МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Казанский государственный
энергетический университет»

Ю.Я. ПЕТРУШЕНКО, Л.Ш. ХАКИМУЛЛИНА

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ НА БАЗЕ КОМПЬЮТЕРА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Статика и кинематика

Казань 2007

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Казанский государственный
энергетический университет»

Ю.Я. ПЕТРУШЕНКО, Л.Ш. ХАКИМУЛЛИНА

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ НА БАЗЕ КОМПЬЮТЕРА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Статика и кинематика

Допущено Ученым советом КГЭУ
в качестве учебного пособия для студентов

Казань 2007

УДК К.531.1
ББК 22.21
П30

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева *Г.В. Голубев*;
доктор технических наук, профессор Казанского государственного энергетического университета *Н.К.Андреев*

Петрушенко Ю.Я., Хакимуллина Л.Ш.
П30 Лабораторный практикум на базе компьютера по теоретической механике. Статика и кинематика / Ю.Я. Петрушенко, Л.Ш. Хакимуллина.–Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2007.

В лабораторный практикум включены лабораторные работы по статике: «Определение реакций опор составной конструкции» и кинематике: «Определение кинематических характеристик точки, совершающей сложное движение». Пособие содержит краткие теоретические сведения, необходимые при выполнении лабораторных работ, порядок выполнения работ, разобранные примеры с подробными пояснениями и варианты индивидуальных заданий.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 140100.65 «Теплоэнергетика» и 140500.65 «Энергомашиностроение».

УДК К.531.1
ББК 22.21

ВВЕДЕНИЕ

Пособие является приложением к электронной версии разработанного лабораторного практикума на базе компьютера по разделам «Статика» и «Кинематика» курса «Теоретическая механика».

В пособие включены описания лабораторных работ по темам: «Определение реакций опор составной конструкции» и «Определение кинематических характеристик точки, совершающей сложное движение». Каждая лабораторная работа содержит краткие теоретические сведения по соответствующей теме, порядок выполнения задания, пример выполнения задания и 24 варианта самих заданий с различными схемами конструкций.

Каждый студент выполняет индивидуально свой вариант задания.

Разработаны две версии лабораторных работ. В первой версии исходные данные заданы в условиях заданий. Во второй версии предусмотрена возможность изменения исходных данных преподавателем, который может вводить их по своему усмотрению через текстовые поля на экране компьютера, обеспечивая тем самым индивидуальность каждого задания. Сложное движение материального объекта, исследуемое в лабораторной работе по кинематике, демонстрируется на экране компьютера анимацией.

По ходу выполнения лабораторной работы осуществляется компьютерный контроль правильности ее выполнения. Ответы на запрашиваемые компьютером вопросы обучаемый должен ввести через текстовые поля на экране компьютера. При правильных ответах на экране появляется соответствующее сообщение с набранным обучаемым максимальным оценочным баллом. При ошибочных ответах выдается соответствующее сообщение с выделением неверных ответов, которые обучаемый должен пересчитать и ввести заново. Каждая новая попытка уменьшает набираемый оценочный балл. Только после исправления всех ошибок выдается сообщение о правильности выполнения задания и количестве набранных баллов.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1
ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Цель работы

Целью лабораторной работы является приобретение студентами знаний основных понятий и аксиом статики, основных теоретических выводов о равновесии твердых тел и составных конструкций, умений составлять уравнения равновесия для плоской произвольной и сходящейся систем сил, умений самостоятельно выполнять расчеты при решении задач статики.

КРАТКИЕ ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Основные понятия и определения статики

Статика – раздел теоретической механики, изучающий условия, при которых силы, приложенные к материальным объектам, движения не производят. Материальными объектами статики являются ***абсолютно твердые тела*** – абстрактные модели реальных тел, расстояния между двумя любыми точками которых остаются неизменными при взаимодействиях с другими телами. В дальнейшем абсолютно твердые тела будем называть твердыми телами. Мера механического взаимодействия материальных объектов в механике называется ***силой***. Сила характеризуется интенсивностью (величиной), направленностью (линией действия) и точкой приложения (рис. 1.1), т. е. сила определяется ***как связанный вектор***.

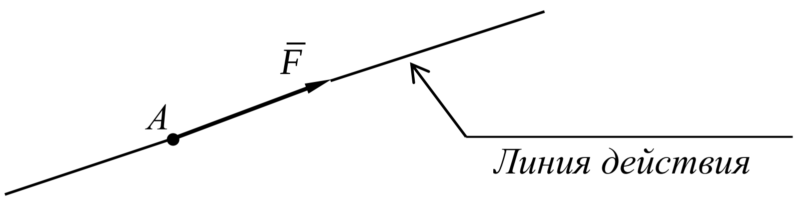


Рис.1.1

В статике рассматриваются только постоянные силы.

Совокупность сил, приложенных к выделенному твердому телу, называется ***системой сил*** и обозначается

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n)$$

или, если число сил, входящих в систему, нас не интересует, то более компактно $(\bar{F})$.

Равновесие – это покой рассматриваемого твердого тела по отношению к системе отсчета, которую будем связывать с Землей. Относительное равновесие – покой относительно подвижных систем отсчета – изучается в динамике.

Система сил, под действием которой твердое тело находится в равновесии, называется ***уравновешенной системой сил*** или системой сил эквивалентной нулю:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n) \sim 0.$$

Система сил, которая вместе с данной системой сил образует уравновешенную систему сил, называется ***уравновешивающей системой сил***.

Две системы сил называются ***эквивалентными***, если они имеют одну и ту же уравновешивающую систему сил.

Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется ***равнодействующей***.

2. Основные задачи и аксиомы статики

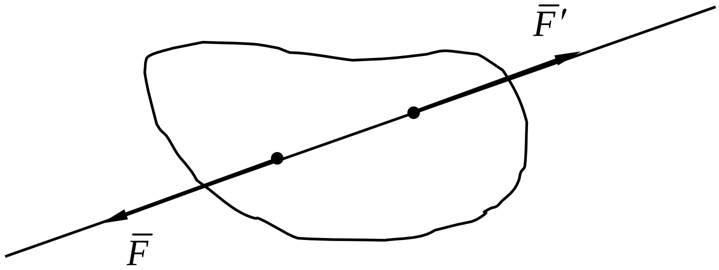
Статика изучает ***две основные задачи:***

1) Приведение заданной произвольной системы сил к простейшему виду.
2) Вывод условий равновесия твердых тел, находящихся под действием систем сил.

Теоретические результаты, получаемые в виде теорем и следствий ***геометрической статики*** (в отличие от ***аналитической статики***, которую здесь не будем рассматривать) опираются на ряд положений, принимаемых без логических доказательств, которые называются ***аксиомами статики***.

$\boxed{\text{А1}}$ **Аксиома двух сил**

Для того, чтобы твердое тело находилось в равновесии под действием двух сил, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были противоравными (рис. 1.2).



$$\boxed{\bar{F}' = -\bar{F}}$$

Рис. 1.2

Аксиома А1 указывает простейшую уравновешенную систему сил.

A2

Аксиома добавления и отбрасывания сил

Состояние равновесия твердого тела не изменится, если к системе сил, действующих на него, добавить или отбросить уравновешенную систему сил.

Следствие 1

Добавление или отбрасывание к заданной системе сил любой уравновешенной системы сил дает систему, эквивалентную данной.

Следствие 2

Сила, приложенная к твердому телу, есть вектор скользящий.

Таким образом, силу, приложенную к твердому телу, не изменяя оказываемого ею действия, можно переносить вдоль линии действия (рис. 1.3).

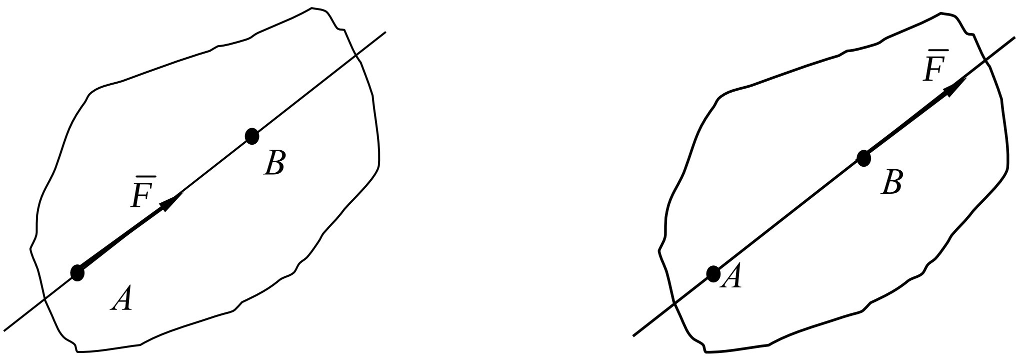


Рис.1.3

A3

Аксиома параллелограмма сил

Две силы, приложенные к одной точке твердого тела, имеют равнодействующую, определяемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах (рис. 1.4).

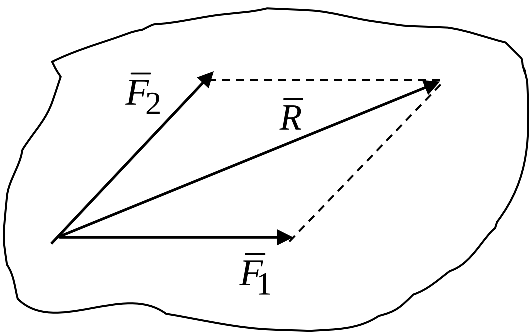


Рис. 1.4

Аксиома А3 утверждает, что

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \sim \overline{R}\ ; \qquad \overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 .$$

А4

Принцип «отвердевания»

Равновесие деформируемого тела, находящегося под действием системы сил, не нарушается, если тело считать абсолютно твердым.

А5

Закон равенства действия и противодействия

При взаимодействии двух тел силы действия и противодействия, возникающие при этом, являются противоравными.

Аксиомы А1-А5 справедливы только для ***свободных*** тел, т.е. таких тел, на перемещения которых не наложено никаких ограничений.

Несвободным телом называется тело, отдельные перемещения которого ограничены другими телами, которые называются ***связями***. Силы, с которыми эти связи действуют на рассматриваемое тело, называются ***реакциями связей***. Силы, действующие на тело и не зависящие от наложенных на него связей, называются ***активными***.

А6

Принцип освобождаемости от связей

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить действующие на него связи, заменив их действие силами – реакциями связей.

