


Рис. 8.3

Равенство (8.6) называется *векторным уравнением движения точки* или *законом движения точки в векторной форме.*

Кривая, по которой движется точка в пространстве, называется *траекторией точки*. Траектория – это годограф радиус-вектора точки.

Координатный способ задания движения точки

Пусть теперь вектор $\bar{r}(t)$ задан в декартовой системе координат, а $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ − орты осей *Ox*, *Oy*, *Oz*. Тогда вектор-функция $\bar{r}(t)$ может быть задана тремя скалярными функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\,j + z(t)\bar{k}\,.$$

Таким образом, для того, чтобы движение точки было задано координатным способом, должны быть заданы функции:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \; z = z(t). \tag{8.7}$$

Равенства (8.7) называются *уравнениями движения точки* или *законом движения точки в координатной форме.*

Естественный способ задания движения точки

Этот способ применяется в случае, когда траектория точки известна заранее. Траектория точки может быть задана различными способами: словесно (например, можно сказать, что траекторией точки является окружность такого-то радиуса), графически в каком-либо масштабе или уравнениями, например, в общем виде как линия пересечения поверхностей

$$F_1(x, y, z) = 0\,,\; F_2(x, y, z) = 0$$

или другими уравнениями.

Для задания закона движения точки по траектории необходимо выбрать на траектории точку M_0, принимаемую за начало отсчета дуговой координаты, и задать положительное направление отсчета (рис. 8.4).
При движении точки *M* расстояние от нее до начальной точки изменяется с течением времени, следовательно, дуговую координату необходимо задать как функцию времени:

$$s = s(t). \tag{8.8}$$

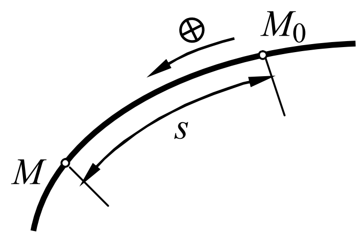


Рис. 8.4

Зависимость (8.8) называется *законом движения точки.* Следовательно, для того, чтобы движение точки было задано естественным способом, должны быть заданы:

1) траектория точки;
2) закон движения точки $s = s(t)$,
3) начало отсчета M_0;
4) положительное направление отсчета дуги s.

При этом нужно отличать дугу s и пройденный точкой путь. Если точка движется по траектории все время в одном направлении, то дуга и путь совпадают. Но если, например, закон движения точки равен $s = a\sin t$ и точка совершает гармонические колебания по кривой, то дуга и путь совпадают только до достижения дуги своего максимального значения a. Далее путь в отличие от дуги будет все время увеличиваться.

Пример 1.

Определить траекторию точки, если движение точки задано уравнениями

$$x = 2t^2 - 3t + 1, \qquad y = 4t^2 - 6t - 2. \tag{8.9}$$

Решение. Уравнения движения (8.9) являются также уравнениями траектории точки, заданной в параметрическом виде, где параметром является время t. Избавимся от параметра t. Из уравнений (8.9) видно, что коэффициенты при t^2 и t слагаемых правых частей уравнений пропорциональны. Следовательно, домножая первое уравнение на два и вычитая из него второе уравнение, получим:

$$2x - y = 4.$$

Таким образом, траекторией точки является прямая $y = 2x - 4$.

Пример 2.

Определить траекторию точки, если движение точки задано уравнениями

$$x = 2\cos\frac{\pi t}{3}, \quad y = 3\sin\frac{\pi t}{3}. \tag{8.10}$$

Решение. Чтобы избавиться от параметра t в уравнениях (8.10), выполним следующие математические преобразования. Разделим первое уравнение на два, а второе на три:

$$\frac{x}{2} = \cos\frac{\pi t}{3}, \quad \frac{y}{3} = \sin\frac{\pi t}{3}.$$

Затем возведем каждое уравнение в квадрат и сложим полученные уравнения. Учитывая, что $\sin^2\frac{\pi t}{3} + \cos^2\frac{\pi t}{3} = 1,$ получим $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Следовательно, траекторией точки является эллипс с центром в начале координат и полуосями $a = 2$, $b = 3$.

Вопросы для самопроверки

1. Какие основные задачи решает кинематика точки?
2. Что называется производной переменного вектора по скалярному аргументу?
3. Перечислите свойства производной вектора по скалярному аргументу.
4. Какие способы задания движения точки существуют?
5. В чём заключается векторный способ задания движения точки?

6. Запишите уравнения движения точки при координатном способе задания её движения.

7. Как определить траекторию точки при координатном способе задания её движения?

8. В чём заключается естественный способ задания движения точки?

Лекция № 9
СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

Скорость точки

Пусть движение точки задано векторным способом $\bar{r} = \bar{r}(t)$. На рис. 9.1 M и M_1 – положения движущейся точки в моменты времени t и $t + \Delta t$.

Вектор $\Delta\bar{r} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)$ называется вектором перемещения точки за время Δt. Отношение вектора $\Delta\bar{r}$ к промежутку времени Δt называется средней скоростью точки за промежуток времени Δt:

$$\bar{V}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}.$$

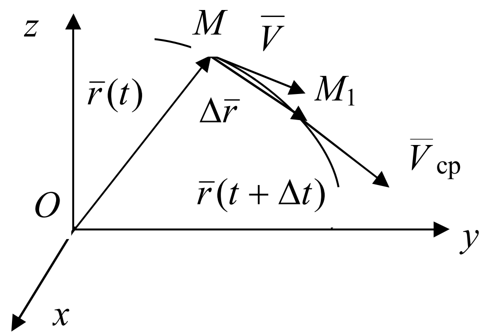


Рис. 9.1

Скоростью точки в данный момент времени называется предел отношения вектора перемещения точки к промежутку времени, за который произошло это перемещение, при стремлении последнего к нулю, т.е.

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \tag{9.1}$$

Таким образом, *скорость точки в данный момент времени равна производной радиуса-вектора точки по времени*

$$\boxed{\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}.} \tag{9.2}$$

Скорость точки – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения радиус-вектора точки и направленная по касательной к траектории в сторону движения точки. Единицей измерения скорости в системе СИ является м/с.

Ускорение точки

Пусть теперь известна функция $\overline{V} = \overline{V}(t)$. На рис. 9.2 $\overline{V}(t)$ и $\overline{V}(t+\Delta t)$ – векторы скорости движущейся точки в моменты t и Δt. Чтобы получить приращение вектора скорости $\Delta\overline{V}$ перенесем параллельно вектор $\overline{V}(t+\Delta t)$ в точку M:

$$\Delta\overline{V} = \overline{V}(t+\Delta t) - \overline{V}(t).$$

Средним ускорением точки за промежуток времени Δt называется отношение приращения вектора скорости $\Delta\overline{V}$ к промежутку времени Δt:

$$\overline{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\overline{V}}{\Delta t}.$$

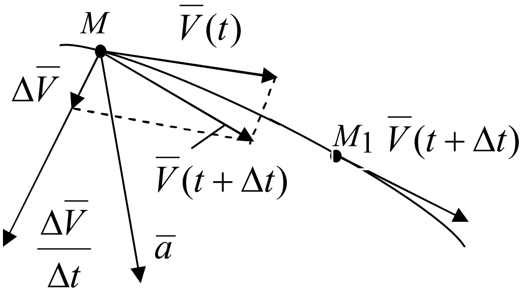


Рис. 9.2

Ускорением $\overline{a}$ точки в данный момент времени называется предел отношения приращения скорости $\Delta\overline{V}$ к приращению времени Δt при стремлении последнего к нулю, т.е.

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{V}}{\Delta t} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}.$$

Следовательно, *ускорение точки в данный момент времени равно первой производной по времени от вектора скорости точки или второй производной радиус-вектора по времени*:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}. \tag{9.3}$$

Ускорение точки – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения вектора скорости по времени.

Построим годограф скорости (рис. 9.3). Годографом скорости по определению является кривая, которую вычерчивает конец вектора скорости при движении точки, если вектор скорости откладывается из одной и той же точки.

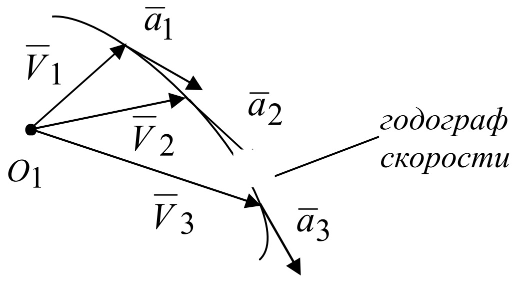


Рис. 9.3

Очевидно, что скорость точки, вычерчивающей годограф скорости, будет равна ускорению точки при ее движении по траектории.

Единицей измерения ускорения в системе СИ является м/с^2.

Определение скорости точки при координатном способе задания её движения

Пусть движение точки задано координатным способом в декартовой системе координат:

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),$$

Радиус-вектор точки равен:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\,.$$

Так как единичные векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ постоянны, то по определению:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}\,. \tag{9.4}$$

Обозначим проекции вектора скорости на оси Ox, Oy и Oz через V_x, V_y, V_z соответственно и разложим вектор скорости по осям:

$$\bar{V} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}. \tag{9.5}$$

Сравнивая равенства (9.4) и (9.5), получим

$$\boxed{V_x = \frac{dx}{dt},\ V_y = \frac{dy}{dt},\ V_z = \frac{dz}{dt}} \tag{9.6}$$

В дальнейшем, следуя Ньютону, производную по времени будем обозначать точкой сверху, т.е.:

$$V_x = \dot{x},\ V_y = \dot{y},\ V_z = \dot{z}\,.$$

Модуль скорости точки определяется формулой:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\,. \tag{9.7}$$

Направление вектора скорости определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\bar{V},\bar{i}) = \frac{V_x}{V},\ \cos(\bar{V},\bar{j}) = \frac{V_y}{V},\ \cos(\bar{V},\bar{k}) = \frac{V_z}{V}.$$

Определение ускорения точки при координатном способе задания её движения

Вектор скорости в декартовой системе координат равен:

$$\bar{V} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}\,.$$

По определению

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\bar{i} + \frac{dV_y}{dt}\bar{j} + \frac{dV_z}{dt}\bar{k} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}\,. \tag{9.8}$$

Обозначим проекции вектора ускорения на оси Ox, Oy и Oz через a_x, a_y, a_z соответственно и разложим вектор скорости по осям:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}. \qquad (9.9)$$

Сравнивая равенства (9.8) и (9.9), получим:

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}, \; a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}, \; a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}. \qquad (9.10)$$

Модуль вектора ускорения точки вычисляется аналогично модулю вектора скорости точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \qquad (9.11)$$

а направление вектора ускорения – направляющими косинусами:

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{a}, \; \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{a_y}{a}, \; \cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{a_z}{a}.$$

Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания движения точки

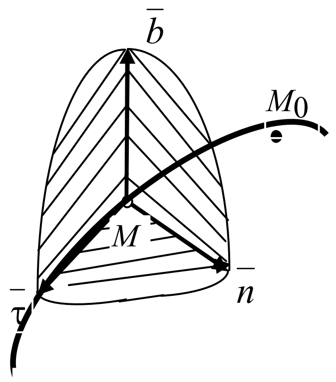


Рис.9.4

При этом способе используются естественные оси с началом в текущем положении точки M на траектории (рис. 9.4) и единичными векторами $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$. Единичный вектор $\bar{\tau}$ направлен по касательной к траектории в сторону положительного отсчета дуги, единичный вектор $\bar{n}$ направлен по главной нормали траектории в сторону ее вогнутости, единичный вектор $\bar{b}$ направлен по бинормали к траектории в точке M.

Орты $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$ лежат в *соприкасающейся плоскости*, орты $\bar{n}$ и $\bar{b}$ – в *нормальной плоскости*, орты $\bar{\tau}$ и $\bar{b}$ – в *спрямляющей плоскости*.

Полученный трехгранник называется *естественным.*

Пусть задан закон движения точки $s = s(t)$.

Радиус-вектор $\bar{r}$ точки M относительно какой–либо фиксированной точки будет сложной функцией времени $\bar{r}(t) = \bar{r}(s(t))$.

Из дифференциальной геометрии известны формулы Серре–Френе, устанавливающие связи между единичными векторами естественных осей и вектор–функцией кривой

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}, \; \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\bar{n}, \qquad (9.12)$$

где ρ – радиус кривизны траектории.

Используя определение скорости и формулы Серре–Френе, получим:

$$\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\overline{\tau}. \tag{9.13}$$

Обозначая проекцию скорости на касательную V_τ и учитывая, что вектор скорости направлен по касательной, имеем:

$$\overline{V} = V_\tau \overline{\tau}. \tag{9.14}$$

Сравнивая равенства (9.13) и (9.14), получим формулы для определения вектора скорости по величине и направлению:

$$V_\tau = \dot{s},\ V = |V_\tau|,\ \overline{V} = V_\tau \overline{\tau}. \tag{9.15}$$

Величина V_τ положительна, если точка M движется в положительном направлении отсчета дуги s и отрицательна в противоположном случае.

Используя определение ускорения и формулы Серре–Френе, получим:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V_\tau \cdot \overline{\tau}) = \frac{dV_\tau}{dt} \cdot \overline{\tau} + V_\tau \frac{d\overline{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \cdot \overline{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \cdot \overline{n}. \tag{9.16}$$

Обозначим проекцию ускорения точки $\overline{a}$ на касательную $\overline{\tau}$, главную нормаль и бинормаль a_τ, a_n, a_b соответственно.

Тогда ускорение равно:

$$\overline{a} = a_\tau \cdot \overline{\tau} + a_n \cdot \overline{n} + a_b \cdot \overline{b} \tag{9.17}$$

Из формул (9.16) и (9.17) следует, что вектор ускорения всегда лежит в соприкасающейся плоскости и раскладывается по направлениям $\overline{\tau}$ и $\overline{n}$:

$$\overline{a} = a_\tau \cdot \overline{\tau} + a_n \cdot \overline{n}$$

Сравнивая формулы (9.16) и (9.17), получим:

$$a_\tau = \dot{V}_\tau, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}. \tag{9.18}$$

Проекция ускорения на касательную $a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}$ называется *касательным* или *тангенциальным ускорением*. Оно характеризует изменение величины скорости.

Проекция ускорения на главную нормаль $a_n = \frac{V^2}{\rho}$ называется *нормальным ускорением*. Оно характеризует изменение вектора скорости по направлению.

Модуль вектора ускорения равен $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Если V_τ и a_τ одного знака, то движение точки будет ускоренным.

Если V_τ и a_τ разных знаков, то движение точки будет замедленным.

Частные случаи движения точки

О характере движения точки судят по значениям касательного и нормального ускорений. Рассмотрим следующие случаи.

1. *Равномерное криволинейное движение*

$$\boxed{a_\tau \equiv 0.}$$

В этом случае касательное ускорение в течение рассматриваемого промежутка времени равно нулю, и из его определения следует, что величина скорости будет постоянной. Поскольку нормальное ускорение в этом случае не равно нулю, то из определения нормального ускорения следует, что направление вектора скорости будет изменяться и, следовательно, точка будет двигаться криволинейно равномерно. Определим закон движения точки в этом случае.

Пусть $s\big|_{t=0} = s^0, \quad V_\tau\big|_{t=0} = V_\tau^0$.

Тогда из $\dfrac{dV_\tau}{dt} = 0$ следует

$$V_\tau = \text{const} = V_\tau^0.$$

Учитывая, что $V_\tau = \dfrac{ds}{dt} = V_\tau^0$, разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\int\limits_{s_0}^{s} ds = \int\limits_{t_0}^{t} V_\tau^0 dt,$$

откуда $\boxed{s = s_0 + V_\tau^0 t\,.}$

Таким образом, если движение точки равномерное, то дуговая координата изменяется по линейному закону.

2. *Равномерное прямолинейное движение*

$$\boxed{a_\tau \equiv 0, \quad a_n \equiv 0\,.}$$

В этом случае, так как $a_n \equiv 0$, движение точки является прямолинейным, а так как $a_\tau \equiv 0$, то оно является и равномерным. Это единственное движение, при котором полное ускорение равно нулю $a \equiv 0$.

3. *Равнопеременное движение*

$$\boxed{a_\tau \equiv \text{const} = a_\tau^0\,.}$$

В этом случае величина касательного ускорения в течение рассматриваемого промежутка времени постоянна. Следовательно, $\dfrac{dV_\tau}{dt} = a_\tau^0$. Определим закон движения точки.

Разделяя переменные и интегрируя $\int\limits_{V_0}^{V} dV_\tau = \int\limits_{0}^{t} a_\tau^0 dt$,

получим:

$$V_\tau = V_\tau^0 + a_\tau^0 t\,, \quad \text{или} \quad \frac{ds}{dt} = V_\tau^0 + a_\tau^0 t\,.$$

Снова разделяя переменные и интегрируя $\int\limits_{s_0}^{s} ds = \int\limits_{t_0}^{t} (V_\tau^0 + a_\tau^0) dt$,

получим закон равнопеременного движения точки:

$$\boxed{s = s_0 + V_\tau^0 t + a_\tau^0 t^2.}$$

При этом, если $a_\tau \cdot V_\tau > 0$ (т.е. a_τ и V_τ одного знака), то движение будет равноускоренным. Если $a_\tau \cdot V_\tau < 0$ (т.е. a_τ и V_τ разного знака), то движение будет равнозамедленным.

Пример 1.

Определить скорость точки через одну секунду после начала движения, если движение точки задано уравнениями

$$x = 2\cos\frac{\pi t}{6}, \qquad y = \sin\frac{\pi t}{6}.$$

Решение. По формулам (9.4) определим проекции вектора скорости на координатные оси:

$$V_x = \dot{x} = -\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{6}, \quad V_y = \dot{x} = \frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi t}{6}.$$

Вычислим значения проекций скорости через одну секунду:

$$V_x = -\frac{\pi}{6} = -52, \qquad V_y = \frac{\sqrt{3}\pi}{12} = 0{,}45.$$

Модуль скорости определим по формуле (9.16):

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 0{,}69\,\text{м/с}.$$

Пример 2.

Определить ускорение точки через 2 с после начала движения, если точка движется по окружности радиуса 4 м по закону $s(t) = 2 - 4t + 3t^2$ (м).

Решение. Определим проекцию скорости на касательную к траектории по формуле (9.15):

$$V_\tau = \dot{s} = -4 + 6t.$$

Значение проекции скорости через две секунды равно $V_\tau = 8$. Следовательно, скорость точки в данный момент времени равна $V = 8$ м/с. Касательное и нормальное ускорения вычислим по формулам (9.18). Касательное ускорение точки будет постоянным и равно $a_\tau = \dot{V}_\tau = 6$. Нормальное ускорение точки равно $a_n = \dfrac{V^2}{R} = 16$. Полное ускорение точки вычислим по формуле $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 17{,}9$ м/с^2.

Вопросы для самопроверки

1. Как определяются скорость и ускорение точки?
2. Запишите формулу для определения скорости и ускорения точки при координатном способе задания её движения.
3. Запишите формулы для определения скорости и ускорения точки при естественном способе её задания.
4. Чему равно касательное ускорение точки при криволинейном равномерном движении точки?

Лекция № 10
КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Абсолютно твердым телом или неизменяемой системой называется механическая система, расстояния между точками которой неизменны при любых движениях.

Основными задачами кинематики твердого тела являются:

1) задача задания движения тела;

2) задача определения кинематических характеристик твердого тела – угловой скорости и углового ускорения тела;

3) задача определения кинематических характеристик отдельных точек тела – задача распределения скоростей и ускорений.

Первая задача кинематики твердого тела

Движение твердого тела будет заданным, если имеется способ определения положения любой его точки в любой момент времени относительно некоторой системы отсчета. Для этого нет необходимости задавать движение каждой его точки, поскольку координаты точек твердого тела связаны соотношениями неизменности расстояний между ними. Для свободного твердого тела достаточно задать шесть независимых параметров. Покажем это. Возьмем три точки тела M_1, M_2, M_3 (рис. 10.1), не лежащие на

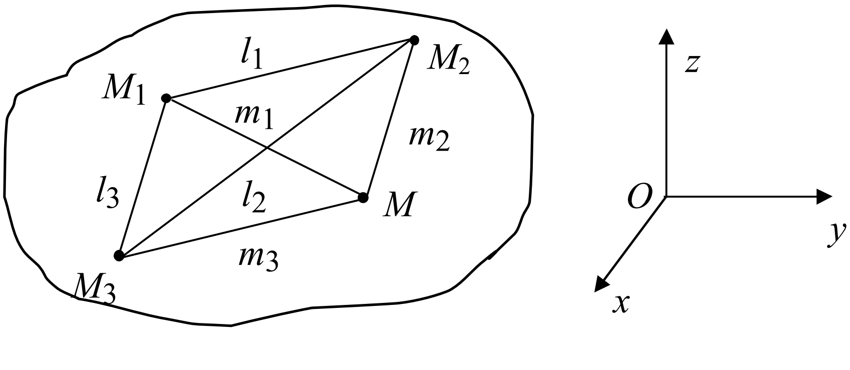


Рис. 10.1

одной прямой. Девять декартовых координат этих точек связаны между собой соотношениями неизменности расстояния l_1, l_2, l_3 между точками:

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_1^2; \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = l_2^2; \\ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = l_3^2. \end{cases} \qquad (10.1)$$

Поэтому положение трех точек тела определяется шестью независимыми координатами.

Если теперь добавить еще одну точку *M,* то ее положение определяется координатами x, y, z, которые, однако, связаны тремя условиями неизменности расстояний m_1, m_2, m_3 от точки *M* до точек M_1, M_2, M_3:

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = m_1^2; \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = m_2^2; \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = m_3^2. \end{cases} \qquad (10.2)$$

Таким образом, число независимых параметров, определяющих положение четырех точек, остается равным шести. Следовательно, оно останется равным шести и для любого количества точек.

Число независимых параметров, задание которых определяет положение твердого тела в пространстве, называется числом степеней свободы тела.

Таким образом, свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы. Если твердое тело закрепить в какой-либо точке, то оно уже будет иметь $K = 6 – 3 = 3$ степени свободы.

Задавать движение твердого тела не обязательно декартовыми координатами. В дальнейшем будет показано, что существуют более удобные параметры, определяющие положение тела в пространстве.

Рассмотрим общую теорему кинематики, справедливую для любого движения твердого тела.

Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

При любом движении твердого тела проекции скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки, равны.

Доказательство. Возьмем произвольные точки тела *A* и *B*, скорость которых в некоторый момент времени обозначим $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$ (рис. 10.2). Выберем произвольную

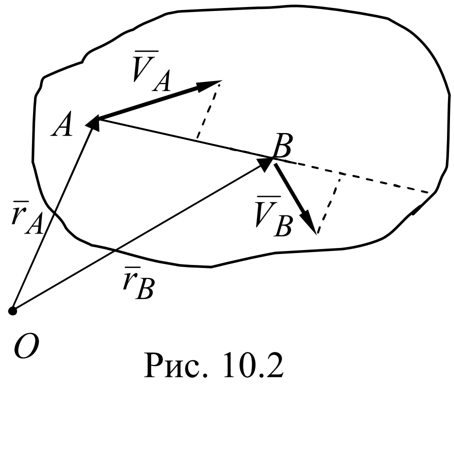


Рис. 10.2

неподвижную точку *O*. Радиус-векторы точек *A* и *B* будут вектор-функциями $\bar{r}_A = \bar{r}_A(t)$ и $\bar{r}_B = \bar{r}_B(t)$.

Из рис. 10.2 следует, что:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}. \qquad (10.3)$$

Продифференцируем по времени обе части равенства (10.3):

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\,\overline{AB}}{dt}$$

$$\text{или } \bar{V}_B = \bar{V}_A + \frac{d}{dt}\overline{AB}. \qquad (10.4)$$

Так как при движении тела длина отрезка *AB* не меняется, т.е. $\left|\overline{AB}\right| = \text{const}$, то из второго свойства производной вектора по скалярному аргументу:

$$\frac{d\,\overline{AB}}{dt} \perp \overline{AB}.$$

Проектируя теперь векторное равенство (10.4) на направление вектора $\overline{AB}$, получим:

$$\left(\bar{V}_A\right)_{AB} = \left(\bar{V}_B\right)_{AB}. \qquad (10.5)$$

Простейшие движения твердого тела

Существуют два простейших вида движения твердого тела, комбинированием которых можно получать другие, более сложные его движения. Такими движениями твердого тела являются *поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси.*

Поступательное движение твердого тела

Поступательным движением твердого тела называется такое его движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной своему первоначальному положению.

Теорема. *Если твердое тело движется поступательно, то*:

1) *траектории всех его точек одинаковы*;

2) *скорости и ускорения всех точек тела в каждый момент времени равны между собой.*

Доказательство. Если выбрать две точки *A* и *B* (рис. 10.3) твердого тела, то радиусы-векторы этих точек удовлетворяют условию

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}. \qquad (10.6)$$

При поступательном движении вектор $\overline{AB}$ является постоянным и по модулю, и по направлению в любой момент времени.

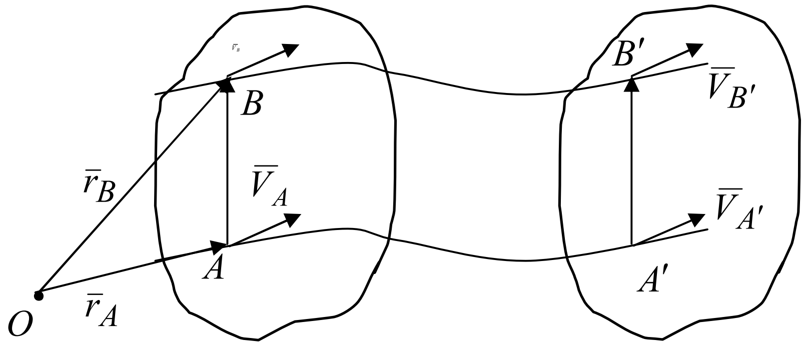


Рис.10.3

Уравнение (10.6) показывает, что годограф радиус-вектора точки B, являющийся траекторией этой точки, сдвинут по отношению к годографу радиус-вектора точки A (траектория точки A) на постоянный вектор $\overline{AB}$. Если этот сдвиг осуществить, то обе траектории совпадают всеми своими точками. Такие траектории считаются одинаковыми. Следовательно, первый пункт теоремы доказан.

Далее продифференцируем по времени выражение (10.6):

$$\frac{d\overline{r}_A}{dt} = \frac{d\overline{r}_B}{dt} + \frac{d\,\overline{AB}}{dt}. \tag{10.7}$$

По первому свойству производной вектор-функции скалярного аргумента $\frac{d\,\overline{AB}}{dt} = 0$, так как $\overline{AB} = \overline{\text{const}}$ и поскольку $\frac{d\overline{r}_B}{dt} = \overline{V}_B$ и $\frac{d\overline{r}_A}{dt} = \overline{V}_A$, то из (10.7) имеем:

$$\overline{V}_A = \overline{V}_B. \tag{10.8}$$

Дифференцируя по времени (10.8) и учитывая, что

$$\frac{d\overline{V}_B}{dt} = \overline{a}_B \text{ и } \frac{d\overline{V}_A}{dt} = \overline{a}_A,$$

получим:

$$\overline{a}_A = \overline{a}_B. \tag{10.9}$$

Теорема доказана.

Поскольку все точки твердого тела при поступательном движении движутся одинаково, то поступательное движение полностью характеризуется движением одной точки тела. Для задания этого движения достаточно знать координаты какой-либо точки тела, как функции времени:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \tag{10.10}$$

Следовательно, твердое тело, совершающее поступательное движение, имеет три степени свободы ($K = 3$).

Уравнения (10.10) являются уравнениями поступательного движения твердого тела. Для изучения поступательного движения достаточно использовать кинематику точки.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения.

При этом остаются неподвижными все точки тела, расположенные на прямой, проходящей через неподвижные точки. Эта прямая называется осью вращения тела. Построим неподвижную плоскость, проходящую через ось вращения $П_1$, и подвижную плоскость П, скрепленную с вращающимся телом и также проходящую через ось вращения (рис. 10.4).

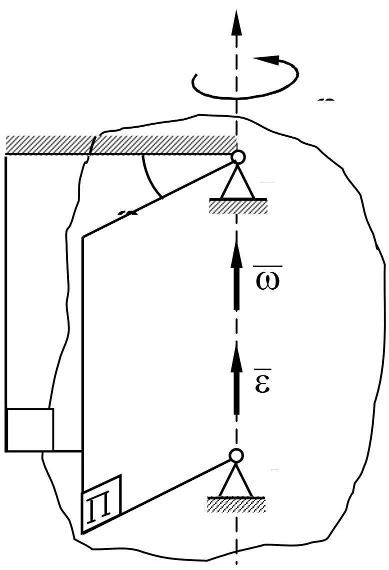


Рис. 10.4

Пусть в начальный момент обе плоскости совпадают. Тогда в момент времени t положение подвижной плоскости и самого вращающегося тела можно определить двухгранным углом между плоскостями. Соответствующий линейный угол φ между прямыми, расположенными в этих плоскостях и перпендикулярными оси вращения, называется *углом поворота тела*.

Положение тела относительно выбранной системы отсчета полностью определяется в любой момент времени, если задано уравнение:

$$\varphi = \varphi(t). \tag{10.11}$$

Зависимость (10.11) выражает *закон вращательного* движения *твердого тела вокруг неподвижной оси*. У тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, одна степень свободы, так как его положение определяется заданием одного параметра − угла φ ($K = 1$).

Угол φ обычно задают положительным, если он откладывается от неподвижной плоскости против хода часовой стрелки, и отрицательным – в противном случае, если смотреть с конца оси z. Дуговая стрелка на рис. 10.4 показывает направление положительного отсчета угла φ.

Траекториями точек тела при его вращении вокруг неподвижной оси являются окружности, расположенные в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите основные задачи кинематики твердого тела.
2. В чем заключается первая задача кинематики твердого тела?
3. Что называется числом степеней свободы твердого тела?
4. Сформулируйте теорему о проекциях скоростей двух точек тела.
5. Какое движение твердого тела называется поступательным?
6. Сформулируйте теорему поступательного движения твердого тела.
7. Как задать поступательное движение твердого тела?
8. Какое движение твердого тела называется вращательным?
9. Запишите закон вращательного движения твердого тела.

Лекция № 11
КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Угловая скорость тела

Пусть в момент времени t тело повернулось на угол $\varphi(t)$, а в момент времени $t + \Delta t$ на угол $\varphi(t + \Delta t)$. Тогда

$\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$ − приращение угла за время Δt.

Отношение приращения угла $\Delta\varphi$ к промежутку времени Δt называется средней угловой скоростью тела за промежуток времени Δt:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = (\omega_z)_{\text{ср}}\,.$$

Алгебраической угловой скоростью тела в данный момент времени называется предел отношения приращения угла поворота тела к промежутку времени, за которое это приращение произошло при стремлении последнего к нулю:

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}\,. \tag{11.1}$$

Таким образом, *алгебраическая угловая скорость тела в данный момент времени равна первой производной по времени от угла поворота в этот момент:*

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\,. \tag{11.2}$$

Она является величиной положительной при вращении тела против хода часовой стрелки, так как при этом угол поворота возрастает с течением времени, и отрицательной – при вращении тела по ходу часовой стрелки, если положительный угол откладывать против хода часовой стрелки.

Абсолютное значение угловой скорости обозначается ω:

$$\omega = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|.$$

Единица измерения угловой скорости в системе СИ – рад/с.

Угловая скорость тела характеризует быстроту изменения угла поворота тела с течением времени.

Угловое ускорение тела

Пусть теперь известен закон изменения угловой скорости:

$$\omega_z = \omega_z(t),$$

и в момент времени t угловая скорость тела равна $\omega_z(t)$, а в момент времени $t + \Delta t$ – $\omega_z(t + \Delta t)$.

Тогда

$\Delta\omega_z = \omega_z(t + \Delta t) - \omega_z(t)$ – приращение угловой скорости за время Δt.

Средним угловым ускорением тела за промежуток времени Δt называется отношение приращения угловой скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло, т.е.

$$\left(\varepsilon_z\right)_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t}.$$

Алгебраическим угловым ускорением тела в данный момент времени называется предел отношения приращения алгебраической угловой скорости к промежутку времени, за которое это приращение произошло, при стремлении последнего к нулю.

$$\varepsilon_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \lim \frac{\omega_z(t + \Delta t) - \omega_z(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (11.3)$$

Таким образом, *алгебраическое угловое ускорение тела в данный момент времени равно первой производной по времени от алгебраической угловой скорости или второй производной от угла поворота*:

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \ddot{\varphi}. \qquad (11.4)$$

Угловое ускорение тела характеризует быстроту изменения угловой скорости тела с течением времени.

Если знаки ω_z и ε_z совпадают, т.е. $\omega_z \cdot \varepsilon_z > 0$, то вращение тела называется ускоренным.

Если знаки ω_z и ε_z не совпадают, т.е. $\omega_z \cdot \varepsilon_z < 0$, то вращение тела называется замедленным.

Абсолютное значение углового ускорения будем обозначать ε:

$$\varepsilon = \left|\frac{d\omega_z}{dt}\right|.$$

Единица измерения углового ускорения тела в системе СИ – рад/с^2.

Частные случаи

1. Равномерное вращение

$\varepsilon_z \equiv 0$ − условие равномерного вращения.

Определим закон движения.

Пусть при $t = 0$: $\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0$, $\omega_z\big|_{t=0} = \omega_z^0$, $\varepsilon_z\big|_{t=0} = \varepsilon_z^0$.

Из условия равномерного вращения следует:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{const} = \omega_z^0,$$

откуда $\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int\limits_0^t \omega_z^0 dt$ и, следовательно, закон равномерного вращения тела:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_z^0 t .$$

2. *Равнопеременное вращение твердого тела*

$\varepsilon_z = \mathrm{const} = \varepsilon_z^0$ − условие равнопеременного вращения.

Из этого условия следует:

$$\int\limits_{\omega_z^0}^{\omega} d\omega_z = \int\limits_0^t \varepsilon_z^0 dt = \varepsilon_z^0 t ,$$

откуда $\omega_z = \dfrac{d\varphi}{dt} = \varepsilon_z t + \omega_z^0$. Из последнего следует:

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int\limits_0^t (\varepsilon_z^0 t + \omega_z^0) dt = \varepsilon_z^0 \frac{t^2}{2} + \omega_z^0 t + \varphi_0 .$$

Следовательно, закон равнопеременного вращения тела имеет вид:

$$\varphi = \frac{\varepsilon_0 t^2}{2} + \omega_z^0 t + \varphi_0 .$$

При этом, если знаки ε_z^0 и ω_z совпадают, то вращение называется равноускоренным, если знаки ε_z^0 и ω_z различны, то вращение называется равнозамедленным.