На основе изложенных аксиом можно доказать ***теорему о трех непараллельных силах:***

Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии их действия пересекаются в одной точке.

3. Простейшие связи и их реакции

Связи, которые рассматриваются в статике, реализуются при помощи твердых и гибких тел. Сила, с которой данное тело действует на связь, и реакция связи по аксиоме А3 являются ***противоравными силами***.

1) Идеально гладкая поверхность (рис. 1.5)

Тело T опирается в точке A на гладкую поверхность, которая является для него связью. Реакция $\bar{N}$ гладкой поверхности приложена в точке A и направлена по общей нормали к телу и гладкой поверхности (рис.1.5).

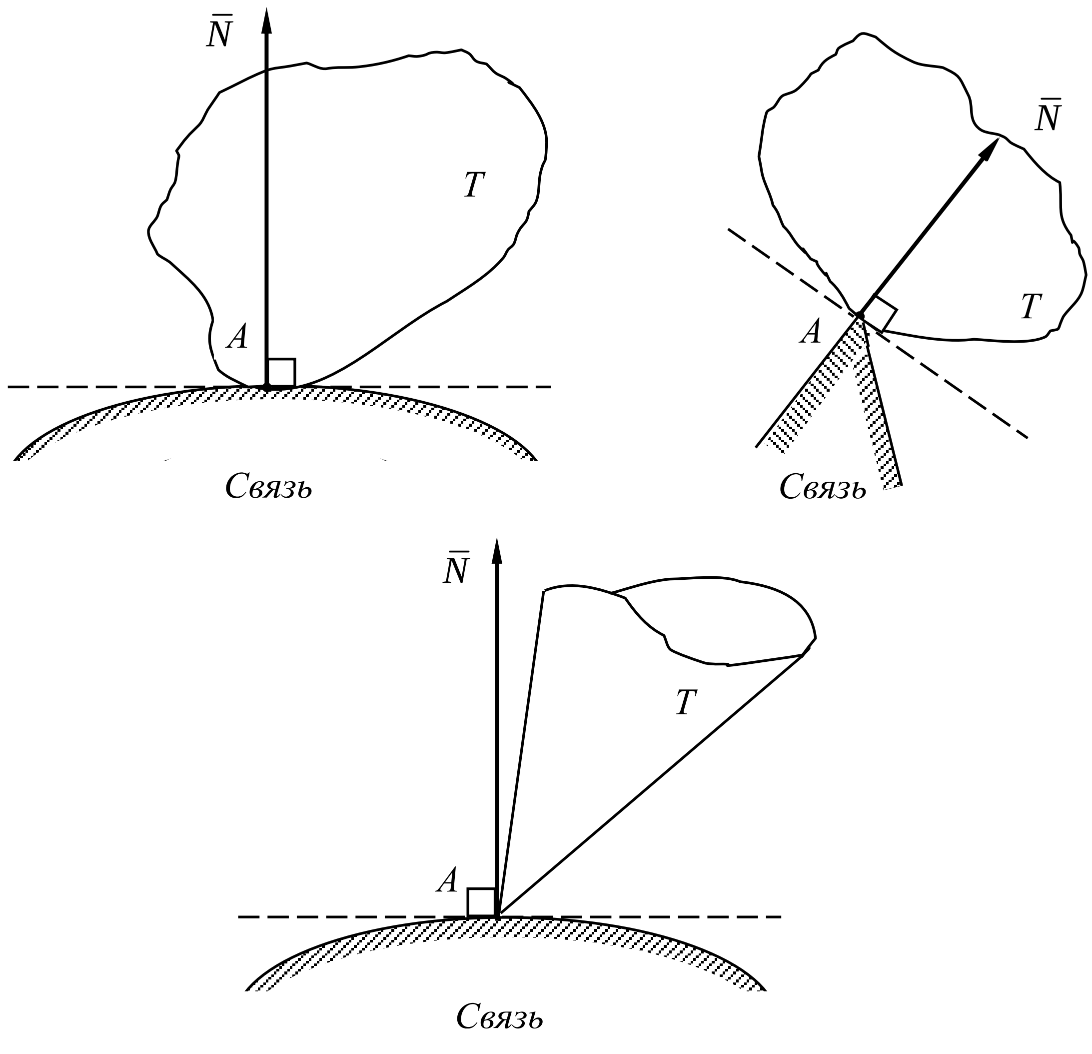


Рис. 1.5

2) Цилиндрический шарнир (рис. 1.6)

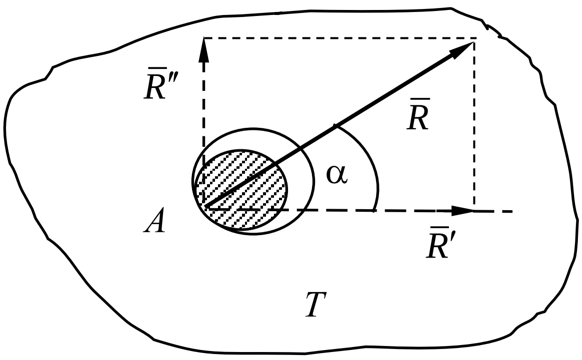


Рис. 1.6

В цилиндрическое отверстие тела T вставляется цилиндрический болт (заштрихован) несколько меньшего диаметра, чем отверстие. Тело T может вращаться вокруг оси болта. Реакция $\overline{R}$ цилиндрического шарнира лежит в плоскости, перпендикулярной оси болта, проходит через центр болта и точку касания с телом. Таким образом, направление реакции $\overline{R}$ неизвестно и определяется в зависимости от приложенных к телу сил. Часто, чтобы не вводить неизвестный угол α, определяющий направление реакции $\overline{R}$, ее заменяют двумя другими составляющими по взаимно ортогональным направлениям:

$$\overline{R} = \overline{R}' + \overline{R}''.$$

3) Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора (подвижной каток) (рис.1. 7)

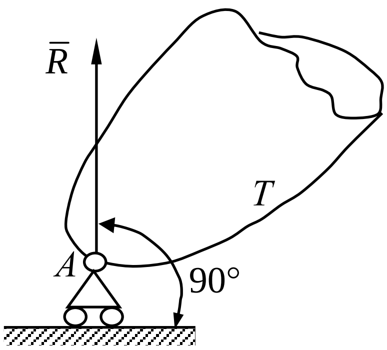


Рис.1.7

Тело T опирается на гладкую поверхность через шарнир, поставленный на катки. Реакция $\overline{R}$ шарнирно-подвижной опоры направлена перпендикулярно опорной поверхности.

4) Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора (рис.1.8)

Тело T прикреплено с помощью шарнира к неподвижной поверхности. Направление реакции $\overline{R}$ опоры может быть любым, в зависимости от приложенных сил. Как и в случае 2), чтобы не вводить неизвестный угол α, реакцию $\overline{R}$ раскладывают по двум взаимно ортогональным направлениям.

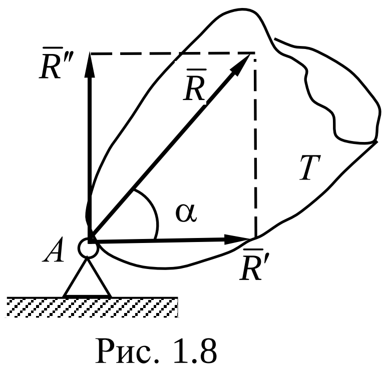


Рис. 1.8

5) Гибкая нерастяжимая нить (рис. 1.9)

Реакция нити $\overline{R}$, называемая натяжением нити, направлена вдоль нити к точке подвеса.

6) Невесомый шарнирно-закрепленный на концах стержень (рис. 1.10)

Реакция $\bar{R}$ невесомого стержня направлена вдоль стержня. При этом стержень может быть как сжат, и тогда реакция стержня направлена от стержня к телу $(\bar{R}_A, \bar{R}_B)$, так и растянут. Тогда реакция стержня направлена в сторону от тела к стержню $(\bar{R}_C)$.

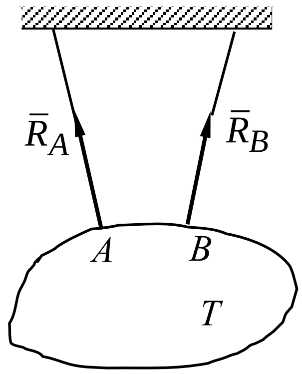


Рис. 1.9

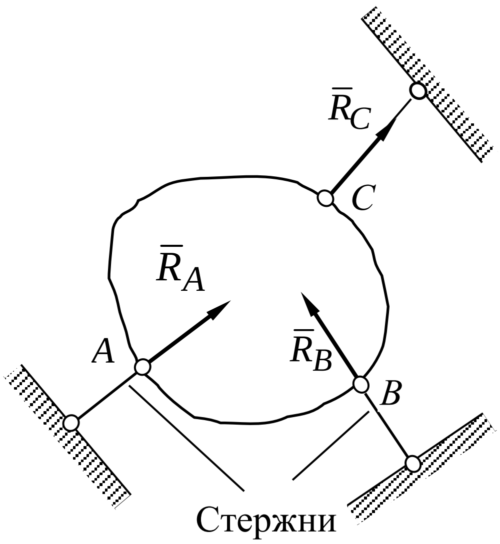


Рис. 1.10

7) Жесткая заделка (рис. 1.11)

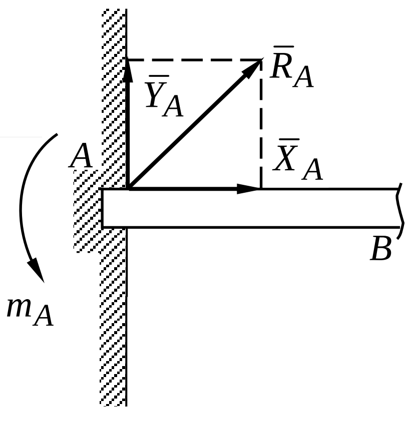


Рис. 1.11

Конец балки AB жестко заделан в стену. При нагрузке на балку в заделке возникают реакции, состоящие из реакции заделки $\bar{R}_A$ и пары с реактивным моментом заделки m_A. Так как направление реакции заделки $\bar{R}_A$ неизвестно, ее обычно раскладывают по двум взаимно ортогональным направлениям

$$\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A.$$

4. Моменты сил. Главный вектор и главный момент системы сил

Для решения основной задачи статики – определение условий равновесия твердых тел, находящихся под действием системы сил, необходимо ввести понятия моментов силы.