Примечание. Угловая скорость и угловое ускорение могут быть только у тела. Нельзя говорить угловая скорость или угловое ускорение точки. На лекции №1 мы определили, что под материальной точкой понимают простейшую модель материального тела любой формы, размерами и вращением которого можно пренебречь. У точки есть только скорость и ускорение.

Таким образом, угловая скорость и угловое ускорение являются кинематическими характеристиками твердого тела. Определение этих характеристик, как известно из лекции №10, является второй основной задачей кинематики твердого тела. Перейдем к третьей задаче кинематики вращательного движения твердого тела.

Распределение скоростей и ускорений в теле при вращательном движении

Выберем в теле произвольную точку M. Обозначим ее начальное положение M_0. Проведем через нее и ось вращения неподвижную плоскость отсчета Π_0. Свяжем также точку M с подвижной плоскостью П. Если закон вращательного движения задан $\varphi = \varphi(t)$, то положение точки M в момент времени t будет определяться углом φ. Траекторией точки M будет окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вращения. На рис. 11.1 изображено это сечение.

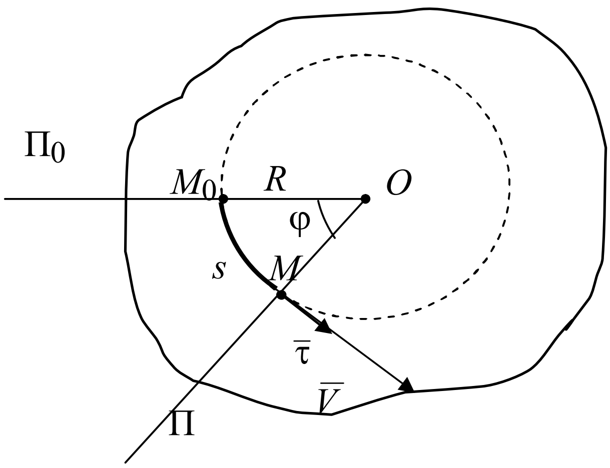


Рис. 11.1

Пусть задано положительное направление отсчета угла φ против хода часовой стрелки в сторону движения. Π_0, П – прямые пересечения соответствующих плоскостей с плоскостью сечения. Тогда зависимость дуги от угла запишется для движения точки M следующим образом:

$$s = R \cdot \varphi(t), \tag{11.5}$$

где R − радиус окружности, по которой движется точка.

Таким образом движение точки M будет задано естественным способом. При этом проекция вектора скорости точки на касательную равна:

$$V_\tau = \dot{s} = R\dot{\varphi} = R \cdot \omega_z . \tag{11.6}$$

Направление вектора скорости точки определяется направлением вращения тела:

$$\bar{V} = V_\tau \bar{\tau} = R \cdot \omega_z \bar{\tau} . \tag{11.7}$$

Таким образом, величина скорости $V = |V_\tau|$ равна:

$$V = \omega \cdot R. \tag{11.8}$$

Скорости точек тела при его вращении вокруг неподвижной оси пропорциональны их кратчайшим расстояниям до этой оси. Скорости точек тела направлены по касательным к траекториям и, следовательно, перпендикулярны радиусам вращения.

Определим ускорение произвольной точки M при естественном способе задания ее движения (11.5). Раскладывая ускорение точки на касательную и нормальную составляющие $\bar{a} = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau$, получим:

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \frac{dR\omega_z}{dt} = R\frac{d\omega_z}{dt} = R\varepsilon_z,$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Величина полного ускорения равна $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}$.

Таким образом, ускорение произвольной точки тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси определяется по формулам:

$$a_\tau = R \cdot \varepsilon_z,\ a_n = \omega^2 R,\ a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \tag{11.9}$$

Как видно из формул (11.9) касательное, нормальное и полное ускорения точек, как и скорости, распределены по линейному закону. Они линейно зависят от расстояний до оси вращения. Вектор нормального ускорения направлен по радиусу окружности к оси вращения (рис. 11.2).

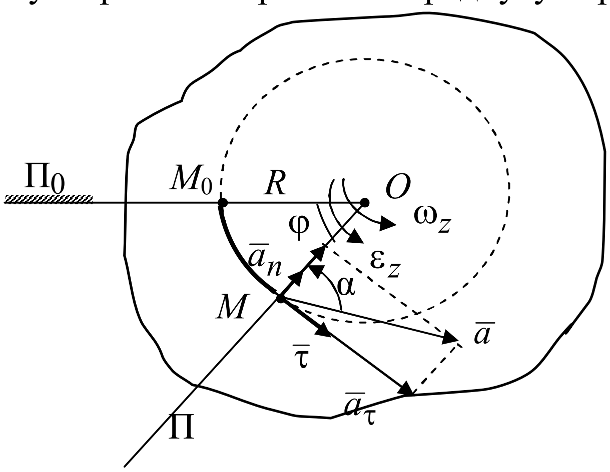


Рис. 11.2

Направление вектора касательного ускорения зависит от знака алгебраического углового ускорения. Если знаки ε_z и ω_z совпадают, т.е. $\omega_z \cdot \varepsilon_z > 0$, то направления векторов $\bar{V}$ и $\bar{a}_\tau$ совпадают, если $\omega_z \cdot \varepsilon_z < 0$, то векторы $\bar{V}$ и $\bar{a}_\tau$ направлены противоположно друг другу.

Обозначим угол α между полным ускорением $\bar{a}$ и радиусом вращения. Имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \tag{11.10}$$

т.е. угол α для всех точек тела один и тот же и от расстояния до оси вращения не зависит. Откладывать его следует от вектора ускорения к радиусу вращения в направлении дуговой стрелки углового ускорения, независимо от направления вращения тела.

Векторы угловой скорости и углового ускорения

Вектором угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, называется вектор, модуль которого равен абсолютному значению алгебраической угловой скорости и направленный вдоль оси вращения тела.

Если ввести единичный вектор $\bar{k}$ оси вращения *Oz,* то

$$\bar{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\bar{k} = \omega_z \bar{k}\,. \qquad (11.11)$$

При $\omega_z > 0$ направление вектора $\bar{\omega}$ совпадает с направлением единичного вектора $\bar{k}$, а при $\omega_z < 0$ вектор $\bar{\omega}$ направлен в сторону, противоположную направлению вектора $\bar{k}$.

Вектором углового ускорения называется вектор, равный производной по времени от вектора угловой скорости:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt}\bar{k} = \varepsilon_z \bar{k}\,. \qquad (11.12)$$

Из формулы (11.12) видно, что вектор $\bar{\varepsilon}$ направлен, как и вектор $\bar{\omega}$, вдоль оси вращения.

Таким образом, величины ω_z и ε_z представляют проекции векторов угловой скорости $\bar{\omega}$ и углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ на ось вращения *z*.

Если ω_z и ε_z имеют одинаковые знаки, т.е. $\omega_z \cdot \varepsilon_z > 0$, векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ направлены в одну сторону (рис. 11.3), и тело, как мы знаем, вращается ускоренно. Если ω_z и ε_z имеют разные знаки, т.е. $\omega_z \cdot \varepsilon_z < 0$, то векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ направлены в разные стороны (рис. 11.4), и тело вращается замедленно.

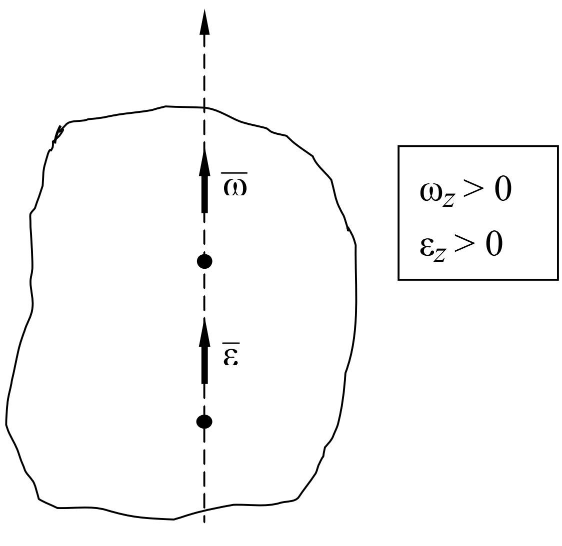


Рис. 11.3

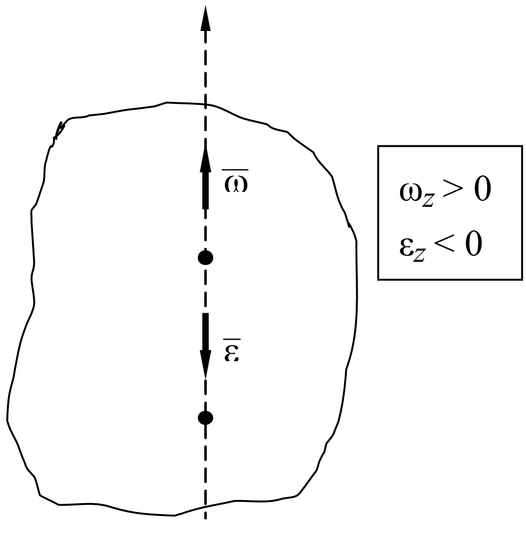


Рис. 11.4

Векторные формулы для скоростей и ускорений точек тела при вращательном движении

Скорость точки вращающегося твердого тела по модулю и направлению можно представить формулой Эйлера:

$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}, \tag{11.13}$$

где $\overline{r}$ − радиус-вектор точки M, проведенный из произвольной точки оси вращения Oz, например, из точки O (рис. 11.5).

Убедимся в справедливости этой формулы.

Вектор $\overline{\omega} \times \overline{r}$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы, входящие в векторное произведение. По направлению он параллелен вектору скорости $\overline{V}$, направленному по касательной к траектории (окружности) точки. Модуль векторного произведения равен:

$$\left|\overline{\omega} \times \overline{r}\right| = \omega \cdot r \sin(\overline{\omega}, \overline{r}) = \omega \cdot R = V,$$

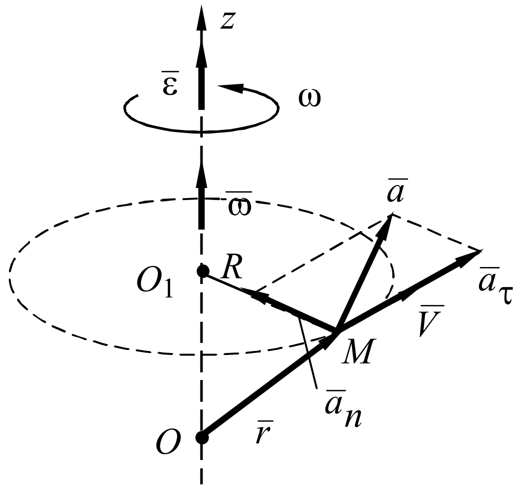


Рис. 11.5

так как $r \sin(\overline{\omega}, \overline{r}) = R$.

Таким образом, векторное произведение $\overline{\omega} \times \overline{r}$ по модулю и направлению определяет скорость точки при вращательном движении тела.

Ускорение точки по определению равно:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overline{\omega} \times \overline{r}\right) = \frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \frac{d\overline{r}}{dt}.$$

Так как $\dfrac{d\overline{\omega}}{dt} = \varepsilon$, $\dfrac{d\overline{r}}{dt} = \overline{V}$ получим:

$$\overline{a} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{V}. \tag{11.14}$$

Вектор $\overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ направлен по касательной к траектории точки. По модулю он равен:

$$\left|\overline{\varepsilon} \times \overline{r}\right| = \varepsilon \cdot r \sin(\overline{\varepsilon}, \overline{r}) = \varepsilon \cdot R,$$

и, следовательно, эта составляющая ускорения является касательной составляющей ускорения точки M:

$$\overline{a}_\tau = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}. \tag{11.15}$$

Ее называют также *вращательным ускорением*.

Вектор $\overline{\omega}\times\overline{V}$ направлен в плоскости окружности радиуса R от точки M к точке O_1. По модулю он равен:

$$\left|\overline{\omega}\times\overline{V}\right| = \omega\cdot V\sin 90^{\circ} = \omega^2\cdot R,$$

и, следовательно, эта составляющая ускорения является нормальной составляющей ускорения точки M:

$$\overline{a}_n = \overline{\omega}\times\overline{V}. \qquad (11.16)$$

Ее называют также *осестремительным* ускорением.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется алгебраической угловой скоростью тела?
2. Как определяется угловое ускорение тела?
3. Как определяется направление вектора угловой скорости тела?
4. Запишите формулу для определения величины скорости точки при вращательном движении тела.
5. Запишите формулу для определения величины ускорения точки при вращательном движении тела.
6. Как определяются величина и направление составляющей ускорения, называемой вращательным ускорением?
7. Запишите уравнение равномерного вращения твёрдого тела.
8. Как определяются величина и направление составляющей ускорения, называемой осестремительным ускорением?

Лекция № 12
СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Рассмотрим движение точки M относительно двух систем координат $Oxyz$ и $O_1x_1y_1z_1$, движущихся друг относительно друга (рис. 12.1). В механике системы координат предполагаются жестко скрепленными с телами, по отношению к которым рассматривается движение точки. Тела на рисунках можно не показывать.

Пусть задано движение системы координат $Oxyz$ относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Движение точки M относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ называют сложным, если задано ее движение относительно системы координат $Oxyz$. Систему координат $O_1x_1y_1z_1$ принимают при этом за неподвижную или основную, а систему координат $Oxyz$ − за подвижную.

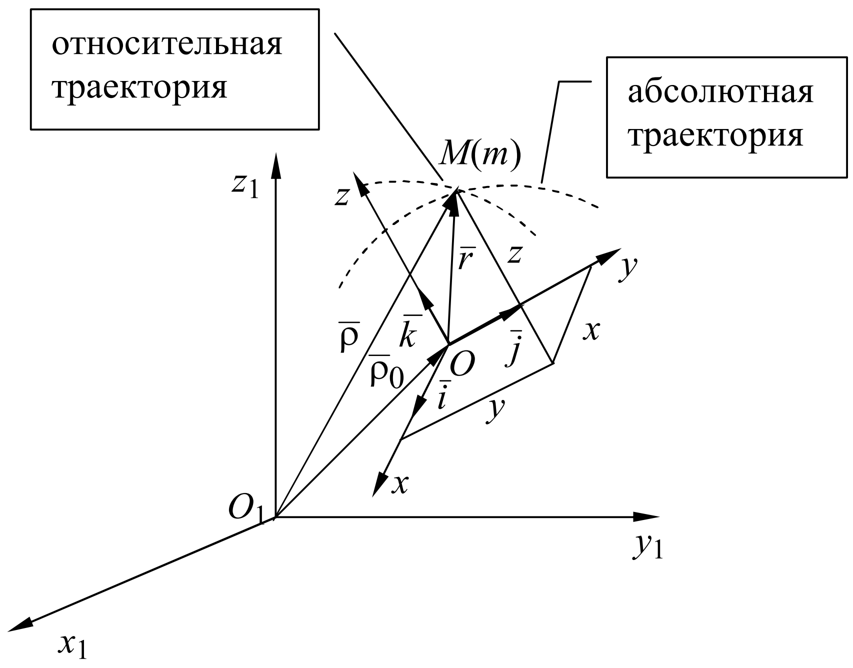


Рис. 12.1

Относительное движение точки

Движение точки М по отношению к подвижной системы координат называют относительным. Соответственно, траектория (рис. 12.1), скорость и ускорение точки в ее движении относительно подвижной системы координат называются относительными. Относительная скорость и относительное ускорение точки обозначаются индексом *r*: $\overline{V}_r$, $\overline{a}_r$. Положение точки *M* по отношению к системе координат *Oxyz* определяет радиус-вектор $\overline{r} = \overline{r}(t)$.

Введем орты подвижной системы координат $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ и разложим радиус-вектор по ортам:

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} .$$

Уравнения

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \tag{12.1}$$

являются уравнениями относительного движения точки в координатной форме. Движение самой координатной системы *Oxyz* не учитывается. Будем считать ее неподвижной.

Если в уравнениях (12.1) исключить время, то получим уравнения траектории относительного движения (рис. 12.1).

Если относительное движение задано, то для того, чтобы найти относительную скорость точки $\overline{V}_r$, необходимо продифференцировать вектор-функцию $\overline{r} = \overline{r}(t)$ в предположении, что орты $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ неподвижны.

$$\bar{V}_r = \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}\,. \tag{12.2}$$

Знак ~ (тильда) в равенстве (12.2) означает, что производная берется в предположении, что $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ − постоянные векторы. Такая производная называется *локальной* или *относительной производной*.

Раскладывая вектор $\bar{V}_r$ по ортам

$$\bar{V}_r = V_{rx}\bar{i} + V_{ry}\bar{j} + V_{rz}\bar{k}$$

и сравнивая две записи вектора $\bar{V}_r$, имеем:

$$V_{rx} = \dot{x}\,,\; V_{ry} = \dot{y}\,,\; V_{rz} = \dot{z}\,.$$

Аналогично ускорение относительного движения точки равно:

$$\bar{a}_r = \frac{\tilde{d}\bar{V}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}\,. \tag{12.3}$$

Раскладывая вектор $\bar{a}_r$ по ортам

$$\bar{a}_r = a_{rx}\bar{i} + a_{ry}\bar{j} + a_{rz}\bar{k}$$

и сравнивая обе записи вектора $\bar{a}_r$, имеем:

$$a_{rx} = \ddot{x}\,,\; a_{ry} = \ddot{y}\,,\; a_{rz} = \ddot{z}\,.$$

Следовательно, для определения относительной скорости и относительного ускорения точки следует мысленно остановить движение подвижной системы координат и вычислить их по правилам кинематики точки.

Абсолютное движение точки

Движение точки М относительно неподвижной системы координат называют абсолютным. Соответственно, траекторию (рис. 12.1), скорость и ускорение относительно неподвижной системы координат называют абсолютными.

Абсолютная скорость и абсолютное ускорение точки обозначаются индексом *а*: $\bar{V}_a$, $\bar{a}_a$. Положение точки *М* относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ определяется радиус-вектором $\bar{\rho}$. Введем орты неподвижной системы координат $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ и разложим по ним радиус-вектор $\bar{\rho}$:

$$\bar{\rho} = x_1\bar{i}_1 + y_1\bar{j}_1 + z_1\bar{k}_1\,.$$

Тогда уравнения абсолютного движения точки имеют вид:

$$x_1 = x_1(t)\,,\; y_1 = y_1(t)\,,\; z_1 = z_1(t)\,.$$

Исключив в этих уравнениях время t, получим уравнения траектории абсолютного движения точки (рис. 12.1).

Чтобы найти скорость абсолютного движения точки, необходимо продифференцировать вектор-функцию $\overline{\rho} = \overline{\rho}(t)$:

$$\overline{V}_a = \frac{d\overline{\rho}}{dt} = \dot{x}_1\overline{i}_1 + \dot{y}_1\overline{j}_1 + \dot{z}_1\overline{k}_1.$$

Раскладывая вектор $\overline{V}_a$ по ортам

$$\overline{V}_a = V_{ax_1}\overline{i}_1 + V_{ay_1}\overline{j}_1 + V_{az_1}\overline{k}_1$$

и сравнивая обе записи вектора $\overline{V}_a$, получим:

$$V_{ax_1} = \dot{x}_1,\ V_{ay_1} = \dot{y}_1,\ V_{az_1} = \dot{z}_1.$$

Аналогично ускорение абсолютного движения точки равно:

$$\overline{a}_a = \frac{d\overline{V}_a}{dt} = \frac{d^2\overline{\rho}}{dt^2} = \ddot{x}_1\overline{i}_1 + \ddot{y}_1\overline{j}_1 + \ddot{z}_1\overline{k}_1.$$

Раскладывая вектор $\overline{a}_a$ по ортам

$$\overline{a}_a = a_{ax_1}\overline{i}_1 + a_{ay_1}\overline{j}_1 + a_{az_1}\overline{k}_1$$

и сравнивая обе записи вектора $\overline{a}_a$, получим:

$$a_{ax_1} = \ddot{x}_1,\ a_{ay_1} = \ddot{y}_1,\ a_{az_1} = \ddot{z}_1.$$

Переносное движение

Переносным движением точки называется ее движение в рассматриваемый момент времени вместе с подвижной системой координат относительно неподвижной системы координат.

Переносная скорость и переносное ускорение точки обозначаются индексом *e*: $\overline{V}_e$, $\overline{a}_e$.

Переносной скоростью $\overline{V}_e$ (ускорением $\overline{a}_e$) точки M в данный момент времени называют вектор, равный скорости $\overline{V}_m$ (ускорению $\overline{a}_m$) той точки m подвижной системы координат, с которой совпадает в данный момент движущая точка M (рис. 12.1).

Проведем радиус-вектор начала координат $\overline{\rho}_O$ (рис. 12.1). Из рис. 12.1 видно, что

$$\overline{\rho} = \overline{\rho}_O + \overline{r} = \overline{\rho}_O + x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}. \tag{12.4}$$

Чтобы найти переносную скорость точки в заданный момент времени, необходимо продифференцировать радиус-вектор $\overline{\rho}$ при условии, что координаты точки *x, y, z* не изменяются в данный момент времени:

$$\overline{V}_e = \overline{V}_m = \frac{d\overline{\rho}}{dt}\Big|_{x,y,z=\text{const}} = \frac{d\overline{\rho}_O}{dt} + x\frac{d\overline{i}}{dt} + y\frac{d\overline{j}}{dt} + z\frac{d\overline{k}}{dt}. \tag{12.5}$$

Переносное ускорение соответственно равно:

$$\bar{a}_e = \bar{a}_m = \frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2}\Big|_{x,y,z=\text{const}} = \frac{d^2\bar{\rho}_O}{dt^2} + x\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}. \qquad (12.6)$$

Таким образом, для определения переносной скорости $\bar{V}_e$ и переносного ускорения $\bar{a}_e$ в данный момент времени необходимо мысленно остановить в этот момент относительное движение точки, определить положение точки m тела, неизменно связанного с подвижной системой координат, где находится в остановленный момент точка. Затем вычислить скорость и ускорение точки M тела, совершающего переносное движение относительно неподвижной системы координат.

Постановка задач на сложное движение точки

1. *Прямая задача*:

по заданным переносному и относительному движениям точки найти кинематические характеристики абсолютного движения точки.

2. *Обратная задача*:

некоторое заданное движение точки представить сложным, разложив его на относительное и переносное, и определить кинематические характеристики этих движений. Для однозначного решения этой задачи необходимы дополнительные условия.

Теорема сложения скоростей

Абсолютная скорость точки $\bar{V}_a$ определяется по теореме сложения скоростей, согласно которой *абсолютная скорость точки, совершающей сложное движение, равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей:*

$$\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r. \qquad (12.7)$$

Доказательство. Для определения абсолютной скорости точки продифференцируем выражение справа (12.4) по времени, используя свойства производной вектора по скалярному аргументу:

$$\begin{aligned}\bar{V}_a &= \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} + \dot{x}\bar{i} + x\frac{d\bar{i}}{dt} + \dot{y}\bar{j} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + \dot{z}\bar{k} + z\frac{d\bar{k}}{dt} = \\ &= \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} + x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt} + \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} = \bar{V}_e + \bar{V}_r.\end{aligned} \qquad (12.8)$$

В последнем выражении слева первые четыре слагаемых по формуле (12.5) представляют переносную скорость $\bar{V}_e$, последние три слагаемых по формуле (12.1) – относительную скорость $\bar{V}_r$. Теорема доказана.

Теорема сложения ускорений при переносном поступательном движении

Абсолютное ускорение точки, совершающей сложное движение при переносном поступательном движении, равно геометрической сумме относительного и переносного ускорения:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r. \qquad (12.9)$$

Доказательство. Вернемся к рис. 12.1. При переносном поступательном движении орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ не меняются не только по величине, но и по направлению, т.е. это постоянные векторы, а так как производные от постоянных векторов равны нулю, то по формуле (12.6) переносное ускорение равно:

$$\bar{a}_e = \frac{d^2\bar{\rho}_O}{dt^2}. \qquad (12.10)$$

Для определения абсолютного ускорения точки продифференцируем дважды радиус-вектор $\bar{\rho}$ (12.4) по времени, учитывая постоянство ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\bar{a}_a = \frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{\rho}_O}{dt^2} + \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} = \bar{a}_e + \bar{a}_r.$$

В последнем выражении первое слагаемое по формуле (12.10) представляет переносное ускорение $\bar{a}_e$, а последние три по формуле (12.2) – относительное ускорение $\bar{a}_r$. Теорема доказана.

Теорема сложения ускорений при произвольном переносном движении (теорема Кориолиса)

Абсолютное ускорение точки $\bar{a}_a$ определяется по *теореме Кориолиса*, согласно которой *абсолютное ускорение точки, совершающей сложное движение, равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений:*

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k. \qquad (12.11)$$

Кориолисово ускорение вычисляется по формуле:

$$\bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \times \overline{V_r}, \qquad (12.12)$$

где $\bar{\omega}_e$ − вектор угловой скорости переносного движения, $\overline{V_r}$ − вектор относительной скорости точки. Направление вектора кориолисова ускорения определяется по правилу векторного произведения: кориолисово ускорение будет направлено перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\bar{\omega}_e$ и $\overline{V_r}$ (рис. 12.2), в ту сторону, откуда кратчайший поворот от вектора $\bar{\omega}_e$ к вектору $\overline{V_r}$ видится происходящим против хода часовой стрелки.

Модуль кориолисова ускорения равен $a_k = 2\omega_e V_r \sin(\overline{\omega}_e, \overline{V}_r)$.

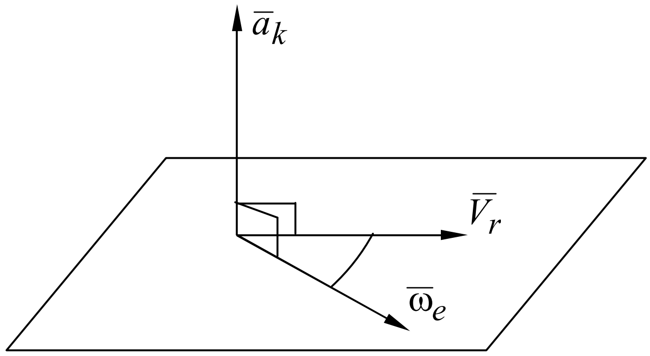


Рис. 12.2

Докажем справедливость теоремы для переносного вращательного движения.

Пусть подвижная система координат $Oxyz$ вращается вокруг оси l с угловой скоростью $\overline{\omega}_e$ (рис. 12.3). Во все время движения радиус-векторы точки по-прежнему связаны зависимостью:

$$\overline{\rho} = \overline{\rho}_O + \overline{r} = \overline{\rho}_O + x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}.$$

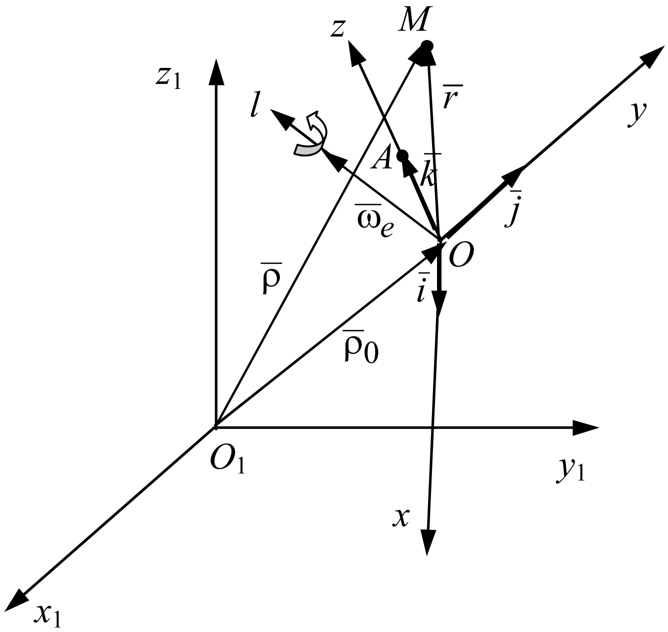


Рис. 12.3

Так как по определению $\overline{a}_a = \dfrac{d\overline{V}_a}{dt}$, продифференцируем выражение (12.8) по времени, учитывая свойства производной вектора по скалярному аргументу:

$$\bar{a}_a = \frac{d^2\bar{\rho}_O}{dt^2} + \dot{x}\frac{d\bar{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\bar{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt} + x\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2} + \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} +$$

$$+ \dot{x}\frac{d\bar{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\bar{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt} = \frac{d^2\bar{\rho}_O}{dt^2} + x\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2} + \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} + \qquad (12.3)$$

$$+ 2\left(\dot{x}\frac{d\bar{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\bar{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt}\right).$$

В последнем выражении первые четыре слагаемых представляют переносное ускорение $\bar{a}_e$, следующие три слагаемых представляют относительную скорость $\bar{a}_r$. Оставшиеся слагаемые обозначим (*). В выражении (*) производная от каждого орта по времени представляет собой линейную скорость точки, для которой этот орт является радиус-вектором. Например, для орта $\bar{k}$ (рис. 12.3) скорость $\bar{u}_A$ точки A его конца равна:

$$\bar{u}_A = \frac{d\bar{k}}{dt}.$$

Но так как орт $\bar{k}$ вращается вокруг оси l, то скорость его конца можно определить по векторной формуле Эйлера:

$$\bar{u}_A = \bar{\omega}_e \times \bar{k}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{k}. \qquad (12.14)$$

Аналогично для ортов $\bar{i}$ и $\bar{j}$:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{i}, \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{j}. \qquad (12.15)$$

Подставляя формулы (12.14) и (12.15) в выражение (*), получим:

$$(*) = 2(\dot{x} \cdot \bar{\omega}_e \times \bar{i} + \dot{y} \cdot \bar{\omega}_e \times \bar{j} + \dot{z} \cdot \bar{\omega}_e \times \bar{k}).$$

Используя сочетательное свойство векторного произведения относительно числовых множителей, какими являются $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, имеем:

$$(*) = 2[\bar{\omega}_e \times (\dot{x}\bar{i}) + \bar{\omega}_e \times (\dot{y}\bar{j}) + \bar{\omega}_e \times (\dot{z}\bar{k})].$$

Далее, используя распределительное свойство для векторного произведения, получим:

$$(*) = 2\bar{\omega}_e \times (\dot{x}\bar{i} + y\bar{j} + \dot{z}\bar{k}) = 2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r = \bar{a}_k.$$

Таким образом,

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k.$$

Теорема для переносного вращательного движения доказана.

Вопросы для самопроверки

1. Какое движение точки называется сложным или абсолютным?
2. Какое движение точки называется относительным?
3. Дайте определение относительного ускорения точки.
4. Какое движение точки называется переносным?
5. Дайте определение переносной скорости и переносного ускорения точки.
6. Как определяется абсолютная скорость точки при сложном движении?
7. Сформулируйте теорему сложения ускорений точки при переносном поступательном движении.
8. Запишите формулу, определяющую ускорение Кориолиса точки.
9. Сформулируйте теорему сложения ускорений точки при переносном непоступательном движении.

Лекция № 13

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоскопараллельным или плоским называется такое движение твердого тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Пример 1.

Качение цилиндра (катка) по неподвижной плоскости (рис. 13.1).

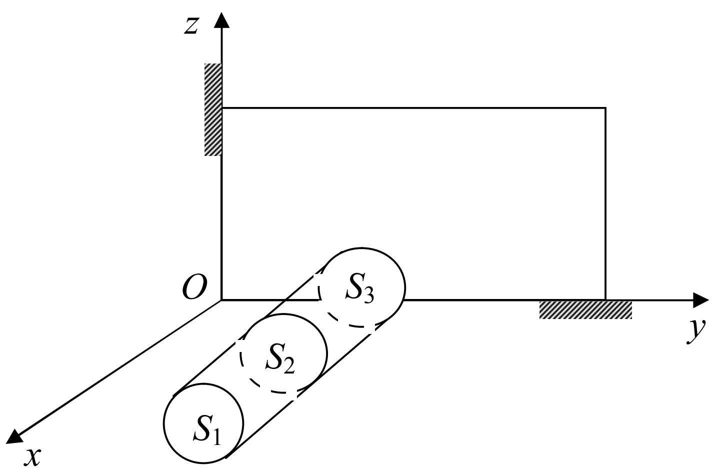


Рис. 13.1

Выберем неподвижную систему координат $Oxyz$ так, чтобы каток катился основанием параллельно плоскости Oyz: $S_1 \text{II} S_2 \text{II} S_3 \text{II} Oyz$.

Пример 2.

Кривошипный механизм (рис. 13.2).

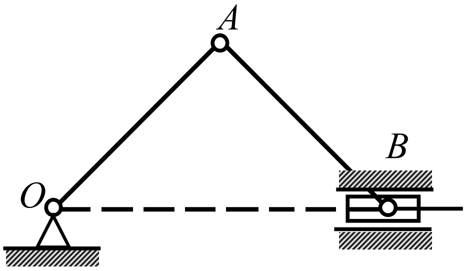


Рис. 13.2

Кривошип *OA* кривошипного механизма (рис. 13.2) совершает вращательное движение вокруг неподвижной точки *O*. Кривошип соединен шарнирно в точке *A* с шатуном *AB*, совершающим плоскопараллельное движение, и приводящим в движение ползун *B*.

Пусть тело совершает плоскопараллельное движение, и все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных плоскости *Oxy* (рис. 13.3). Обозначим ее $П_1$. Построим плоскость П параллельно плоскости $П_1$ и пусть *s* – сечение тела плоскостью П. Тогда согласно определению сечение *s* будем двигаться в плоскости П. Проведем любую прямую *AB* в теле, перпендикулярном плоскости $П_1$. Из определения плоского движения и из свойств твердого тела прямая *AB* будет двигаться параллельно самой себе, т.е. поступательно. Тогда из теоремы о поступательном движении все точки прямой *AB* будут двигаться одинаково. Следовательно, если будем знать движение сечения *s,* то будем знать и движение всего тела. Поэтому изучение плоскопараллельного движения сводится к изучению движения плоского сечения в своей плоскости.