Момент силы $\bar{F}$ относительно произвольной точки O, обозначаемый $\bar{M}_O(\bar{F})$, определяется как вектор, равный векторному произведению

$$\bar{M}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F},$$

где $\bar{r}$ - радиус-вектор точки приложения силы A относительно точки O (рис. 1.12).

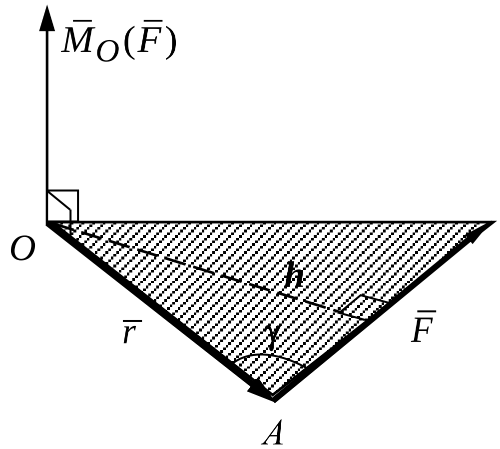


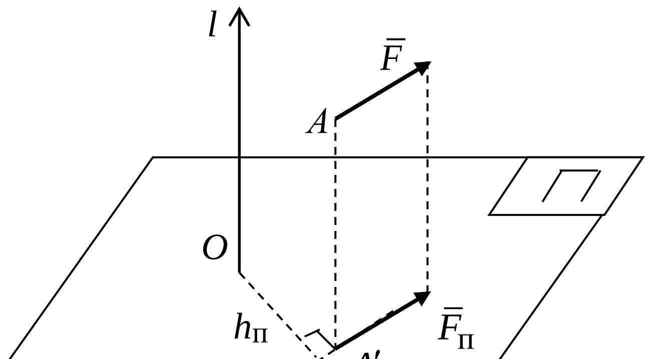
Рис. 1.12

Модуль момента силы относительно точки O вычисляется по формуле

$$M_O(\bar{F}) = r \cdot F \cdot \sin\gamma = F \cdot h,$$

где длина перпендикуляра h, опущенного из точки O на линию действия силы, называется ***плечом силы***. Направление вектора $\bar{M}_O(\bar{F})$ определяется по правилу векторного произведения.

Момент силы $\bar{F}$ относительно оси l, обозначаемый $m_l(\bar{F})$ - это скалярная величина, равная произведению модуля проекции силы $\bar{F}_П$ (рис. 1.13) на плоскость П, перпендикулярную оси l, на плечо $h_П$ этой проекции относительно точки O пересечения оси и плоскости, взятая со знаком плюс при стремлении силы повернуть тело, к которому она приложена, против хода часовой стрелки и со знаком минус – в противоположном случае, если смотреть с конца оси:



Из формулы (1.1) видно, что момент силы относительно оси равен нулю, если либо сила параллельна оси ($F_П = 0$), либо сила пересекает ось ($h_П = 0$).

$$\boxed{m_l(\overline{F}) = \begin{cases} +F_П \cdot h_П \\ -F_П \cdot h_П \end{cases}} \qquad (1.1)$$

Существует связь между моментом силы относительно точки *O* и моментом силы относительно оси, проходящей через эту точку: ***момент силы относительно оси равен проекции момента силы относительно точки оси на эту ось.***

Главным вектором системы сил называется вектор, равный геометрической сумме векторов всех сил системы. Главный вектор не является силой. Это свободный вектор, полученный формальным сложением, перенесенных в любую точку векторов сил системы:

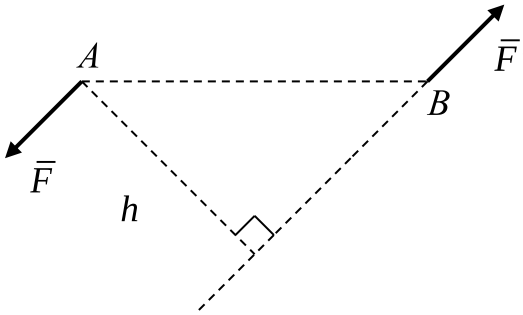
$$\boxed{\overline{R}^{Г} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k} \qquad (1.2)$$

Главным моментом системы сил относительно некоторой точки О называется приложенный в этой точке вектор, равный геометрической сумме моментов всех сил системы относительно этой точки:

$$\boxed{\overline{M}_O^{Г} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_k).} \qquad (1.3)$$

5. Пара сил. Приведение системы сил к силе и паре

Парой сил называется совокупность двух равных по величине, параллельных и противоположно направленных сил (рис. 1.14).



$$\bar{F} = -\bar{F}'$$

Рис. 1.14

Расстояние h между силами пары называется ***плечом пары.***

Главный вектор пары равен нулю. Главный момент пары не зависит от выбора точки O, является свободным вектором и равен моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы пары. Он называется ***моментом пары*** и обозначается $\bar{M}(\bar{F},\bar{F}')$.

Модуль момента пары равен произведению модуля сил пары на ее плечо. Пара сил является простейшей системой сил, которую нельзя элементарными преобразованиями привести к одной силе.

Элементарными преобразованиями системы сил являются присоединение или отбрасывание к системе сил двух противоравных сил, перенос сил вдоль линий их действия, сложение и разложение сил по аксиоме А3. Элементарные преобразования переводят данную систему сил в эквивалентную ей систему. Они не изменяют главного вектора и главного момента системы сил относительно произвольно выбранной точки.

Теорема о приведении системы сил к силе и паре:

Любую систему сил, приложенную к твердому телу, элементарными преобразованиями можно привести к одной силе, равной главному вектору $\bar{R}^{\text{г}}$ ***системы сил и приложенной в произвольно выбранной точке О, и к паре, момент которой равен главному моменту*** $\bar{M}_O^{\text{г}}$ ***данной системы сил относительно точки О.***

6. Основная теорема статики. Уравнения равновесия

Основная теорема статики:

Для уравновешенности системы сил необходимо и достаточно чтобы ее главный вектор и главный момент относительно произвольной точки О равнялись нулю:

$$\boxed{\bar{R}^{\text{г}} = 0, \quad \bar{M}_O^{\text{г}} = 0.} \qquad (1.4)$$

Из выше сформулированной основной теоремы статики следует доказательство **теоремы эквивалентности**:

Для эквивалентности двух систем сил необходимо и достаточно, чтобы были равны их главные векторы и главные моменты относительно одной и той же произвольной точки.

Непосредственным следствием теоремы эквивалентности является часто применяемая при решении практических задач статики ***теорема Вариньона***, которой удобно пользоваться при вычислении моментов сил:

Если система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно произвольной точки (оси) равен геометрической (алгебраической) сумме моментов сил системы относительно той же точки (оси).

Из основной теоремы статики следуют уравнения равновесия твердых тел.

Рассмотрим равновесие твердого тела, находящегося под действием системы сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n)$ в прямоугольной системе координат (рис. 1.15).

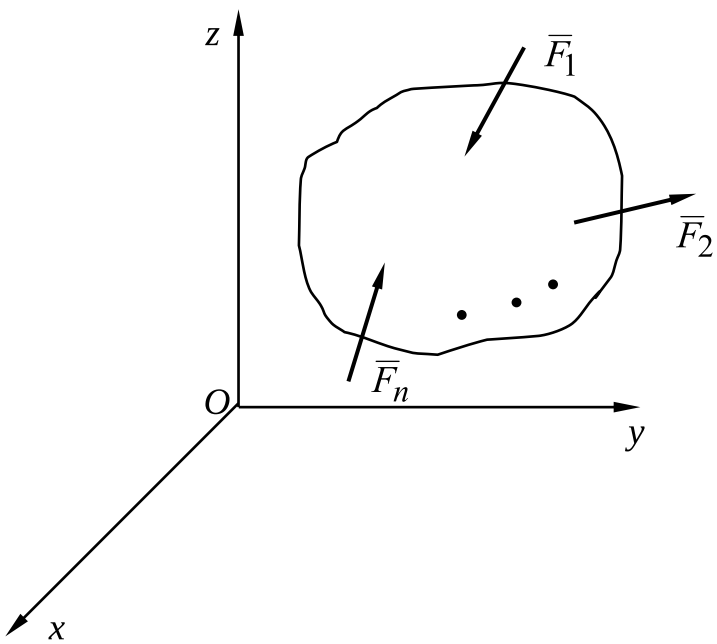


Рис. 1.15

Из формул (1.2), (1.3) и (1.4) условия равновесия в векторной форме имеют вид:

$$\bar{R}^{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k = 0, \quad \bar{M}_O^{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\bar{F}_k) = 0 .$$

В проекциях на оси координат $Oxyz$ получим из них ***шесть скалярных условий равновесия***:

$$R_x^{\text{г}} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad R_y^{\text{г}} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad R_z^{\text{г}} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \tag{1.5}$$

$$M_{Ox}^{\text{г}} = \sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k) = 0, \quad M_{Oy}^{\text{г}} = \sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k) = 0, \quad M_{Oz}^{\text{г}} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) = 0.$$

Частные случаи

1) Плоская система сил

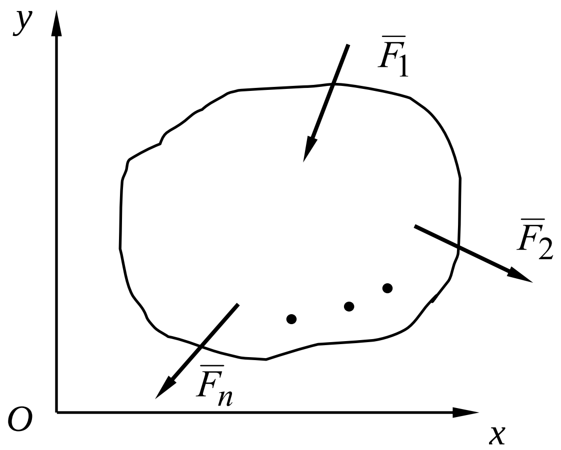


Рис. 1.16

В этом случае все силы, действующие на тело, расположены в одной плоскости. Выберем в этой плоскости оси Oxy, относительно которых рассматривается равновесие тела (рис. 1.16). Тогда условия равновесия запишутся в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) = 0. \tag{1.6}$$

Остальные условия равновесия системы (1.5) обратятся в тождества $0 \equiv 0$. Поскольку все силы расположены в плоскости, перпендикулярной оси z, моменты сил относительно нее определяются по формуле

$$m_z(\overline{F}) = \begin{cases} +F \cdot h \\ -F \cdot h \end{cases},$$

где h – плечо силы (рис.1.17).