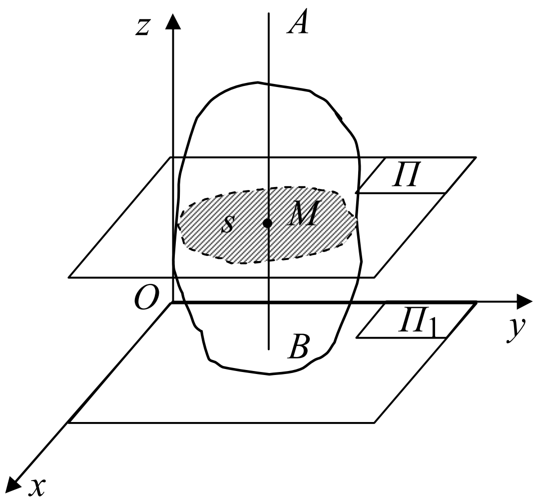


Рис. 13.3

Уравнения плоского движения

Пусть в неподвижной плоскости $O_1x_1y_1$ задано сечение тела s, совершающего плоское движение (рис. 13.4). Выберем произвольную точку O и скрепим жестко в этой точке подвижную систему координат Oxy. Точку O называют полюсом. Положение сечения s будет определяться положением координатных осей Oxy, а их положение определяется координатами полюса x_{1O}, y_{1O} и углом φ. Зададим эти параметры как функции времени и получим уравнения плоскопараллельного движения:

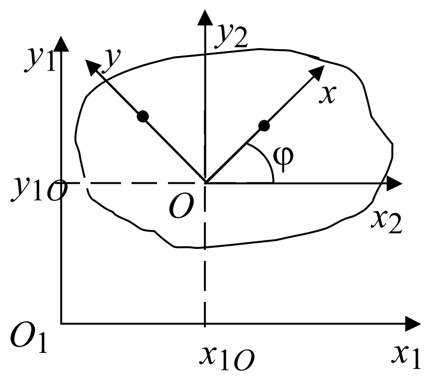


Рис. 13.4

$$x_{1O} = x_{1O}(t),\ y_{1O} = y_{1O}(t),\ \varphi = \varphi(t). \tag{13.1}$$

Таким образом, число степеней свободы при плоскопараллельном движении равно $K = 3$.

Разложение плоского движения твердого тела на два простых движения − поступательное и вращательное

Вернемся к рис. 13.4 и введем вспомогательную подвижную систему координат Ox_2y_2, совершающую поступательное движение относительно системы координат $O_1x_1y_1$. При поступательном движении осей Ox_2y_2 оси Oxy будут совершать по отношению к ним вращательное движение вокруг полюса. Как известно, для задания поступательного движения тела достаточно задать движение одной его точки, т.е. движение полюса O определяет поступательное движение осей Ox_2y_2:

$$x_{1O} = x_{1O}(t),\ y_{1O} = y_{1O}(t). \tag{13.2}$$

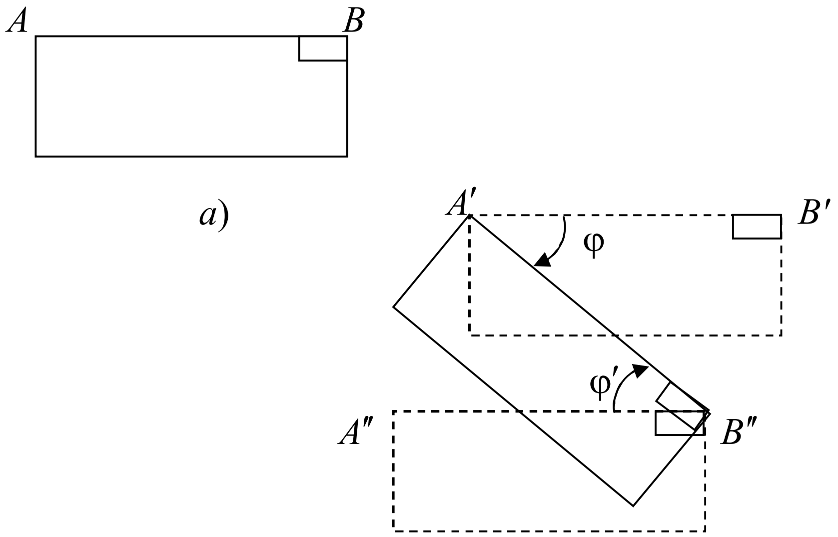
Примем это движение за переносное. Тогда вращательное движение осей Oxy относительно подвижных осей Ox_2y_2, определяемое уравнением

$$\varphi = \varphi(t), \tag{13.3}$$

будет относительным.

От выбора полюса O вид функции (13.2) зависит существенным образом, а вид функции (13.3) от выбора точки O не зависит. Докажем это.

Возьмем для наглядности прямоугольную фигуру. На рис 13.5 изображено: а) начальное положение прямоугольника AB; б) его конечное положение. Выберем сначала за полюс точку *A* и переместим прямоугольник *AB* из положения *а*) в положение *б*) сначала параллельным переносом



а)

б)

Рис. 13.5

(положение $A'B'$), а затем поворотом вокруг полюса *A* на угол φ. Затем выберем за полюс точку *B* и переместим прямоугольник *AB* из положения а) в положение б) параллельным переносом в положение $A''B''$, затем поворотом вокруг полюса *B* на угол φ'. Из рис. 13.5 видно, что по величине $\varphi = \varphi'$. Откладывается угол в обоих случаях в одном направлении – по ходу часовой стрелки.

Вывод: *Введением вспомогательной системы координат* Ox_2y_2 *плоское движение оказывается разложенным на два следующих движения: переносное – поступательное движение вместе с вспомогательной системой координат (определяется движением полюса) и относительное – вращательное движение подвижной плоскости Oxy вместе с плоской фигурой вокруг полюса (определяется углом поворота* φ*).*

При этом поскольку выбор полюса произволен, то указанное разложение может быть выполнено бесчисленным множеством способов. Однако во всех таких разложениях относительное вращательное движение остается одним и тем же, так как уравнение $\varphi = \varphi(t)$ от выбора полюса не зависит.

Распределение скоростей при плоском движении

Вернемся к рис. 13.4. Определим скорость произвольной точки *M* плоской фигуры относительно осей $O_1x_1y_1$ в заданный момент времени.

Введем векторы $\overline{OM}=\overline{r}$, $\overline{O_1O}=\overline{\rho}_O$, $\overline{O_1M}=\overline{\rho}$ (рис. 13.6). Очевидно, что $\overline{\rho}=\overline{r}+\overline{\rho}_O$.

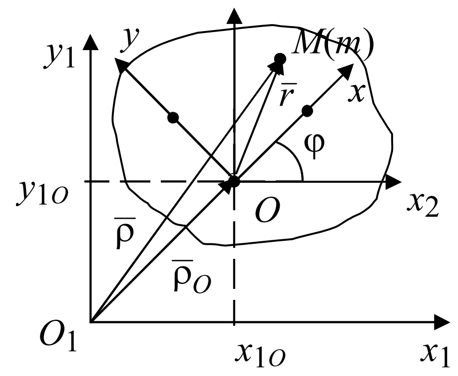


Рис. 13.6

Рассмотрим движение точки M как сложное, состоящее из переносного поступательного движения плоской фигуры вместе с осями Ox_2y_2 и относительного движения точки, которое будет происходить так, как двигаются точки тела, вращающегося вокруг оси Oz_2, направленной перпендикулярной плоскости рисунка на читателя (на рисунке не показана). Тогда скорость точки M относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1$ является абсолютной скоростью и определяется по теореме сложения скоростей:

$$\overline{V}_M=\overline{V}_a=\overline{V}_e+\overline{V}_r.$$

Пусть (m) – точка подвижной плоскости Ox_2y_2, с которой совпадает в заданный момент времени точка плоской фигуры M. Тогда, учитывая, что переносное движение – поступательное, получим:

$$\overline{V}_e=\overline{V}_m=\overline{V}_O.$$

Относительная скорость точки от вращательного движения плоской фигуры вокруг оси Oz_2 (или относительно полюса O) по формуле Эйлера равна $\overline{V}_r=\overline{\omega}\times\overline{r}$ и следовательно:

$$\overline{V}_M=\overline{V}_O+\overline{\omega}\times\overline{r}$$

$$\text{или}\quad \overline{V}_M=\overline{V}_O+\overline{V}_{MO}. \tag{13.4}$$

В формуле (13.4) символическая запись $\overline{V}_{MO}$ означает «скорость точки M от вращательного движения вокруг точки O».

Таким образом, *скорость произвольной точки плоской фигуры в некоторый момент времени равна геометрической сумме скорости полюса и скорости рассматриваемой точки в относительном вращательном движении плоской фигуры вокруг полюса.*

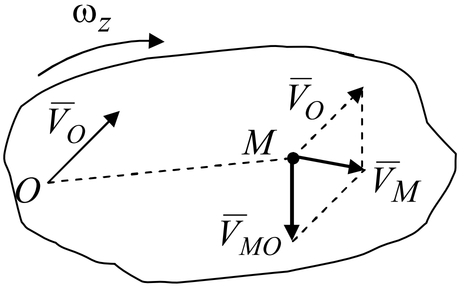


Рис. 13.7

Покажем, как найти скорость точки тела в заданный момент времени по формуле (13.4), если задан закон плоского движения:

$$x_{1O}=x_{1O}(t),\ y_{1O}=y_{1O}(t),\ \varphi=\varphi(t). \tag{13.5}$$

По первым формулам (13.5), определяющим закон движения полюса O, определим вектор $\overline{V}_O$ по величине и направлению (рис. 13.7). По третьей формуле (13.5) определим угловую скорость плоской фигуры $\omega_z=\dot{\varphi}$. Пусть вращение происходит по часовой стрелке. По модулю $V_{MO} = \omega \cdot OM$. Направим вектор $\overline{V}_{MO}$ перпендикулярно OM в сторону вращения плоской фигуры. Вектор скорости точки M получим, сложив векторы $\overline{V}_O$ и $\overline{V}_{MO}$ по правилу параллелограмма.

Мгновенный центр скоростей

Формула (13.4) существенно упрощается, если в качестве полюса выбрать в рассматриваемый момент времени такую точку подвижной плоскости Oxy, жестко связанную с плоской фигурой, скорость которой равна нулю. Такая точка носит название *мгновенного центра скоростей.* Обозначим ее – P. Точка P не обязательно принадлежит плоской фигуре. Она принадлежит подвижной плоскости Oxy.

Теорема. *Если в некоторый момент времени плоское движение тела таково, что* $\omega_z \neq 0$, *то*

1) *мгновенный центр скоростей существует и он единственный*;

2) *распределение скоростей в данный момент времени таково, как если бы тело совершало вращательное движение вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей.*

Доказательство. Пусть для определенности $\omega_z > 0$ и существует точка A, скорость которой не равна нулю в заданный момент времени t (иначе точка A – мгновенный центр скоростей) (рис. 13.8). Повернем вектор $\overline{V}_A$ на 90 ° в направлении дуговой стрелки ω_z $(\omega_z > 0)$ и отложим на этом луче отрезок

$$AP = \frac{|\overline{V}_A|}{\omega_z}.$$

Так как $\omega_z \neq 0$, то AP – конечное число. Возьмем точку A в качестве полюса и вычислим скорость точки P по формуле (13.4): $\overline{V}_P = \overline{V}_A + \overline{V}_{PA}$,

где $|\overline{V}_{PA}| = \omega_z \cdot AP = \omega_z \cdot \dfrac{|V_A|}{\omega_z} = V_A$.

А так как $\overline{V}_{PA} \perp AP$, то $\overline{V}_P = \overline{V}_A + (-\overline{V}_A) = 0$.

Итак, $V_P = 0$ и точка P – мгновенный центр скоростей. Из построения видно, что эта точка единственная.

2. Примем точку P за полюс. Тогда формула (13.4) будет иметь вид:

$$\overline{V}_M = \overline{V}_P + \overline{V}_{PM} = \overline{V}_{PM} = \overline{\omega} \times \overline{PM}.$$

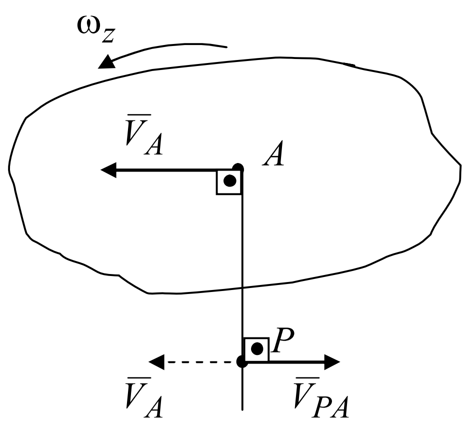


Рис. 13.8

Следовательно, $\overline{V}_M = \overline{\omega} \times \overline{PM}$.
Теорема доказана.

Способы отыскания мгновенного центра скоростей

Рассмотрим некоторые частные случаи. На рис. 13.9 − 13.12 показаны способы нахождения мгновенного центра скоростей по скоростям двух точек плоскости фигуры. На рис. 13.9 известен вектор скорости $\overline{V}_A$ точки A и прямая, по которой направлен вектор скорости точки B.

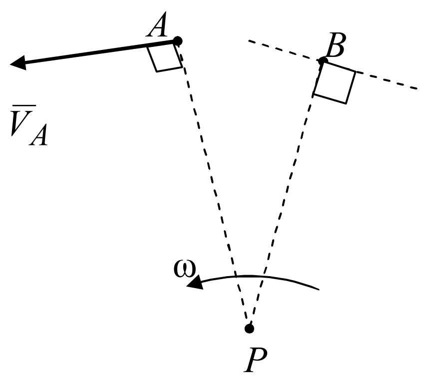


Рис. 13.9

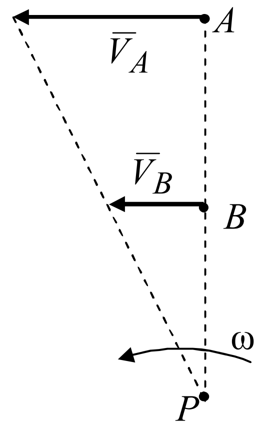


Рис. 13.10

Мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров к скоростям, восстановленным в этих точках. Угловая скорость ω находится по известной величине скорости V_A: $\omega = \dfrac{V_A}{AP}$.

В случае, показанном на рис. 13.10 угловую скорость можно найти, пользуясь свойством пропорции, по одной из формул:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_A - V_B}{AB}.$$

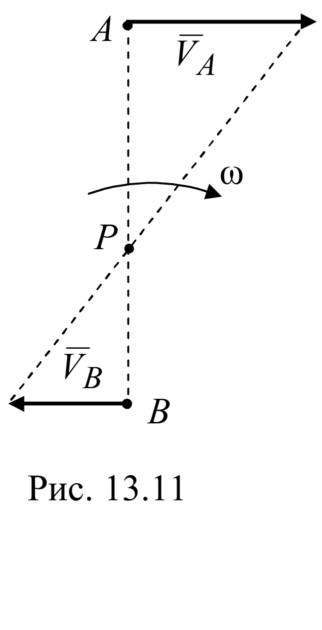


Рис. 13.11

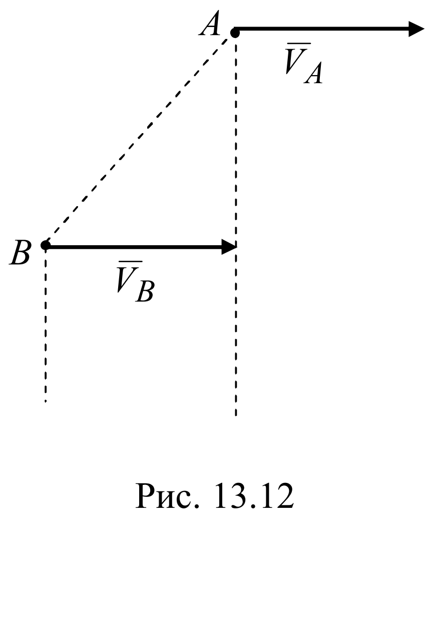


Рис. 13.12

В случае, показанном на рис. 13.11, угловую скорость можно определить по формулам:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_A + V_B}{AB}.$$

В случае, когда скорости точек A и B плоской фигуры параллельны, но не перпендикулярны к AB (рис. 13.12), мгновенный центр скоростей находится в бесконечности, и, следовательно, угловая скорость равна нулю. Векторы скоростей всех точек плоской фигуры в данный момент времени будут равны:

$$\overline{V}_A = \overline{V}_B.$$

Движение плоской фигуры в этом случае в данный момент времени называют *мгновенно поступательным*.

При качении без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого (рис. 13.13) мгновенный центр скоростей совпадает с точкой соприкосновения тел, так как при отсутствии скольжения $V_P = 0$. Угловую скорость тела в этом случае можно вычислить по формуле:

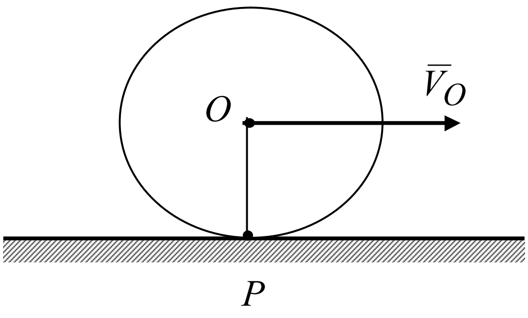


Рис. 13.13

$$\omega = \frac{V_O}{OP}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какое движение твёрдого тела называется плоскопараллельным (плоским)?