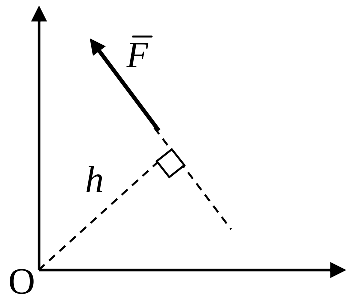


Рис. 1.17

Так как в этом случае направление оси z (она всегда будет направлена на нас) не сказывается на результате, то момент силы относительно оси, перпендикулярной плоскости действия сил, принято называть ***алгебраическим моментом относительно точки*** пересечения этой оси с плоскостью или просто ***моментом силы относительно точки O*:**

$$\boxed{m_O(\bar{F}) = \begin{cases} +F \cdot h \\ -F \cdot h \end{cases}} \tag{1.7}$$

Точка O может быть любой точкой плоскости действия сил. Условия (1.6), записанные в виде

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} m_O(\bar{F}_k) = 0, \tag{1.8}$$

являются основной или первой формой условий равновесия для плоской системы сил. При решении задач статики возможно применение еще двух форм условий равновесия для плоской системы сил.

Вторая форма условий равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} m_A(\bar{F}_k) = 0, \ \sum_{k=1}^{n} m_B(\bar{F}_k) = 0,$$

где отрезок AB, соединяющий точки A и B, не должен быть перпендикулярен оси x.

Третья форма условий равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\bar{F}_k) = 0, \ \sum_{k=1}^{n} m_B(\bar{F}_k) = 0, \ \sum_{k=1}^{n} m_C(\bar{F}_k) = 0,$$

где точки A, B, C – произвольные точки плоскости действия сил, не лежащие на одной прямой.

2) Система сходящихся сил

В этом случае линии действия всех сил, приложенных к твердому телу, пересекаются в одной точке. Выбирая начало координат в этой точке, получим три условия равновесия для сходящейся системы сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0. \qquad (1.9)$$

Остальные условия обратятся в тождества 0≡0. Если система сходящихся сил лежит в одной плоскости, то для осей *Oxy* получим два условия равновесия:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0.} \qquad (1.10)$$

3) Система параллельных сил

Направив одну из осей, например z, параллельно силам, получим три скалярных условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0\,, \ \sum_{k=1}^{n} m_x(\bar{F}_k) = 0\,, \ \sum_{k=1}^{n} m_y(\bar{F}_k) = 0\,. \qquad (1.11)$$

Остальные условия обратятся в тождества 0≡0.

Если среди сил, уравновешенность которых рассматривается, есть неизвестные, то условия равновесия (1.5), (1.8)–(1.11) становятся уравнениями равновесия для их определения. При решении задач статики заранее неизвестными величинами всегда являются реакции связей. Очевидно, что для того, чтобы задача статики по определению неизвестных сил при равновесии твердого тела была разрешимой, необходимо, чтобы число уравнений равновесия равнялось числу неизвестных величин. В этом случае задача статики называется статически определенной. Задачи, в которых число неизвестных величин больше числа уравнений, называются статически неопределенными. Такими являются задачи по определению реакции связей при наложении лишних связей. Статически неопределенные задачи решаются в курсе сопротивления материалов.

При решении задач на равновесие конструкции, состоящей из нескольких тел (системы тел), соединенных связями, необходимо ее расчленять и, рассматривая равновесие каждого тела в отдельности, составить для каждого тела уравнения равновесия. При этом следует всегда учитывать силы взаимодействия тел, принимая во внимание аксиому А5. Уравнения равновесия для одного из тел конструкции можно, используя аксиому отвердевания А4, заменить уравнениями равновесия для конструкции в целом, следя за тем, чтобы число уравнений равновесия соответствовало числу неизвестных величин.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ. ПРИМЕР

1. Расчленить составную конструкцию на две части по шарниру *C*.
2. Рассмотреть равновесие части конструкции, расположенной левее шарнира *C*.
3. Заменить распределенную нагрузку $\overline{q}$ равнодействующей $\overline{Q}$, определив ее модуль, направление и точку приложения.

На запрос компьютера ввести модуль равнодействующей нагрузки Q.

4. Применив принцип освобождаемости от связей, заменить действие опоры *A* и шарнира *C* вместе с правой частью конструкции их реакциями $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_C$.
5. Неизвестное направление реакции $\overline{R}_C$, передаваемой через цилиндрический шарнир *C*, определить по теореме о трех непараллельных силах.
6. Выбрав оси координат, составить уравнения равновесия (1.10) для полученной плоской системы сходящихся сил.
7. Из полученной системы алгебраических уравнений определить модули неизвестных реакций опоры *A* и шарнира *C*.

На запросы компьютера ввести модули реакций опоры A и шарнира C.

8. Рассмотреть равновесие части конструкции, расположенной справа от шарнира *C*.
9. Применив принцип освобождаемости от связей, заменить действие жесткой заделки *B* и шарнира *C* вместе с левой частью их реакциями.
10. Направление и модуль реакции, передаваемой через шарнир *C* и действующей на правую часть конструкции, определить на основании аксиомы действия и противодействия А5.
11. Выбрав систему координат, составить уравнения равновесия (1.8) для полученной плоской системы сил, действующей на правую часть конструкции.
12. Из полученной системы алгебраических уравнений определить неизвестные составляющие реакции и реактивный момент жесткой заделки *B*.

На запрос компьютера ввести модуль реакции и реактивный момент жесткой заделки B.

Пример. Составная конструкция состоит из двух балок *AC* и *CB*, соединенных шарниром *C* (рис. 1.18). Балка *AC* у конца *A* опирается на стержень. Балка *CB* у конца *B* заделана в стену. Конструкция находится под действием силы $\overline{P}$, равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью $\overline{q}$ и пары с моментом *M*.

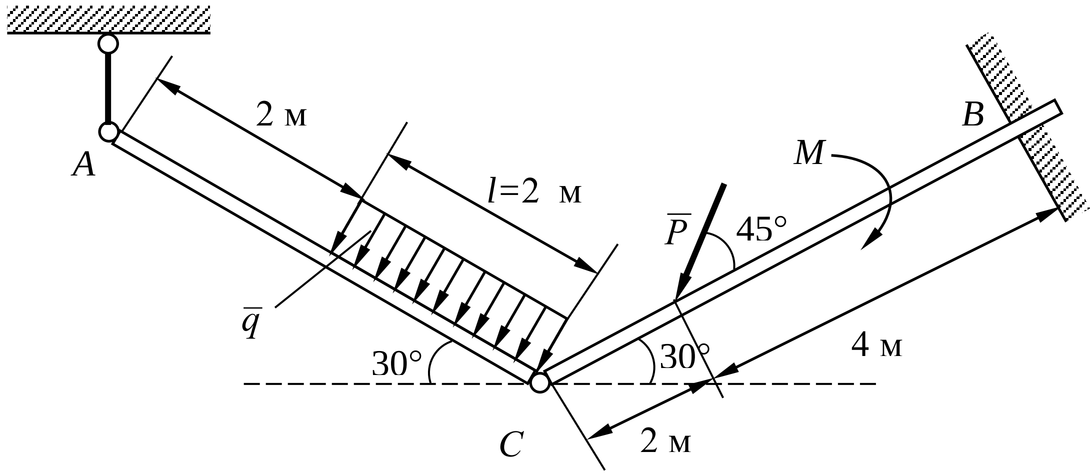


Рис. 1.18

Определить:

- модуль реакции стержня R_A,
- модуль реакции R_C шарнира *C*,
- модуль реакции R_B и реактивный момент m_B жесткой заделки.

Дано**:** P = 4,5 кН, q = 1,2 кН/м, M = 7 кН · м.

Решение

Расчленим конструкцию (рис. 1.18) на две части по шарниру *C*.

1. Рассмотрим равновесие части конструкции, расположенной левее шарнира C (рис. 1.19), находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки.

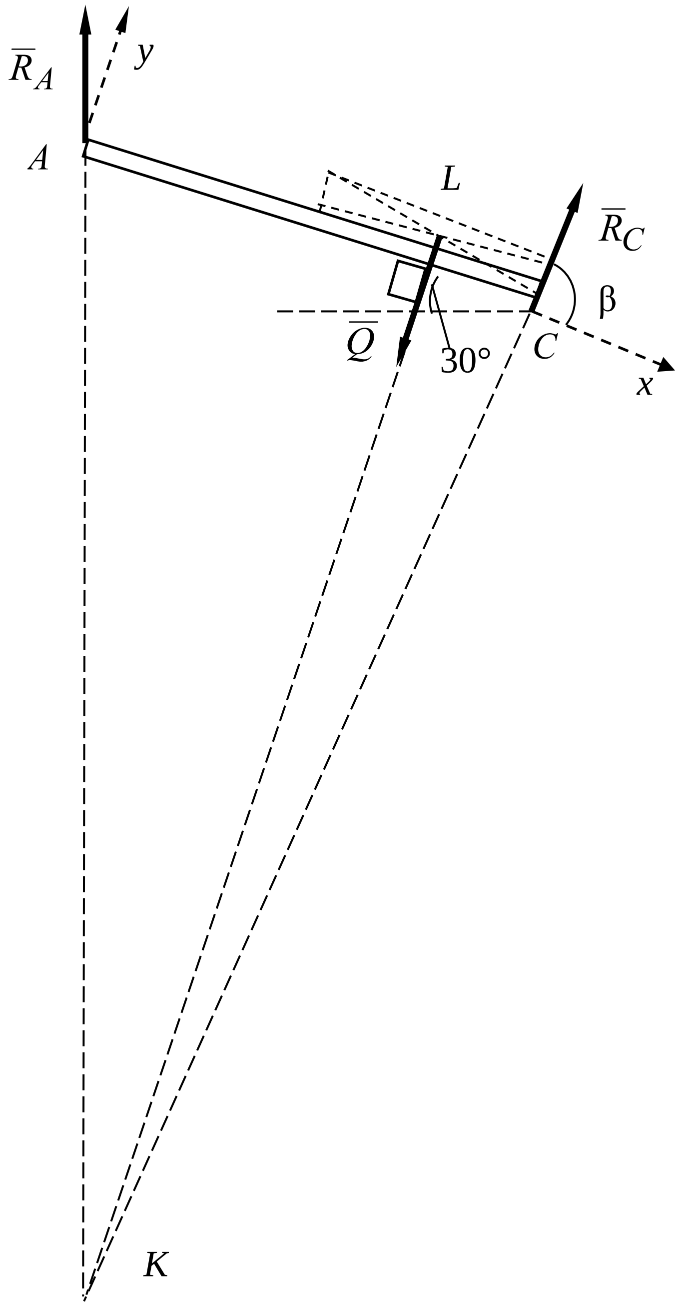


Рис.1.19

Заменим равномерно распределенную нагрузку ***равнодействующей силой* Q,** численно равной произведению интенсивности q на длину l действия нагрузки

$$Q = q \cdot l = 1{,}2 \cdot 2 = 2{,}4 \text{ Кн.}$$

Сила $\overline{Q}$ будет приложена посередине длины l и сонаправлена $\overline{q}$ (рис. 1.19).

Применяя аксиому освобождаемости от связей А6, стержень удерживающий балку на конце A, заменим реакцией $\overline{R}_A$, направленной вдоль стержня (рис. 1.19). Действие отброшенной балки CB, передаваемое через цилиндрический шарнир C, заменим реакцией шарнира $\overline{R}_C$. Таким образом, балка AC находится в равновесии под действием трех непараллельных сил $(\overline{R}_A, \overline{Q}, \overline{R}_C)$. Неизвестное направление реакции $\overline{R}_C$ определим по теореме о трех непараллельных силах.

Линия действия реакции $\overline{R}_C$ проходит через точку K пересечения линий действия реакции $\overline{R}_A$ и равнодействующей распределенной нагрузки $\overline{Q}$. Из условия замкнутости силового треугольника при равновесии (рис. 1.20) реакция $\overline{R}_C$ будет направлена от точки K к балке AC (рис. 1.19).

Выберем систему координат xy, направив ось x вдоль балки AC (рис. 1.19), и составим уравнения равновесия для плоской, сходящейся системы сил (1.10):

$$\sum F_{kx} = R_C \cdot \cos\beta - R_A \cdot \cos 60^\circ = 0, \qquad (1.12)$$

$$\sum F_{ky} = R_C \cdot \sin\beta - Q + R_A \cdot \sin 60^\circ = 0. \qquad (1.13)$$

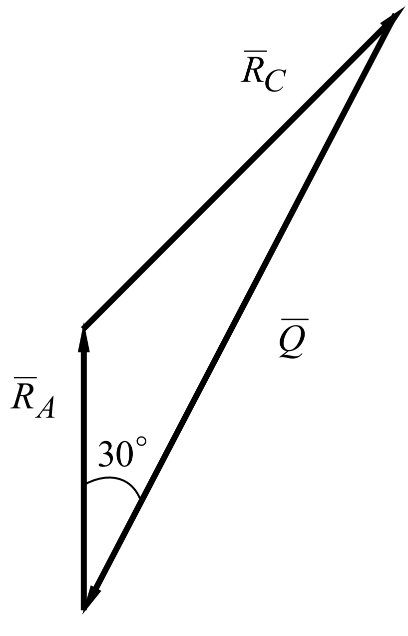


Рис. 1.20

В уравнении (1.12) проекция силы $\overline{F}_k$ на ось x

$$F_{kx} = F_k \cos\alpha,$$

где угол α откладывается от оси x против хода часовой стрелки (рис. 1.21).

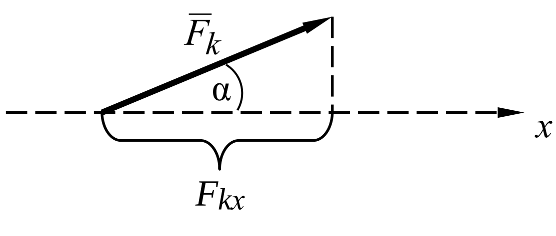


Рис. 1.21

Аналогично определяется проекция силы $\overline{F}_k$ на ось yF_{ky}.

Угол β в уравнениях (1.12), (1.13) определим из прямоугольных треугольников AKL и LCK (рис. 1.19):

$$KL = AL \cdot \mathrm{tg}60^\circ = 3\sqrt{3}\ \text{м},$$

$$\mathrm{tg}\beta = KL / LC = 3\sqrt{3},\ \beta = \mathrm{arctg}3\sqrt{3} = 79{,}1066^\circ = 1{,}38067\ \text{рад}.$$

После подстановки найденного значения угла β и величины равнодействующей распределенной нагрузки Q уравнения (1.12) и (1.13) принимают вид:

$$\begin{cases} 0{,}18898 \cdot R_C - 0{,}5R_A = 0, \\ 0{,}98198R_C - 2{,}4 + 0{,}866R_A = 0. \end{cases} \qquad (1.14)$$

Решая систему алгебраических уравнений (1.14), находим ***значения реакций*** $\boldsymbol{R_A}$ ***и*** $\boldsymbol{R_C}$**:**

$$R_A = 0{,}69282\ \text{кН}, \qquad R_C = 1{,}83305\ \text{кН}.$$

2. Рассмотрим равновесие части конструкции, расположенной правее шарнира C (рис. 1.22). К балке CB приложены сила и пара с моментом M.

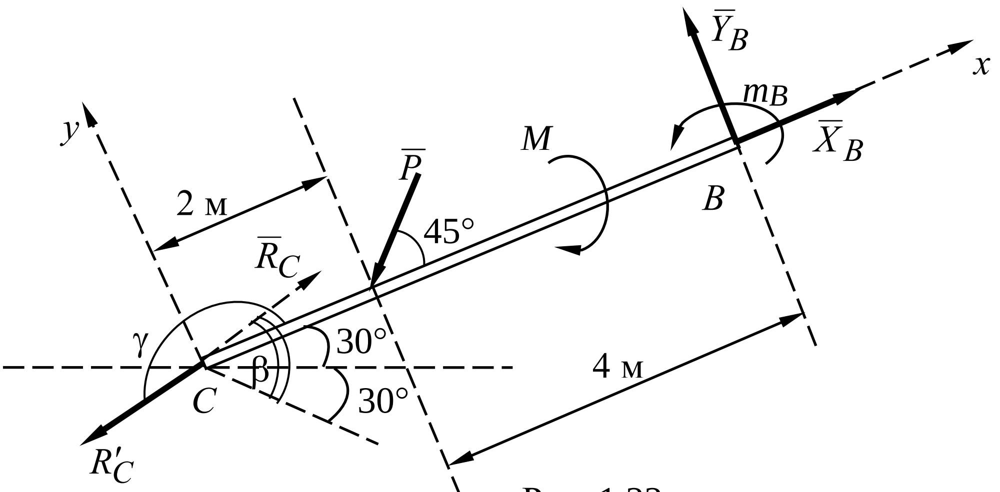


Рис. 1.22

Применяя аксиому освобождаемости от связей А6, действие жесткой заделки у конца B балки заменяем реакцией связи $\overline{R}_B$ и парой с реактивным моментом m_B (рис. 1.22). Действие отброшенной балки AC, передаваемое через цилиндрический шарнир *C*, заменяем реакцией $\overline{R}'_C$. По аксиоме равенства действия и противодействия А5

$$\overline{R}'_C = -\overline{R}_C .$$

Угол γ, который составляет реакция шарнира $\overline{R}'_C$ с балкой (рис. 1.22), равен

$$\gamma = 180^\circ + \beta - 60^\circ = 199{,}1066^\circ = 3{,}47507 \text{ рад.}$$

Выберем систему координат *xy*, направив ось *x* для удобства вдоль балки *CB*, и разложим по аксиоме параллелограмма сил А3 реакцию $\overline{R}_B$, направление которой заранее неизвестно, на составляющие вдоль осей *x* и *y* (рис. 1.22):

$$\overline{R}_B = \overline{X}_B + \overline{Y}_B .$$

Рассмотрим уравнения равновесия для полученной произвольной плоской системы сил $(\overline{R}'_C, \overline{P}, \overline{X}_B, \overline{Y}_B)$ и двух пар с моментами *M* и m_B в первой форме (1.8), составляя уравнения моментов относительно точки *C*:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = R'_C \cdot \cos\gamma - P \cdot \cos 45^\circ + X_B = 0; \\ \sum F_{ky} = R'_C \cdot \sin\gamma - P \cdot \sin 45^\circ + Y_B = 0; \\ \sum m_C(\overline{F}_k) = -P \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 - M + m_B + Y_B \cdot 6 = 0. \end{cases} \qquad (1.15)$$

В уравнениях (1.15) по аксиоме А5

$$R'_C = R_C = 1{,}83305 \text{ кН},$$

и, подставляя это значение, значение угла γ, силы *P*, момента *M* в систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} -1{,}83305 \cdot 0{,}94491 - 4{,}5 \cdot 0{,}7071 + X_B = 0; \\ -1{,}83305 \cdot 0{,}32733 - 4{,}5 \cdot 0{,}0771 + Y_B = 0; \\ -4{,}5 \cdot 1{,}4142 \cdot -7 + Y_B \cdot 6 + m_B = 0. \end{cases} \qquad (1.16)$$

Из первых двух уравнений (1.16) определяем составляющие реакций заделки X_B и Y_B:

$$X_B = 4{,}91405 \text{ кН}, \; Y_B = 3{,}78199 \text{ кН}.$$

Модуль полной реакции жесткой заделки определим по теореме Пифагора:

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 6{,}2009 \text{ кН}.$$

Реактивный момент жесткой заделки определим из третьего уравнения системы (1.16), подставив в него значение Y_B:

$$m_B = -9{,}32804 \text{ кН·м}.$$

Знак минус в ответе означает, что реактивный момент имеет направление, противоположное указанному на чертеже.

3. Определить реакцию и момент жесткой заделки можно и другим способом, рассмотрев равновесие конструкции в целом согласно аксиоме отвердевания А4, представив конструкцию жесткой изогнутой балкой *ACB* без шарнира *C*.

Применяя аксиому освобождаемости от связей А6, заменим стержень, которым закреплен конец балки *A*, реакцией $\overline{R}_A$, направленной вдоль стержня, и жесткую заделку – реакцией $\overline{R}_B$ и парой с реактивным моментом m_B (рис. 1.23).