2. Запишите уравнения плоского движения.

3. Как раскладывается плоское движение тела на два простейших движения?

4. Запишите формулу для определения скорости точки тела, совершающего плоское движение.

5. Что такое мгновенный центр скоростей?

6. Сформулируйте теорему о мгновенном центре скоростей.

7. Как связана скорость точки с расстоянием от неё до мгновенного центра скоростей при плоском движении тела?

8. Где находится мгновенный центр скоростей колеса, катящегося без скольжения по неподвижному рельсу?

Лекция № 14

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Выведем формулу, позволяющую определить ускорение произвольной точки M плоской фигуры в заданный момент времени.

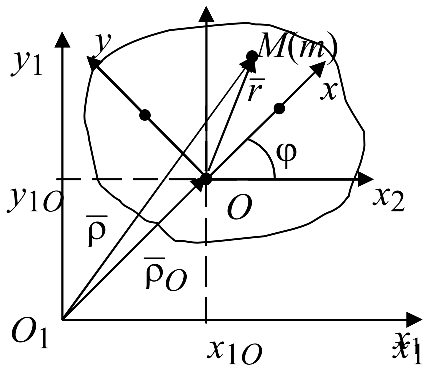


Рис. 14.1

На рис. 14.1, как и в лекции № 13 $O_1x_1y_1$ – неподвижная система координат; O – полюс; Oxy – подвижная система координат, жестко связанная с плоской фигурой, Ox_2y_2 – подвижная система координат, совершающая поступательное движение.

Рассматривая движение точки M плоской фигуры как сложное, по теореме сложения ускорений при переносном поступательном движении имеем:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_a = \overline{a}_e + \overline{a}_r. \qquad (14.1)$$

Пусть (m) – точка подвижной плоскости Ox_2y_2, с которой совпадает в заданный момент времени точка M. Тогда, учитывая, что при поступательном движении ускорения всех точек равны, переносное ускорение равно:

$$\overline{a}_e = \overline{a}_m = \overline{a}_O.$$

Относительное ускорение точки M от относительного вращательного движения плоской фигуры вокруг полюса O обозначаем $\overline{a}_{MO}$:

$$\overline{a}_r = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{V} = \overline{a}_{MO}.$$

Тогда формула (14.1) примет вид:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_O + \overline{a}_{MO}. \qquad (14.2)$$

Ускорение произвольной точки плоской фигуры при плоском движении в заданный момент времени равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки от относительного вращательного движения плоской фигуры вокруг полюса.

Ускорение точки от вращательного движения, как известно, раскладывается на касательную и нормальную составляющие:

$$\overline{a}_{MO} = \overline{a}_O^{\tau} + \overline{a}_{MO}^{n}.$$

Тогда формулу (14.2) можно записать в форме:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_O + \overline{a}_{MO}^{\tau} + \overline{a}_{MO}^{n}. \qquad (14.3)$$

Пусть закон плоского движения тела задан

$$x_{1O} = x_{1O}(t),\ y_{1O} = y_{1O}(t),\ \varphi = \varphi(t). \qquad (14.4)$$

Тогда

$a^{\tau}_{MO} = \varepsilon_z \cdot OM$, $a^{n}_{MO} = \omega^2 \cdot OM$ и $a_{MO} = OM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$,

где $\varepsilon_z = \ddot{\varphi}$, $\omega = |\dot{\varphi}|$.

Предположим, что $\varepsilon_z > 0$ (рис. 14.2). Вектор нормального относительного ускорения $\bar{a}^{n}_{MO}$ будет направлен от точки M к полюсу O. Вектор касательного относительного ускорения $\bar{a}^{\tau}_{MO}$ будет направлен перпендикулярно отрезку OM в сторону дуговой стрелки углового ускорения ε_z.

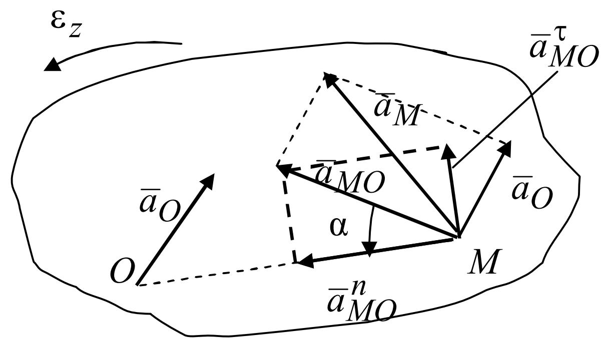


Рис. 14.2

Полное относительное ускорение $\bar{a}_{MO}$ составляет с отрезком OM угол α, тангенс которого можно определить по формуле:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^{\tau}_{MO}}{a^{n}_{MO}} = \frac{|\varepsilon_z|}{\omega^2}. \qquad (14.5)$$

Угол α при $\varepsilon_z > 0$ нужно откладывать от вектора ускорения $\bar{a}_{MO}$ к отрезку MO против хода часовой стрелки, при $\varepsilon_z < 0$ − по ходу часовой стрелки, т.е. во всех случаях, независимо от направления вращения тела, угол α всегда нужно откладывать в направлении дуговой стрелки углового ускорения.

Определяя вектор $\bar{a}_O$ по модулю $a_O = \sqrt{(\ddot{x}_{1O})^2 + (\ddot{y}_{1O})^2}$ и направлению из первых двух уравнений (14.4) и складывая его с вектором $\bar{a}_{MO}$, получим вектор полного ускорения точки $\bar{a}_M$.

Мгновенный центр ускорений

На лекции № 13 ввели понятие мгновенного центра скоростей, который обозначили буквой P. При плоском движении тела в каждый момент времени имеем новый мгновенный центр скоростей. Существует также мгновенный центр ускорений (МЦУ), который обозначается буквой Q.

Теорема. *В каждый момент движения плоской фигуры в своей плоскости, если* ε *и* ω *не равны нулю одновременно, существует единственная точка плоскости* Oxy, *жестко связанная с плоской фигурой,* *ускорение которой равно нулю. Ускорения точек плоской фигуры при этом таковы, как если бы она вращалась вокруг этой точки Q.*

Доказательство. Предположим, что в данный момент времени известны по модулю и направлению ускорение какой-либо точки плоской фигуры $\bar{a}_O$, угловая скорость ω и угловое ускорение ε_z в заданный момент времени. Предположим, что $\varepsilon_z > 0$. Вычислим $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{|\varepsilon_z|}{\omega^2}$ и отложим угол α от ускорения $\bar{a}_0$ в направлении дуговой стрелки углового ускорения ε_z, в данном случае против хода часовой стрелки (рис.14. 3). Проведем прямую *OL*. На этой прямой отложим отрезок $OQ = \dfrac{a_O}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$.

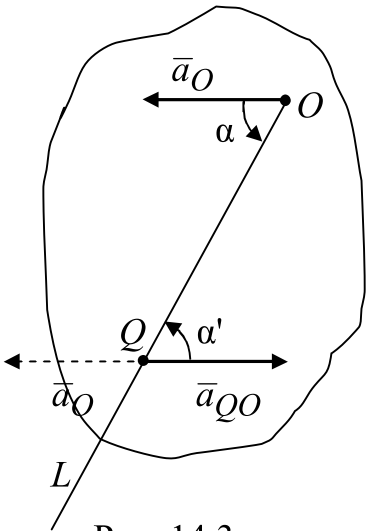


Рис. 14.3

Докажем, что $a_Q = 0$. Примем точку *O* за полюс. Тогда по формуле (14.2):

$$\bar{a}_Q = \bar{a}_O + \bar{a}_{QO},$$

где $a_{QO} = OQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Построим вектор $\bar{a}_{QO}$. Для этого необходимо в точке *Q* отложить угол α', тангенс которого равен $\mathrm{tg}\alpha' = \dfrac{|\varepsilon_z|}{\omega^2} = \mathrm{tg}\alpha$. Следовательно, $\alpha' = \alpha$.

Угол α' откладывается от ускорения $\bar{a}_{QO}$ к отрезку *OQ* против хода часовой стрелки. По построению векторы $\bar{a}_O$ и $\bar{a}_{QO}$ антипараллельны. Перенесем вектор $\bar{a}_O$ в точку Q. Тогда по модулю:

$$a_Q = a_O - a_{QO} = a_O - OQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_O - \frac{a_O\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = a_O - a_O = 0.$$

По построению эта точка будет единственной. Докажем, что ускорения всех точек плоской фигуры в данный момент времени будут такими, как если бы плоская фигура вращалась вокруг точки Q. Примем точку Q за полюс. Тогда по формуле (14.2)

$$\bar{a}_M = \bar{a}_Q + \bar{a}_{MQ} = \bar{a}_{MQ}.$$

Так как $\bar{a}_Q = 0$, имеем

$$\bar{a}_M = \bar{a}_{MQ}. \tag{14.6}$$

Следовательно, ускорение точки *M* будет таким же, как при вращении тела вокруг точки Q, и определяется по формулам:

$$a_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,,\ \text{tg}\alpha = \frac{|\varepsilon_z|}{\omega^2}. \qquad (14.7)$$

Угол α нужно откладывать от вектора ускорения $\bar{a}_M$ к отрезку QM (рис. 14.4).

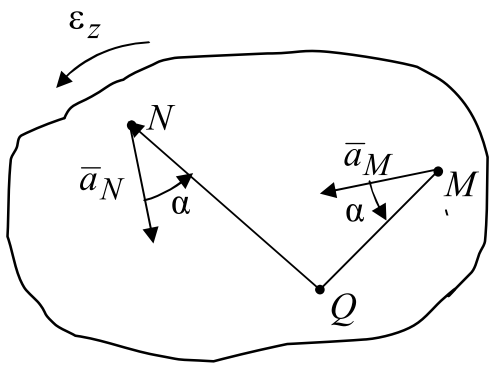


Рис. 14.4

Частные случаи

1. *Пусть* $\varepsilon = 0$ *в данный момент времени.*

Тогда $\text{tg}\alpha = \dfrac{|\varepsilon_z|}{\omega^2} = 0$, откуда $\alpha = 0$.

Следовательно, ускорения всех точек будут направлены к точке Q (рис.14.5)

По модулю ускорения точек равны:

$$a_M = a_{MQ} = a_{MQ}^n = MQ\omega^2.$$

$$a_N = a_{NQ} = a_{NQ}^n = NQ\omega^2.$$

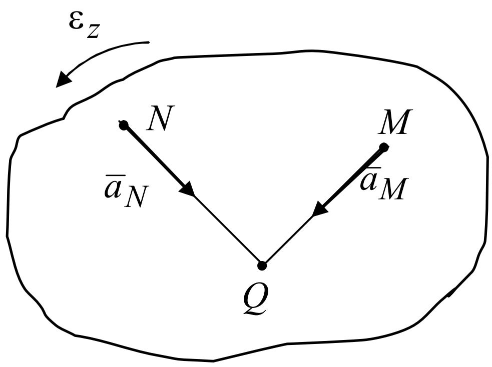


Рис. 14.5

2. *Пусть* $\omega = 0$ *в данный момент времени (случай мгновенно поступательного движения).*

В этом случае

$$tg\alpha = \frac{|\varepsilon_z|}{0} = \pm\infty \text{ и } \alpha = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Тогда ускорения всех точек тела перпендикулярны отрезкам, соединяющим точки с МЦУ (рис. 14.6). По модулю ускорения точек равны:

$$a_M = a_{MQ} = a_{MQ}^\tau = |\varepsilon_z| \cdot MQ.$$

$$a_N = a_{NQ} = a_{NQ}^\tau = |\varepsilon_z| \cdot NQ.$$

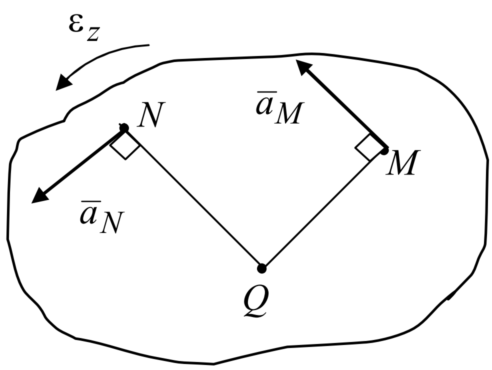


Рис. 14.6

Способы решения двух типов задач на определение ускорений точек плоской фигуры

На практике часто требуется определение ускорений точек тела в какой-либо момент времени по другим кинематическим характеристикам, известным в тот же момент времени. Рассмотрим решение двух типов задач на определение ускорений точек плоской фигуры с помощью формулы сложения ускорений (14.3).

Первый тип задач.

1. Известны векторы скорости $\overline{V}_A$ и ускорение $\overline{a}_A$ какой-либо точки A плоской фигуры в заданный момент времени. Эту точку принимают за полюс.

2. Известен мгновенный центр скоростей. Расстояние от полюса до мгновенного центра скоростей P − величина постоянная.

Требуется определить ускорение произвольной точки B плоской фигуры в заданный момент времени.

Дано: $\overline{V}_A$, $\overline{a}_A$, т.P, $PA = \text{const}$.
$\overline{a}_B = ?$

Алгоритм решения первого типа задач. Если у плоской фигуры известна скорость какой-либо точки A и мгновенный центр скоростей, то угловая скорость равна:

$$\omega = \frac{V_A}{AP}.$$

Если бы была известна функция скорости точки A, то можно было бы определить угловое ускорение, учитывая, что $AP = \text{const}$:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{AP}\frac{dV_A}{dt} = \frac{a_A^\tau}{AP}. \tag{14.8}$$

Таким образом, если в данный момент известно касательное ускорение a_A^τ (по известным векторам $\overline{V}_A$ и $\overline{a}_A$), то по формуле (14.8) можно определить угловое ускорение.

Тогда, применяя формулу (14.3) для точки B, получим:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau}. \tag{14.9}$$

В равенстве (14.9) $\overline{a}_A$ – известно, $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB$, $a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot AB$. Вектор $\overline{a}_B$ находится сложением известных векторов.

Пример 1.

Колесо катится по рельсу без проскальзывания с постоянной скоростью оси колеса V_O. Радиус колеса R (рис. 14.7).

Определить ускорение точки M на ободе колеса.

Решение. Из условия задачи $a_O = V_O = 0$. Точку O примем за полюс. Расстояние от полюса O до мгновенного центра скоростей постоянно:

$$OP = R = \text{const}.$$

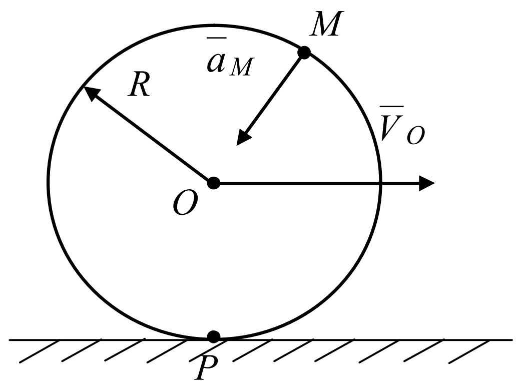


Рис. 14.7

Следовательно, по формуле (14.8):

$$\varepsilon = \frac{a_O^\tau}{OP} = \frac{a_O^\tau}{R} = \frac{a_O}{R} = 0,$$

откуда

$$a_{MO}^\tau = \varepsilon \cdot MO = 0.$$

Угловая скорость колеса равна $\omega = \dfrac{V_O}{R}$.

Тогда

$$\bar{a}_M = \bar{a}_O + \overline{a_{MO}^n} + \overline{a_{MO}^\tau}.$$

По модулю

$$a_M = a_{MO}^n = \omega^2 R.$$

Следовательно, ускорения всех точек на ободе колеса равны и направлены к центру колеса.

Второй тип задач.

1. Известны векторы скорости $\bar{V}_A$ и ускорения $\bar{a}_A$ какой-либо точки в данный момент времени.

2. Известна траектория другой точки B плоской фигуры.

Определить в данный момент времени ускорение произвольной точки M плоской фигуры.

Дано: $\bar{V}_A$, $\bar{a}_A$, траектория точки B. Найти $\bar{a}_M$.

Алгоритм решения второго типа задач. Примем точку A за полюс и воспользуемся формулой (14.3) для определения ускорения точки B:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau. \tag{14.10}$$

В равенстве (14.10) вектор $\overline{a}_A$ – известен. Вектор $\overline{a}_{BA}^n$ определяется, так как определяется угловая скорость тела $\omega = \dfrac{V_A}{AP}$ (мгновенный центр скоростей P определяется по скорости точки $\overline{V}_A$ и линии действия точки B):

$$a_{BA}^n = \omega^2 AB.$$

Вектор $\overline{a}_{BA}^\tau$ направим перпендикулярно вектору $\overline{a}_{BA}^n$ вверх (рис. 14.8) (если ошиблись в направлении, то в решении получим $\overline{a}_{BA}^\tau$ со знаком минус).

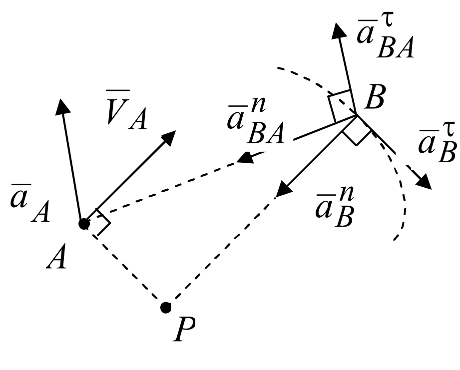


Рис. 14.8

Так как траектория точки B известна, то вектор ускорения $\overline{a}_B$ можно разложить на нормальную и касательную составляющие:

$$\overline{a}_B^n + \overline{a}_B^\tau = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau. \quad (14.11)$$

В равенстве (14.11):

$$a_B^n = \frac{V_B^2}{\rho}, V_B = \omega PB.$$

Таким образом, в уравнении (14.11) имеем две неизвестные: величины a_B^τ и a_{BA}^τ. Векторное уравнение (14.11) в проекции на оси x и y распадается на два скалярных уравнения:

$$\begin{cases} a_{Bx}^n + a_{Bx}^\tau = a_{Ax} + a_{BAx}^n + a_{BAx}^\tau; \\ a_{By}^n + a_{By}^\tau = a_{Ay} + a_{BAy}^n + a_{BAy}^\tau. \end{cases}$$

Следовательно, имеем два уравнения с двумя вышеуказанными неизвестными, и задача разрешима.

Пример 2.

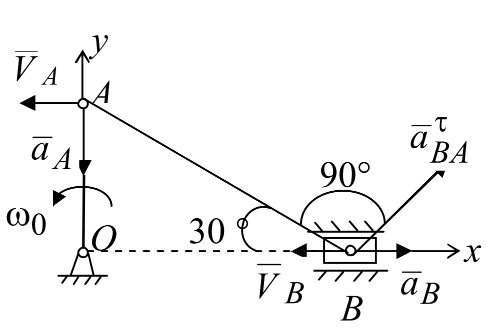


Рис. 14.9

Длина кривошипа кривошипо-ползунного механизма $OA = l$, длина шатуна $AB = 2l$. Кривошип вращается равномерно с угловой скоростью ω_0 (рис. 14.9). Определить ускорение ползуна B.

Решение. Кривошип OA совершает вращательное движение, и, следовательно, $V_A = \omega_0 l$.

Шатун AB в данном положении совершает мгновенно-поступательное движение, и $\omega_{AB} = 0$. Так как кривошип вращается равномерно, то

$$a_A = a_A^n = \omega_0^2 l.$$

Определим ускорение точки B по формуле (14.10), приняв за полюс точку A и учитывая, что $a_{BA}^n = \omega_{BA}^2 BA = 0$:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^\tau. \qquad (14.12)$$

Укажем на рис. 14.9 направления векторов $\bar{a}_{BA}^\tau$ и $\bar{a}_B^\tau$ и спроектируем равенство (14.12) на оси x, y:

$$\begin{cases} a_B = a_{BA}^\tau \cos 60^\circ; \\ 0 = -a_A + a_{AB}^\tau \cos 30^\circ, \end{cases}$$

откуда $a_B = \dfrac{a_A \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \dfrac{\omega_0^2 l}{\sqrt{3}}$.

Вопросы для самопроверки

1. Запишите формулу для определения ускорения точки при плоском движении тела.
2. Что называется мгновенным центром скоростей?
3. Сформулируйте теорему о мгновенном центре скоростей.
4. Если известен мгновенный центр ускорений и $\varepsilon = 0$ в данный момент времени, то как будут направлены векторы ускорений точек плоской фигуры?
5. Как определить мгновенный центр ускорений плоской фигуры при $\omega = 0$ и известных направлениях векторов двух её точек?

Лекция № 15

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Будем рассматривать движение твердого тела T и определять его кинематические характеристики по отношению к системе координат $O_1x_1y_1z_1$, если задано:

1) движение твердого тела относительно подвижной системы координат $O_2x_2y_2z_2$ (*относительное движение*);

2) движение системы координат $O_2x_2y_2z_2$ относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ (*переносное движение*) (рис.15.1).

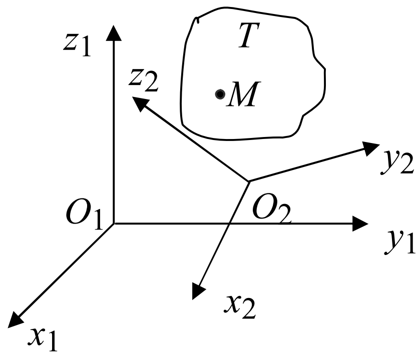


Рис. 15.1

При такой постановке задачи движение твердого тела по отношению к системе координат $O_1x_1y_1z_1$ называется *сложным*. Определение движения тела и его кинематических характеристик относительно неподвижной системы координат по составляющим движения называется *сложением движений*.

Сложение поступательных движений

Пусть $\overline{V}_1$ – скорость поступательного движения тела T относительно системы координат $O_2x_2y_2z_2$, $\overline{V}_2$ – скорость поступательного движения системы координат $O_2x_2y_2z_2$ относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Тогда произвольная точка M тела T совершает сложное движение и по теореме сложения скоростей ее абсолютная скорость равна:

$$\overline{V}_M = \overline{V}_e + \overline{V}_r, \quad \text{где } \overline{V}_e = \overline{V}_1, \ \overline{V}_r = \overline{V}_2 .$$

Следовательно, скорости всех точек тела одинаковы и равны:

$$\overline{V}_M = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 .$$

Таким образом, *при сложении поступательных движений со скоростями* $\overline{V}_1$ и $\overline{V}_2$ *абсолютное движение будет поступательным со скоростью* $\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2$.

Сложение вращательных движений с пересекающимися осями

Пусть тело T совершает сложное движение, вращаясь вокруг оси z_2 подвижной системы координат $O_2x_2y_2z_2$ с относительной угловой скоростью $\overline{\omega}_2$, а система координат $O_2x_2y_2z_2$ вращается вокруг оси z_1 неподвижной системы координат с переносной скоростью $\overline{\omega}_1$ (рис. 15.2).

Найдем абсолютную скорость произвольной точки M тела T, рассматривая ее движение как сложное. По теореме сложения скоростей

$$\overline{V}_M = \overline{V}_e + \overline{V}_r ,$$

где $\overline{V}_e = \overline{\omega}_1 \times \overline{Om} = \overline{\omega}_1 \times \overline{OM}$ ((m) – точка подвижной системы координат $O_2x_2y_2z_2$), $\overline{V}_r = \overline{\omega}_2 \times \overline{OM}$.

Тогда

$$\overline{V}_M = \overline{\omega}_2 \times \overline{OM} + \overline{\omega}_1 \times \overline{OM} = (\overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_1) \times \overline{OM}. \quad (15.1)$$

Обозначим угловую скорость результирующего движения $\overline{\Omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$.

Получим:

$$\overline{V}_M = \overline{\Omega} \times \overline{r} .$$

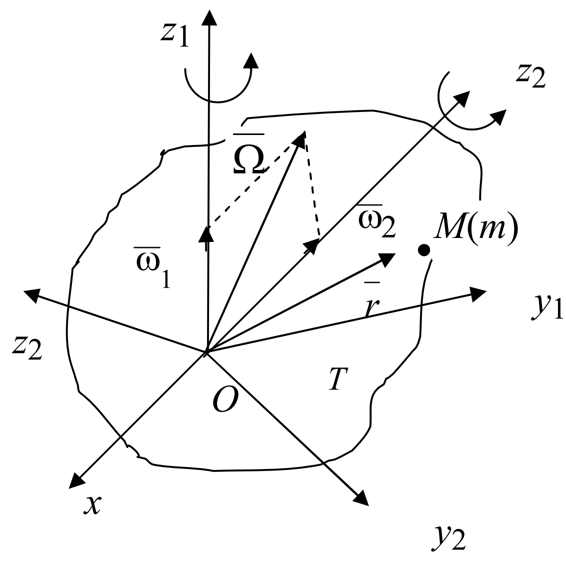


Рис. 15.2

Если произвольную точку M взять на прямой, вдоль которой направлен вектор угловой скорости $\overline{\Omega}$, то из определения векторного произведения ее скорость будет равна нулю. Следовательно, в данный момент времени через неподвижную точку пересечения осей z_1 и z_2 (точка O, рис. 15.2) будет проходить неподвижная прямая, совпадающая с направлением вектора угловой скорости $\overline{\Omega}$. Прямая в теле, скорость точек которой в данный момент времени равна нулю, называется *мгновенной осью вращения*. В отличие от неподвижной оси ее направление непрерывно изменяется, и результирующее движение тела при этом будет *мгновенно вращательным*. Таким образом, *при сложении вращательных движений с угловыми скоростями* $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, *оси которых пересекаются, абсолютное движение тела будет мгновенно вращательным с угловой скоростью* $\overline{\Omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$.

Сложение вращательных движений вокруг параллельных осей

Пусть диск вращается вокруг оси O_2z_2 с относительной угловой скоростью $\overline{\omega}_2$. Ось O_2z_2 скреплена с валом, который вращается относительно оси O_1z_1, скрепленной с неподвижной опорой. Вал вращается с переносной угловой скоростью $\overline{\omega}_1$. Рассмотрим два случая.

1. $\overline{\omega}_1 \uparrow\uparrow \overline{\omega}_2$ (рис. 15.3).

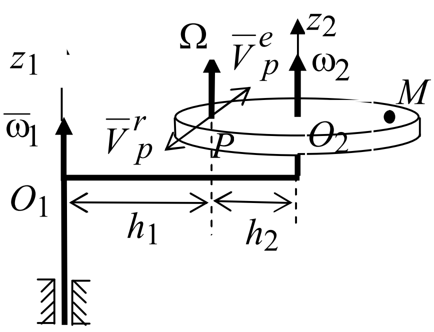


Рис. 15.3

Результирующее движение диска будет плоским, и, следовательно, существует мгновенный центр скоростей, лежащий в плоскости движения диска, через который проходит мгновенная ось вращения, параллельная осям O_1z_1 и O_2z_2. Скорость произвольной точки M диска определится по формуле:

$$V_M = \Omega \cdot h, \tag{15.2}$$

где Ω – абсолютная угловая скорость диска, h – расстояние от точки M до мгновенного центра скоростей.

Точка диска P находится между осями z_1 и z_2 на расстояниях h_1 до оси O_1z_1 и h_2 – до оси O_2z_2.

По теореме сложения скоростей ее абсолютная скорость равна:

$$\overline{V}_p = \overline{V}_p^e + \overline{V}_p^r \text{ или } V_p = V_p^e - V_p^r = \omega_1 h_1 - \omega_2 h_2 .$$

Следовательно, при

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \tag{15.3}$$

$V_p = 0$ и точка P – мгновенный центр скоростей. Тогда скорость точки диска O_2 оси O_2z_2 по формуле (15.2) равна:

$$V_{O_2} = \Omega h_2 . \tag{15.4}$$

С другой стороны, учитывая соотношение (15.3), получим:

$$V_{O_2} = \omega_1(h_1 + h_2) = \omega_2 h_2 + \omega_1 h_2 = (\omega_1 + \omega_2)h_2 . \tag{15.5}$$

Сравнивая формулы (15.4) и (15.5) имеем:

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 .$$

Таким образом, при сложении вращательных движений *вокруг параллельных осей с угловыми скоростями* ω_1 и ω_2, *когда вращения направлены в одну сторону, абсолютное движение тела будет мгновенно вращательным с угловой скоростью* $\Omega = \omega_1 + \omega_2$.

При сложении вращений вокруг параллельных осей, когда вращения направлены в разные стороны с разными по модулю угловыми скоростями, точка P будет делить расстояние между осями внешним образом, за осью вращения составляющего движения, имеющего большую по модулю угловую скорость. Например, при $\omega_2 > \omega_1$ точка P будет находиться правее оси O_2z_2.

При этом

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1 . \tag{15.6}$$

2. $\overline{\omega}_1 = -\overline{\omega}_2$ (рис. 15.4).

По формуле (15.6) $\Omega = \omega_2 - \omega_1$=0.

Абсолютную скорость произвольной точки M тела определим по теореме сложения скоростей:

$$\overline{V}_M = \overline{V}_M^e + \overline{V}_M^r = \overline{\omega}_1 \times O_1\overline{M} + \overline{\omega}_2 \times \overline{O_2M} =$$
$$= \overline{\omega}_1 \times (O_1\overline{M} - \overline{O_2M}) = \overline{\omega}_1 \times \overline{O_1O_2}.$$

Следовательно, скорости всех точек тела в данный момент времени равны между собой и результирующее движение тела – мгновенно поступательное (поступательное, если скорости точек тела равны в каждый момент времени) со скоростью:

$$\overline{V}_M = \overline{\omega}_1 \times \overline{O_1O_2} = \overline{\omega}_2 \times \overline{O_2O_1}.$$

Совокупность двух вращений вокруг параллельных осей с одинаковыми по модулю и противоположно направленными угловыми скоростями называется *парой вращений* $(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2)$ с моментом пары

$$\overline{M}(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) = \overline{\omega}_1 \times \overline{O_1O_2} = \overline{\omega}_2 \times \overline{O_2O_1}.$$

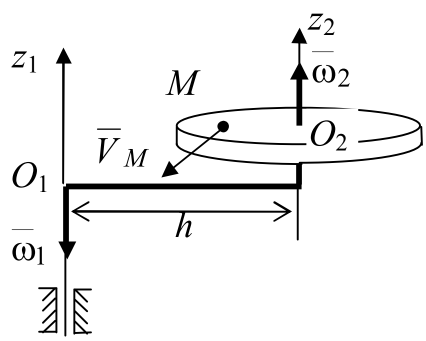


Рис. 15.4

Таким образом, *пара вращений эквивалента мгновенно поступательному* (*поступательному*) *движению со скоростью* $\overline{V}$, *равной моменту пары угловых скоростей этих вращений*.

Пример 1.

Угловая скорость зубчатого колеса I радиуса $r_1 = 0{,}5$ м равна $\omega_1 = 2$ рад/с (рис. 15.5). Определить относительную угловую скорость ω_r колеса II радиуса $r_2 = 0{,}2$ м по отношению к колесу I.

Решение. Абсолютная угловая скорость второго колеса определяется по формуле $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{r_1}{r_2}$ или $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{r_1}{r_2}$.

Разложим абсолютное вращение второго колеса на переносное вместе с первым колесом вокруг оси, проходящей через точку O_1 с угловой скоростью $\omega_e = \omega_1$, и искомое относительное вращение второго колеса по отношению к первому колесу вокруг оси, проходящей через точку сцепления колес P.

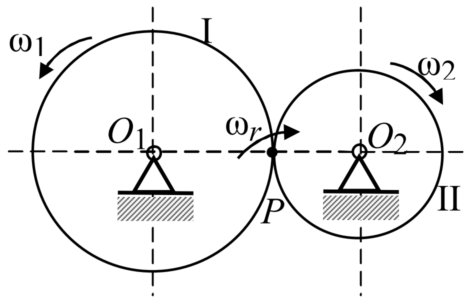


Рис. 15.5

Тогда по формуле (15.6): $\omega_2 = \omega_r - \omega_e = \omega_r - \omega_1$,

откуда $\omega_r = \omega_2 + \omega_1 = \omega_1 \dfrac{r_1}{r_2} + \omega_1 = \dfrac{\omega_1(r_1 + r_2)}{r_2} = \dfrac{2(0{,}5 + 0{,}2)}{0{,}2} = 7$ рад/с.

Вопросы для самопроверки

1. Какое движение твердого тела называется сложным?

2. Каким будет результирующее движение тела при сложении двух поступательных движений?

3. Какое результирующее движение совершает тело при сложении двух вращений вокруг пересекающихся осей?

4. Что называется мгновенной осью вращения?

5. Как определяется точка приложения и величина вектора угловой скорости тела, вращающегося вокруг двух параллельных осей в одну сторону?

6. Что называется парой вращений?

7. Какое результирующее движение совершает тело при сложении пары вращений?

Лекция № 16

СФЕРИЧЕСКОЕ И СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Сферическим называется движение твердого тела, одна точка которого неподвижна во все время движения.

Твердое тело с одной закрепленной точкой имеет три степени свободы, т.е. для определения положения тела достаточно задать три параметра. За эти параметры примем углы Эйлера (ψ, θ, φ). Пусть O – неподвижная точка тела и $Ox_1y_1z_1$ – неподвижная система координат (рис. 16.1), $Oxyz$ – подвижная система координат, жестко связанная с телом. Линия пересечения OK координатной плоскости Oxy с координатной плоскостью Ox_1y_1 называется *линией узлов*. Угол ψ между неподвижной осью Ox_1 и линией узлов называется углом *прецессии*. Угол θ между осями Oz_1 и Oz называется углом *нутации*. Угол φ, составляемый линией узлов с осью Ox, называется углом *собственного вращения*. Все углы отсчитываются против хода часовой стрелки, как указано на рис. 16.1.

Таким образом, уравнения

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t) \tag{16.1}$$

являются уравнениями движения тела вокруг неподвижной точки.