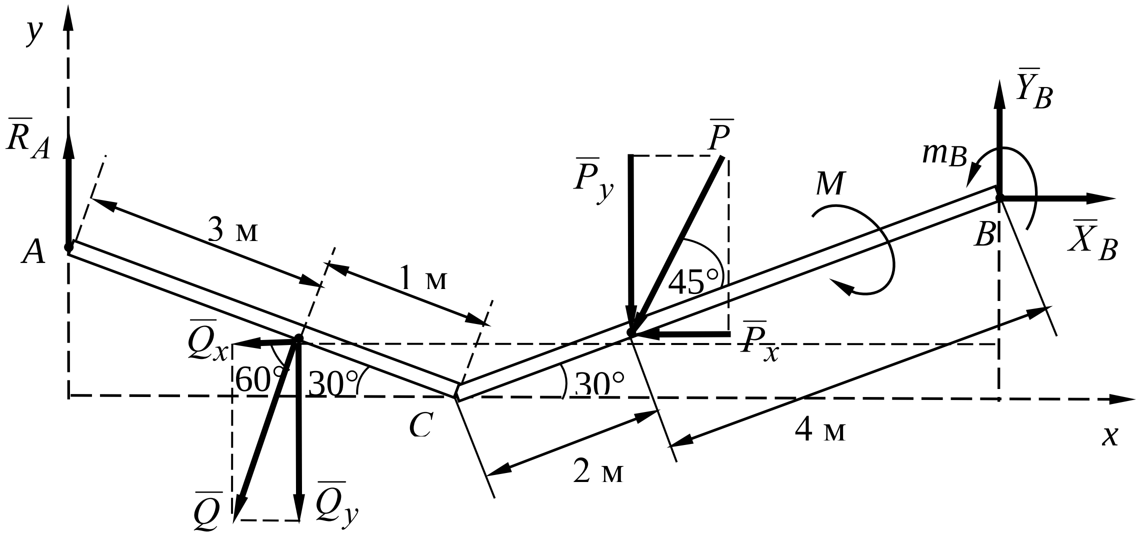


Рис. 1.23

Выберем оси координат *xy*, направив ось *x* по горизонтали, а ось *y* – по вертикали. Разложим реакцию жесткой заделки $\overline{R}_B$ по составляющим $\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$ вдоль осей *x* и *y* (рис. 1.23).

Рассмотрим уравнения равновесия для полученной произвольной плоской системы сил $(\overline{R}_A, \overline{Q}, \overline{P}, \overline{X}_B, \overline{Y}_B)$ и двух пар с моментами *M* и m_B, составляя уравнение моментов относительно точки *B*. Для облегчения вычисления моментов сил $\overline{Q}$ и $\overline{P}$ разложим их на составляющие $\overline{Q}_x, \overline{Q}_y, \overline{P}_x, \overline{P}_y$ (рис. 1.23) и воспользуемся при составлении уравнения моментов теоремой Вариньона:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = -Q_x - P_x + X_B = 0; \\ \sum F_{ky} = R_A - Q_y - P_y + Y_B = 0; \\ \sum m_B(\overline{F}_k) = -R_A(4\cos 30^\circ + 1\cdot\cos 30^\circ) - Q_x(6\cdot\sin 30^\circ - 1\cdot\sin 30^\circ) + \\ + Q_y(6\cos 30^\circ + 1\cdot\cos 30^\circ) - P_x\cdot 4\sin 30^\circ + P_y\cdot 4\cos 30^\circ - M + m_B = 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

В уравнениях (1.17)

$$\begin{aligned} &P_x = P\cos(45^\circ + 30^\circ) = 1{,}16469 \text{ кН}, \quad Q_x = Q\cos 60^\circ = 1{,}2 \text{ кН}, \\ &P_y = P\sin(45^\circ + 30^\circ) = 4{,}34667 \text{ кН}, \quad Q_y = Q\sin 60^\circ = 2{,}07846 \text{ кН}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Подставляя в уравнения (1.17) значения (1.18), значение реакции R_A и производя вычисления, получим:

X_B = 2,36469 кН, Y_B = 5,73231 кН, m_B = – 9,32809 кН·м.

Модуль полной реакции жесткой заделки

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 6{,}2009 \text{ кН}.$$

Значения составляющих реакции жесткой заделки X_B и Y_B не совпадают с полученными выше, так как здесь реакцию $\overline{R}_B$ разложили на составляющие иначе, чем выше (не совпадают направления осей координат, по которым раскладывали реакцию $\overline{R}_B$). Однако, как видно из ответов, модули реакции $\overline{R}_B$ совпадают.

ЗАДАНИЕ

В табл. 1.1 даны 24 варианта задания, в которых представлена составная конструкция, состоящая из двух балок *AC* и *CB*, соединенных шарниром *C*. Концы балок *A* и *B* закреплены с помощью опор так, чтобы конструкция находилась в равновесии. Балки *CB* у конца *B* заделана в стену. Конструкция находится под действием силы $\overline{P}$, равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью $\overline{q}$ и пары с моментом *M*.

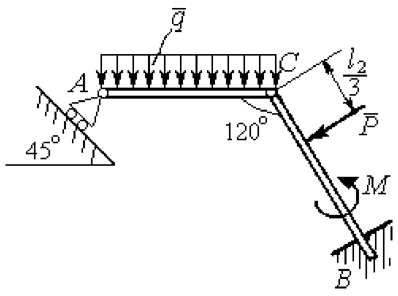
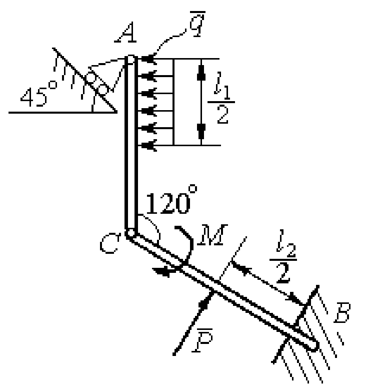
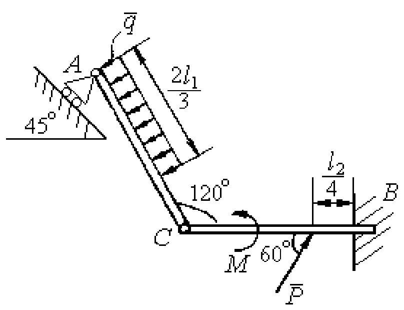
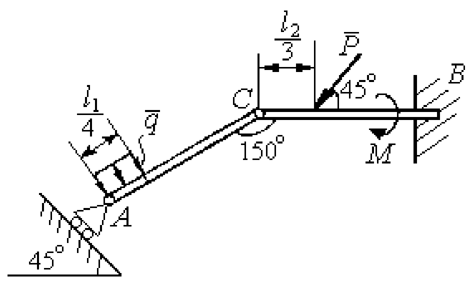
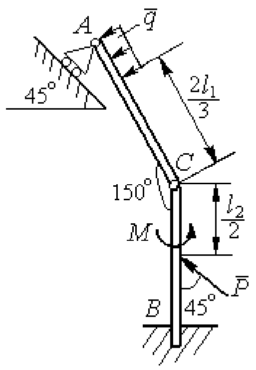
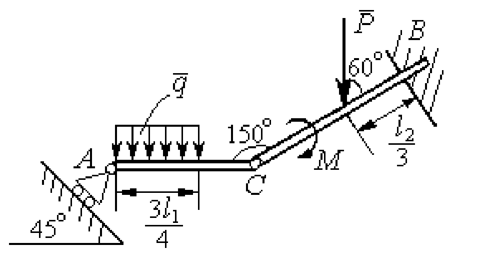
Составить уравнения равновесия конструкции и определить:

- модуль реакции опоры *A*,
- модуль реакции R_C шарнира *C*,
- модуль реакции R_B и реактивный момент m_B жесткой заделки.

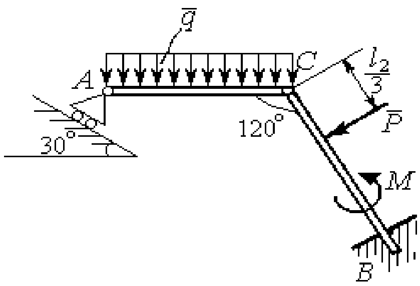
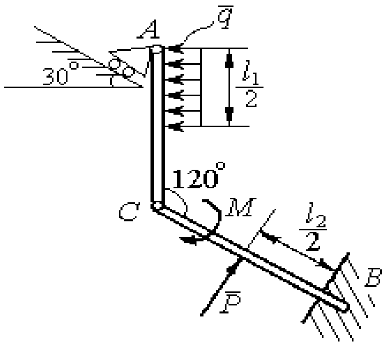
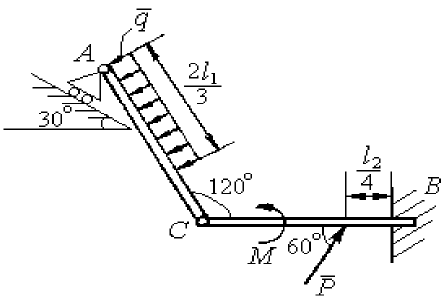
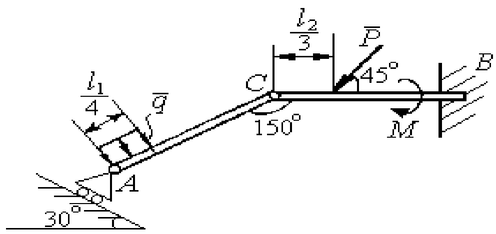
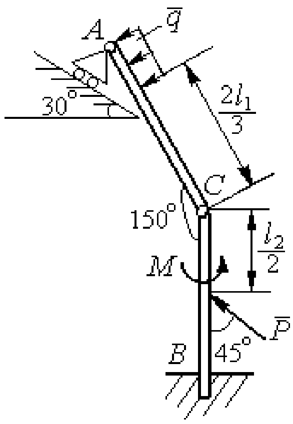
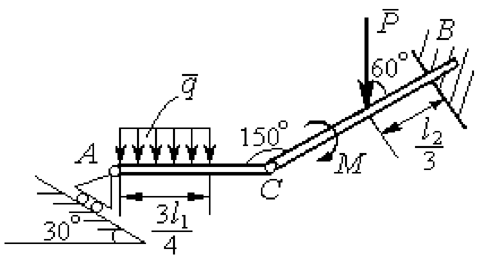
Номер задания вводится на экране компьютера через список прокруткой. После чего на экране появляется рисунок конструкции, текст задания и типовые исходные данные, если используется первая версия лабораторной работы. Если используется вторая версия лабораторной работы, то преподаватель должен ввести любые исходные данные с экрана компьютера через текстовые поля.