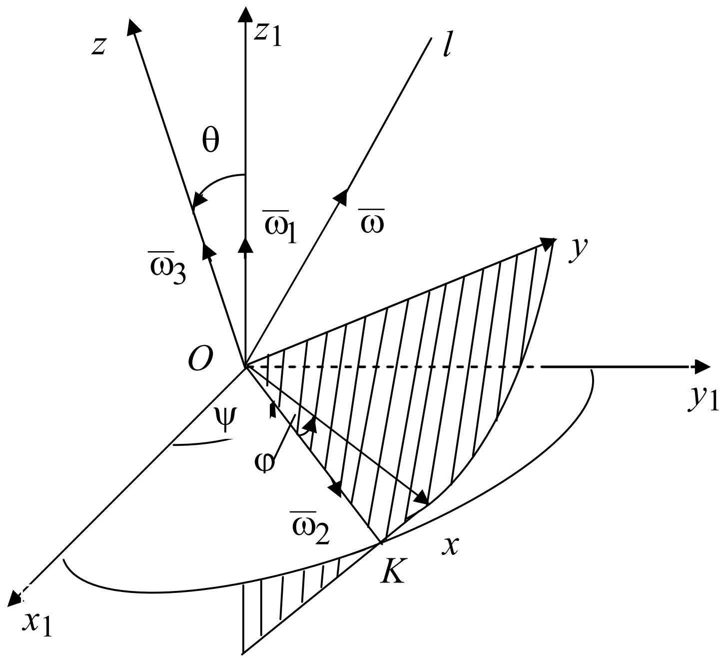


Рис. 16.1

Угловая скорость тела

При изменении угла ψ тело совершает вращение вокруг оси Oz_1 (прецессия) с угловой скоростью $\omega_1 = \dot{\psi}$, при изменении угла θ − вращение вокруг линии узлов OK (нутация) с угловой скоростью $\omega_2 = \dot{\theta} u$. При изменении угла φ тело совершает вращение вокруг оси Oz (собственное вращение) с угловой скоростью $\omega_1 = \dot{\varphi}$. Векторы $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3$ этих угловых скоростей направлены соответственно по осям Oz_1, OK, Oz.

Таким образом, сферическое движение можно рассматривать как сложное движение, полученное сложением трех вращательных движений с угловыми скоростями $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3$, и, следовательно, сферическое движение – это *мгновенно вращательное движение* с угловой скоростью

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3, \tag{16.2}$$

направленной вдоль мгновенной оси l (рис. 16.1).

Угловое ускорение тела

Угловым ускорением тела называется векторная величина равная первой производной от вектора угловой скорости тела по времени.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \qquad (16.3)$$

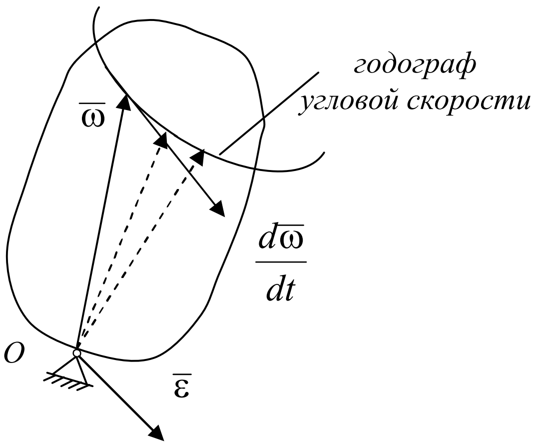


Рис. 16.2

Из определения следует, что вектор углового ускорения можно рассматривать как скорость конца переменного вектора $\bar{\omega}$ (рис. 16.2). Вектор углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ будет направлен по касательной к годографу вектора угловой скорости и приложен в точке O. При сферическом движении векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ будут всегда расположены под углом друг к другу.

Кинематические уравнения Эйлера

Обозначим $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора угловой скорости $\bar{\omega}$ на осях x, y, z. Проектируя равенство (16.2) на оси x, y, z, получим:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi; \\ \omega_y = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi; \\ \omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}. \end{cases} \qquad (16.4)$$

Выражения (16.4) для проекций мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ тела на связанные с ним координатные оси называются *кинематическими уравнениями Эйлера.*

Распределение скоростей и ускорений в теле

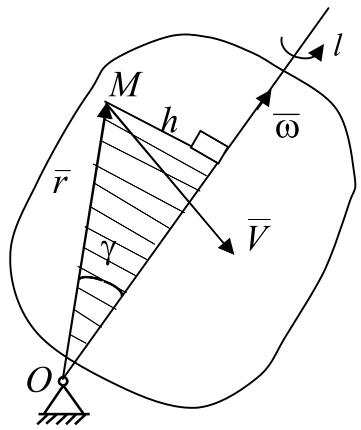


Рис. 16.3

Скорость произвольной точки M тела (рис. 16.3) определяется по формуле Эйлера векторным произведением:

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \qquad (16.5)$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор точки M, проведенной из неподвижной точки O. По модулю

$$V = \omega r \sin\gamma = \omega h,$$

где h – расстояние от точки M до мгновенной оси вращения.

В системе координат *Oxyz* векторное произведение можно представить виде

$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y)\overline{j} + (\omega_z x - \omega_x z)\overline{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\overline{k}. \quad (16.6)$$

В формуле (16.6) коэффициенты при ортах $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – это проекции вектора скорости $\overline{V}$ на оси *x*, *y*, *z*:

$$V_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad V_y = \omega_x x - \omega_x z, \quad V_z = \omega_x y - \omega_y z .$$

Ускорение точки по определению равно:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt}.$$

Дифференцируя (16.5) по времени, получим:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{V} .$$

Формула

$$\overline{a} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{V} \quad (16.7)$$

называется *формулой Ривальса.*

В формуле (16.7) ускорение $\overline{a}_{\text{вр}} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ называется *вращательным ускорением*, а ускорение $\overline{a}_{\text{ос}} = \overline{\omega} \times \overline{V}$ – *осестремительным ускорением* точки *M*.

Вектор $\overline{a}_{\text{вр}}$ будет направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через точку *M* и вектор $\overline{\varepsilon}$ в ту сторону, откуда кратчайший переход от вектора $\overline{\varepsilon}$ к вектору $\overline{r}$ виден против хода часовой стрелки (рис. 16.4). По модулю

$$a_{\text{вр}} = \varepsilon r \sin\beta = \varepsilon h_1,$$

где h_1 – расстояние от точки *M* до вектора $\overline{\varepsilon}$.

Вектор $\overline{a}_{\text{ос}}$ направлен перпендикулярно плоскости в которой лежат векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{V}$ и направлен вдоль перпендикуляра, опущенного из точки *M* на мгновенную ось вращения *l* в сторону к последней.

По модулю

$$a_{\text{ос}} = \omega V \sin 90^{\circ} = \omega^2 h, \text{ так как } V = \omega h,$$

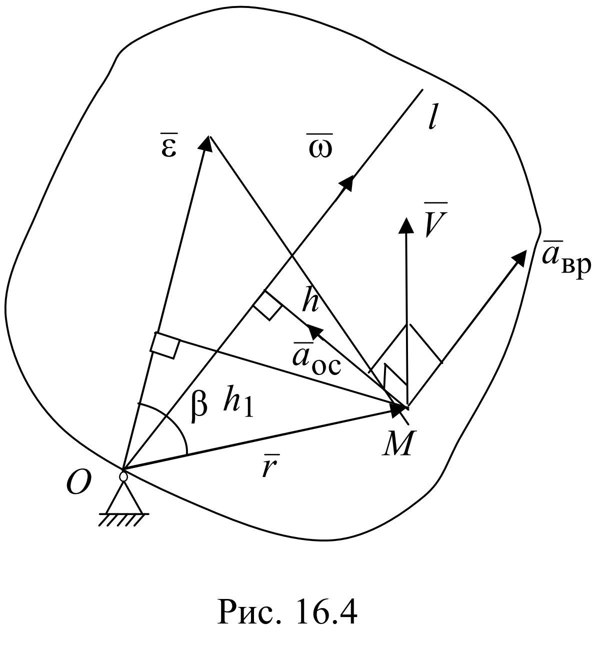


Рис. 16.4

где h – расстояние от точки M до мгновенной оси вращения l.

Движение свободного твердого тела

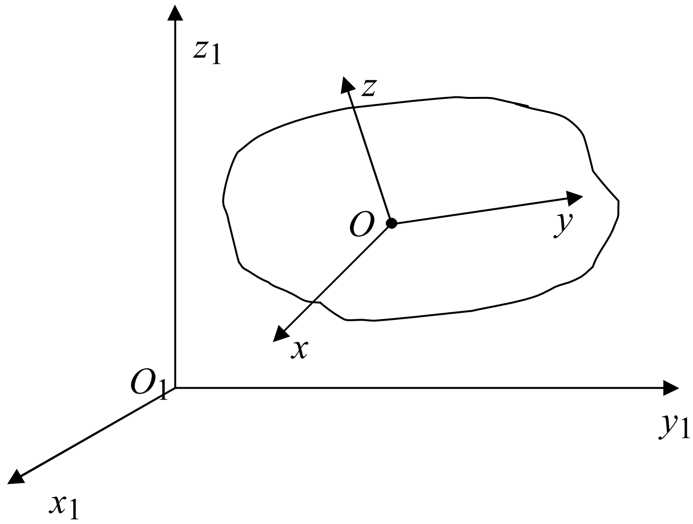


Рис. 16.5

Рассмотрим движение свободного твердого тела. Пусть $O_1x_1y_1z_1$ – неподвижная система координат. Выберем произвольную точку O тела за полюс (рис. 16.5), и пусть $Oxyz$ – подвижная система координат, жестко связанная с телом.

Разложение движения тела на поступательное и сферическое

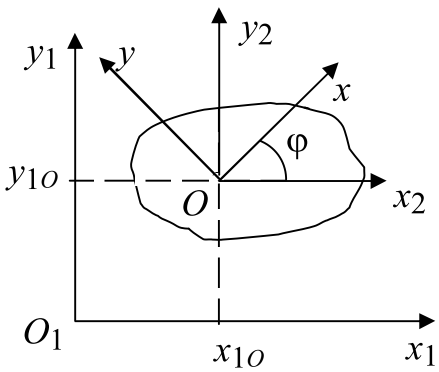


Рис. 16.6

Сделаем отступление и вспомним, как раскладывали плоское движение (рис. 16.6).

Введением вспомогательных осей Ox_2y_2 плоское движение раскладывалось на два простых движения: переносное поступательное движение тела вместе с осями Ox_2y_2 и относительное вращательное движение вокруг оси Oz_2. Движение тела задавалось тремя параметрами ($K = 3$):

$$x_{1O} = x_{1O}(t),\ y_{1O} = y_{1O}(t),\ \varphi = \varphi(t), \tag{16.8}$$

где первые два уравнения определяют движение вспомогательной системы координат Ox_2y_2, а последнее уравнение определяет вращательное движение тела относительно вспомогательной системы координат.

Используем эту же идею разложения движения тела. Введем вспомогательные оси $Ox_2y_2z_2$, движущиеся поступательно. Примем это движение за переносное. Тогда относительным будет сферическое движение тела по отношению к осям $Ox_2y_2z_2$. Указанное разложение не единственно, поскольку выбор полюса произвольный.

Определение положения тела и уравнения его движения

Как известно, положение свободного твердого тела определяется шестью параметрами (K = 6). За первые три параметра примем координаты полюса, а положение тела относительно осей $Ox_2y_2z_2$ будем определять как и в лекции №15 углами Эйлера:

$$\{x_{1O}, y_{1O}, z_{1O}, \psi, \theta, \varphi\}.$$

Следовательно, для того чтобы задать движение свободного твердого тела, необходимо эти параметры задать как функции времени, и уравнения движения тела будут иметь вид:

$$x_{1O} = x_{1O}(t),\ y_{1O} = y_{1O}(t),\ z_{1O} = z_{1O}(t),\ \psi = \psi(t),\ \theta = \theta(t),\ \varphi = \varphi(t). \quad (16.9)$$

Последние три уравнения (16.9) инвариантны относительно выбора полюса (доказывается так, же, как для плоского движения).

Распределение скоростей и ускорений в теле

Вернемся к рис. 16.6. Введением вспомогательных осей $Ox_2y_2z_2$ (рис. 16.7) разложим движение тела на переносное поступательное и относительное – сферическое. Тогда скорость произвольной точки M тела, совершающей вместе с ним сложное движение, определяется по теореме сложения скоростей:

$$\overline{V}_M = \overline{V}_e + \overline{V}_r. \quad (16.10)$$

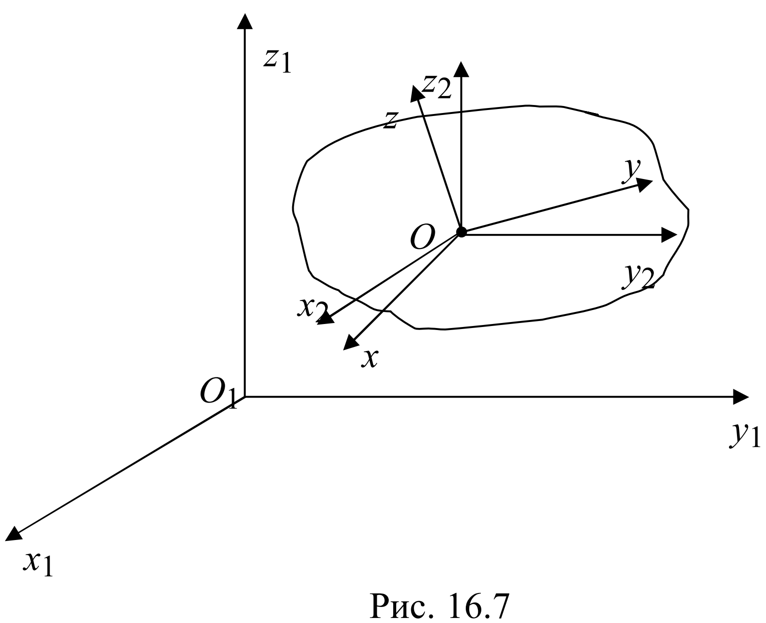


Рис. 16.7

Так как переносное движение поступательное, а при поступательном движении скорости всех точек равны, переносная скорость $\overline{V}_e$ в формуле (16.10) равна скорости полюса $\overline{V}_e = \overline{V}_O$. Относительная скорость точки от сферического движения вокруг полюса равна $\overline{V}_r = \overline{\omega} \times \overline{r}$, где $\overline{\omega}$ − угловая скорость тела относительно системы координат $Ox_2y_2z_2$.

Следовательно, формулу (16.10) можно записать в виде:

$$\overline{V}_M = \overline{V}_O + \overline{\omega} \times \overline{r}. \tag{16.11}$$

Таким образом, скорость любой точки свободного тела геометрически складывается из скорости произвольно выбранного полюса и скорости этой точки при движении тела вокруг полюса.

Ускорение произвольной точки *M*, как участвующей в сложном движении при переносном поступательном движении, равно геометрической сумме переносного и относительного ускорений:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_e + \overline{a}_r. \tag{16.12}$$

В формуле (16.12) переносное ускорение $\overline{a}_e$ равно ускорению полюса $\overline{a}_O$. Относительное ускорение от относительного сферического движения тела определим по формуле Ривальса:

$$\overline{a}_r = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{V}_r = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}). \tag{16.13}$$

Тогда формула (16.12) окончательно запишется в виде:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_O + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}).$$

Таким образом, ускорение точки свободного тела равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки в ее относительном сферическом вместе с телом движении вокруг полюса.

Вопросы для самопроверки

1. Какое движение тела называется сферическим?

2. Как определяются углы Эйлера?

3. Запишите уравнение сферического движения.

4. Запишите формулу, определяющую угловую скорость тела.

4. Дайте определение углового ускорения тела.

5. Как расположены векторы угловой скорости и углового ускорения по отношению друг к другу?

6.Запишите кинематические уравнения Эйлера.

7. Как определяются модуль и направление вектора скорости точки тела при сферическом движении?

8. Как раскладывается движение свободного твердого тела на составляющие?

9. Сколько степеней свободы имеет свободное твердое тело?

10. Запишите формулу для определения скоростей точек свободного твердого тела.

11. Запишите формулу для определения ускорений точек свободного твердого тела.

Библиографический список

1. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов/ С.М. Тарг – 19-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2009. – 416 с.

2. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.М. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2004. – 736 с.

3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – СПб.: Лань, 2002 . – 768 с.

4. Кузьмин П.А. Методические указания к изучению статики/ П.А. Кузьмин, Т.М. Стрежнева. – Казань: Казан. авиац. инст-т, 1980. – 32 с.

5. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. – СПб.6.: Лань, 2002. – 448 с.

6. Хакимуллина Л.Ш. Теоретическая механика. Часть 1: Учеб. пособие/ Л.Ш. Хакимуллина, Е.М. Степанова, Ю.С. Маркин. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2009. – 84 с.

7. Петрушенко Ю.Я. Лабораторный практикум на базе компьютера по теоретической механике. Статика и кинематика / Ю.Я. Петрушенко, Л.Ш. Хакимуллина. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2007. – 52 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Хакимуллина Лариса Шарифовна

ЛЕКЦИИ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.
Кинематика и Статика.

Учебное пособие

Кафедра механики КГЭУ

Редактор издательского отдела *М.С. Беркутова*
Компьютерная верстка *М.С. Беркутова*

Подписано в печать
Формат 60×84/16. Бумага «Business». Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.
Усл. печ. л. Уч.-изд. л. Тираж экз. Заказ №

Издательство КГЭУ, 420066, Казань, Красносельская, 51
Типография КГЭУ, 420066, Казань, Красносельская, 51