Навигация по страницам задания осуществляется с помощью командных кнопок с текстами «Вперед», «Назад». После нажатия кнопки «Вперед» появляется следующая страница задания, на которой студент должен ввести через текстовые поля на экране запрашиваемые результаты по ходу решения задачи. Если среди ответов есть неверные, то выдается сообщение о неправильности решения задачи с «покраснением» неверных ответов, которые нужно пересчитать и ввести их заново. Каждая новая попытка уменьшает оценочный балл на единицу.

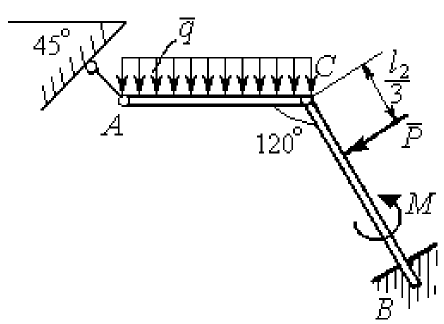
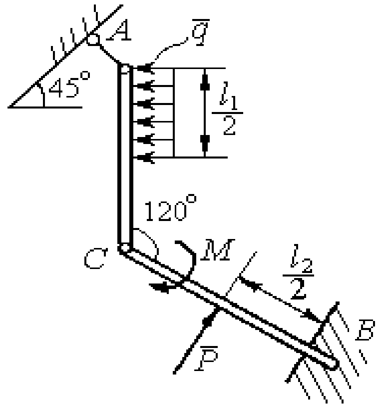
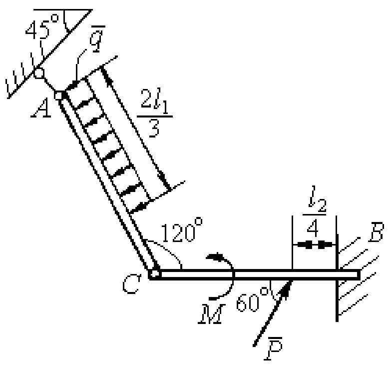
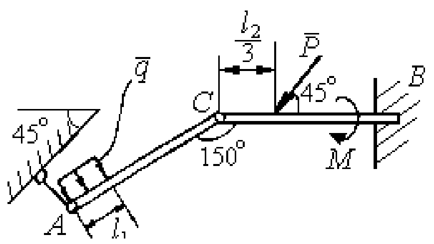
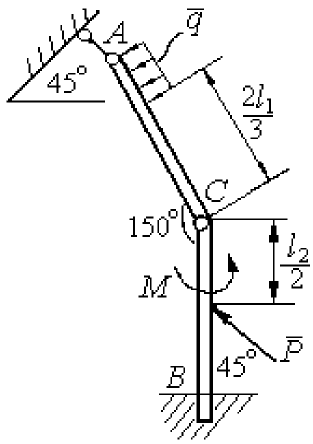
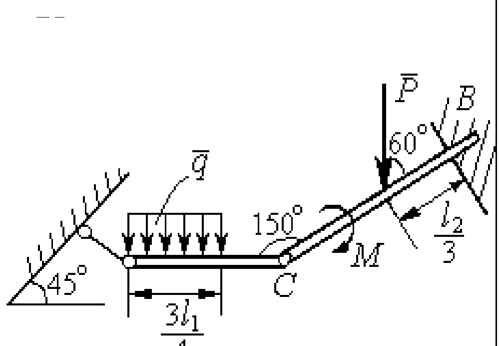
Таблица 1.1

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
1		2	
3		4	
5		6	

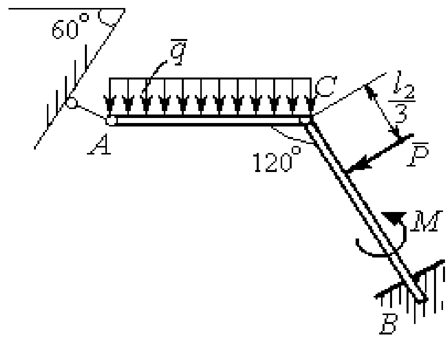
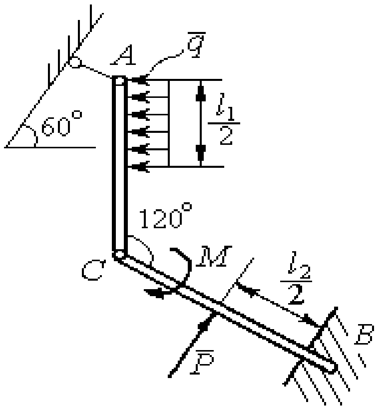
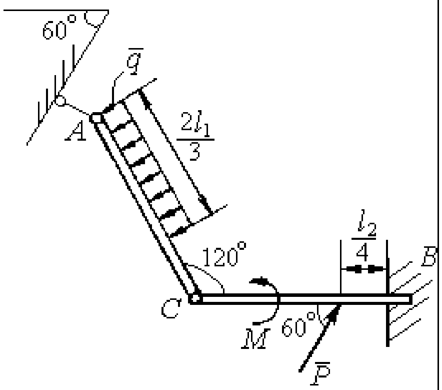
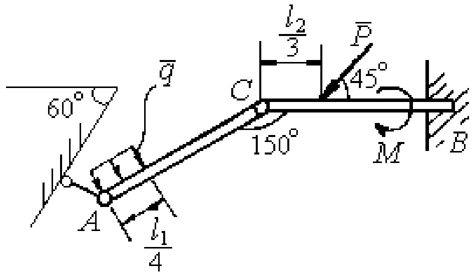
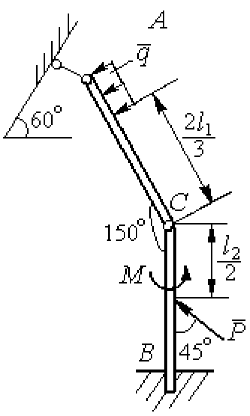
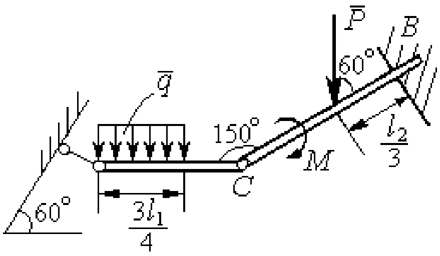
Продолжение табл. 1.1

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
7		8	
9		10	
11		12	

Продолжение табл. 1.1

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
13		14	
15		16	
17		18	

Окончание табл. 1.1

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
19		20	
21		22	
23		24	

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2
ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОЧКИ, СОВЕРШАЮЩЕЙ СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Цель работы

Целью лабораторной работы является приобретение студентами понятий сложного, относительного и переносного движений точки, наблюдаемых с разных систем отсчета и движущихся заданным образом друг относительно друга, понятия кориолисова ускорения, умений найти связи между кинематическими характеристиками движения точки по отношении к каждой системе отсчета в отдельности и умений их вычислять.

Приобретение навыков и умений при решении предложенных задач будет способствовать усвоению студентами метода разложения сложного движения точки на более простые и легко исследуемые относительное и переносное движения точки при решении практических задач механики.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Кинематика изучает движение тел по отношению к системе координат, связанной с другим телом (например, с Землей) с геометрической стороны, без учета причин, вызывающих это движение. При этом движение тел предполагается совершающимся во времени.

Для простоты изучения, в кинематике изучается сначала движение одной точки, а затем – движение твердых тел.

1. Кинематика точки

Кинематика точки рассматривает две основные задачи.

А) Задача задания движения точки

Движение точки в пространстве считается заданным, если найден способ, при помощи которого каждому моменту времени t однозначно ставится в соответствие положение точки в пространстве.

Б) Задача определения кинематических характеристик движения точки – скорости точки и ускорения точки

Существует три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

Для того, чтобы задать движение точки векторным способом, нужно радиус-вектор $\bar{r}$ движущейся точки M относительно центра O (рис. 2.1), принимаемого за неподвижную точку, задать как функцию времени $\bar{r} = \bar{r}(t)$.

По определению ***скорость точки*** $\bar{V}$ в данный момент времени - это вектор, равный производной от радиуса-вектора движущейся точки по времени и направленный по касательной к траектории точки в сторону движения:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \qquad (2.1)$$

В декартовой системе координат *Oxyz*, принимаемой за неподвижную, радиус-вектор движущейся точки (рис. 2.1) определяется равенством

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - орты координатных осей;

$$x = x(t), \; y = y(t), \; z = z(t). \qquad (2.2)$$

Уравнения (2.2) являются уравнениями движения точки, заданными координатным способом. Эти же уравнения являются уравнениями траектории точки (рис. 2.1) в параметрическом виде, где параметром является время *t*. Для определения траектории точки в случае задания ее движения координатным способом необходимо из уравнений (2.2) исключить время *t*. Для вычисления скорости точки, заданной координатным способом по формуле (2.1), имеем

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}, \qquad (2.3)$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = V_x$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = V_y$, $\dot{z} = \frac{dz}{dt} = V_z$ - проекции вектора скорости точки на неподвижные декартовы координаты. Модуль скорости точки определяется формулой

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \qquad (2.4)$$

Направление вектора скорости задается направляющими косинусами:

$$\cos(\bar{V}, \bar{i}) = \frac{V_x}{V},$$

$$\cos(\bar{V}, \bar{j}) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos(\bar{V}, \bar{k}) = \frac{V_z}{V}.$$

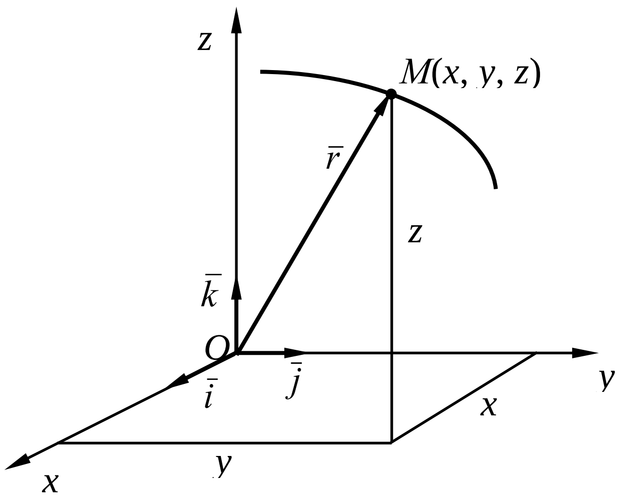


Рис. 2.1

Ускорение точки определяется как первая производная от вектора скорости по времени:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}\,, \qquad (2.5)$$

где $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = a_x$, $\ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = a_y$, $\ddot{z} = \dfrac{d^2z}{dt^2} = a_z$ - проекции вектора ускорения точки на неподвижные декартовы координаты.

Модуль вектора ускорения точки вычисляется аналогично модулю вектора скорости точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,, \qquad (2.6)$$

а направление вектора ускорения - направляющими косинусами:

$$\cos\left(\bar{a},\bar{i}\right) = \frac{a_x}{a},\ \cos\left(\bar{a},\bar{j}\right) = \frac{a_y}{a},\ \cos\left(\bar{a},\bar{k}\right) = \frac{a_z}{a}\,.$$

Движение точки может быть задано также ***естественным способом***. При этом способе должна быть известна траектория точки и задан закон движения точки M по этой траектории: $s = s(t)$, где $s = \cup\ M_0M$ - дуга, отсчитываемая на траектории от начального положения точки M_0.

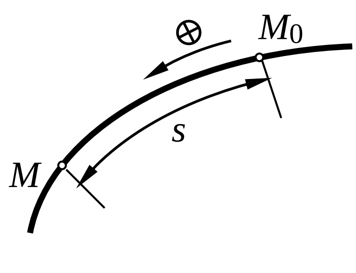


Рис. 2.2

Для определения положения точки на траектории задается также направление положительного отсчета дуги (рис. 2.2).

При этом способе используются естественные оси с началом в текущем положении точки M на траектории (рис. 2.3) и единичными векторами $\bar{\tau}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$.

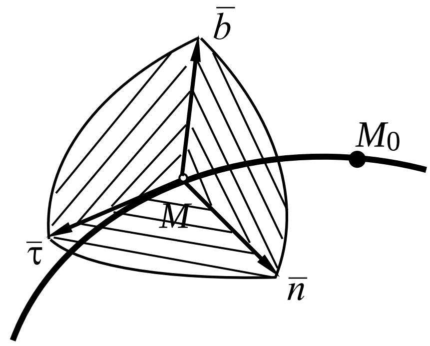


Рис. 2.3

Единичный вектор $\bar{\tau}$ направлен по касательной к траектории в сторону положительного отсчета дуги, единичный вектор $\bar{n}$ направлен по главной нормали траектории в сторону ее вогнутости, единичный вектор $\bar{b}$ направлен по бинормали к траектории в точке M.

Орты $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$ лежат в соприкасающейся плоскости, орты $\bar{n}$ и $\bar{b}$ в нормальной плоскости, орты $\bar{\tau}$ и $\bar{b}$ - в спрямляющей плоскости.

Скорость точки при естественном способе задания движения точки определяется формулой

$$\bar{V} = V_\tau \cdot \bar{\tau},$$

где проекция вектора скорости на касательную V_τ определяется по формуле

$$V_\tau = \dot{s} = \frac{ds}{dt}.$$

Модуль вектора скорости $V = |V_\tau|$.

Вектор ускорения точки лежит в соприкасающейся плоскости и раскладывается на касательную и нормальную составляющие:

$$\bar{a} = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n},$$

где проекция вектора ускорения на касательную

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \dot{V}_\tau \qquad (2.8)$$

называется ***касательным*** (***тангенциальным***) ***ускорением***.

Касательное ускорение характеризует «быстроту» изменения величины скорости. При $a_\tau \cdot V_\tau > 0$ (векторы касательного ускорения и скорости направлены в одну сторону) точка в данный момент времени движется ускорено, при $a_\tau \cdot V_\tau < 0$ (векторы касательного ускорения и скорости направлены в разные стороны) – замедленно. Проекция ускорения на главную нормаль

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}, \qquad (2.9)$$

где ρ - радиус кривизны траектории в точке M; называется ***нормальным ускорением***. Модуль вектора ускорения определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (2.10)$$

Направление вектора ускорения определяется направляющими косинусами $\cos(\bar{a},\bar{\tau}) = \frac{a_\tau}{a}$, $\cos(\bar{a},\bar{n}) = \frac{a_n}{a}$.

2. Кинематика твердого тела. Простейшие движения твердого тела

Кинематика твердого тела рассматривает три основные задачи

А) Задача задания движения тела.

Б) Задача определения кинематических характеристик твердого тела – угловой скорости и углового ускорения тела.

В) Задача определения кинематических характеристик отдельных точек тела – задача распределения скоростей и ускорений.

Простейшими движениями твердого тела являются поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси.

Поступательным движением твердого тела называется такое его движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной своему первоначальному положению.

При поступательном движении твердого тела траектории всех его точек одинаковы, а их скорости и ускорения в каждый момент времени равны между собой. Следовательно, изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения одной его точки, т. е. связано с кинематикой точки.

Вращением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения.

Прямая, проходящая через неподвижные точки тела, называется осью вращения тела.

Вращательное движение тела вокруг неподвижной оси задается углом поворота φ между двумя полуплоскостями, проходящими через ось вращения z (рис. 2.4), одна из которых Π_1, неподвижна, а другая П, неизменно связана с вращающимся телом.

Уравнение

$$\varphi = \varphi(t) \tag{2.11}$$

определяет ***закон вращательного движения тела вокруг неподвижной оси***.

Угол φ считается положительным, если он откладывается от неподвижной плоскости против хода часовой стрелки, и отрицательным – в противном случае, если смотреть с конца оси *z*. Дуговая стрелка на рис. 2.4 показывает направление положительного отсчета угла φ.

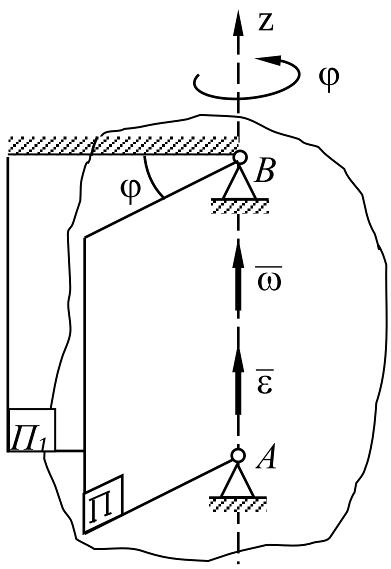


Рис. 2.4

Состояние движения вращающегося тела в данный момент времени характеризуется ***вектором угловой скорости*** $\overline{\omega}$, направленным вдоль оси вращения и ***вектором углового ускорения*** $\overline{\varepsilon}$, также направленным вдоль оси вращения (рис. 2.4).

Проекции вектора угловой скорости и вектора углового ускорения на ось *z* определяются по формулам

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\,[\text{рад/с}];$$
$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \ddot{\varphi}[\text{рад/с}^2]. \qquad (2.12)$$

Если $\omega_z > 0$, то направление вектора угловой скорости $\overline{\omega}$ совпадает с положительным направлением оси *z*, и вращение тела происходит против хода часовой стрелки, если смотреть с конца оси; если $\omega_z < 0$, то вектор $\overline{\omega}$ направляется в отрицательную сторону оси *z* и вращение тела происходит по ходу часовой стрелки.

Если $\varepsilon_z > 0$, то направление вектора углового ускорения $\overline{\varepsilon}$ совпадает с положительным направлением оси *z*, если $\varepsilon_z < 0$, то вектор $\overline{\varepsilon}$ направляется в отрицательную сторону оси *z*.

Если ω_z и ε_z имеют одинаковые знаки, то вращение тела будет ускоренным, если разные, то – замедленным.

Вращение тела вокруг неподвижной оси называется ***равномерным***, если оно происходит с постоянной угловой скоростью

$$\omega_z = \text{const}.$$

Вращение тела вокруг неподвижной оси называется ***равнопеременным***, если оно происходит с постоянным угловым ускорением

$$\varepsilon_z = \text{const}.$$

Если при этом ω_z и ε_z имеют одинаковые знаки, то вращение тела называется ***равноускоренным***, если ω_z и ε_z имеют разные знаки, то – ***равнозамедленным***.

Траекториями точек тела при вращательном движении являются окружности, центры которых лежат на оси вращения z (рис. 2.5), а их векторы $\overline{V}$ по модулю пропорциональны расстояниям до центра вращения r (радиусам вращения) и равны

$$\boxed{V = \omega \cdot r.} \tag{2.13}$$

Векторы скоростей точек тела направляются по касательным к окружностям в сторону вращения тела. Дуговая стрелка на рис. 2.5 указывает направление вращения тела.

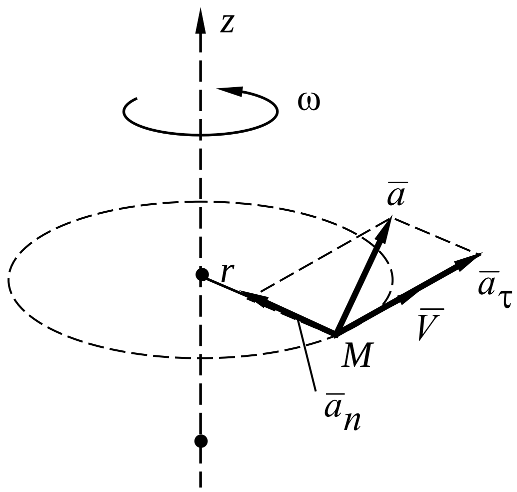


Рис. 2.5

Ускорения произвольных точек M тела при вращательном движении раскладывается на ***касательную и нормальную составляющие***:

$$\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n,$$

модули которых определяются по формулам

$$\boxed{\begin{gathered} a_\tau = \varepsilon \cdot r, a_n = \omega^2 \cdot r, \\ a = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \end{gathered}} \tag{2.14}$$

Вектор касательного ускорения $\overline{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории точки в сторону вращения тела (рис. 2.5), если ω_z и ε_z имеют одинаковые знаки, и в обратную сторону, если ω_z и ε_z имеют разные знаки.

Вектор нормального ускорения $\bar{a}_n$ всегда направлен по радиусу вращения к оси вращения тела.

3. Сложное движение точки

Рассмотрим движение точки M относительно двух систем координат $Oxyz$ и $O_1x_1y_1z_1$, движущихся друг относительно друга (рис. 2.6). В механике системы координат предполагаются жестко скрепленными с телами, по отношению к которым рассматривается движение точки. Тела на рисунках не показываются.

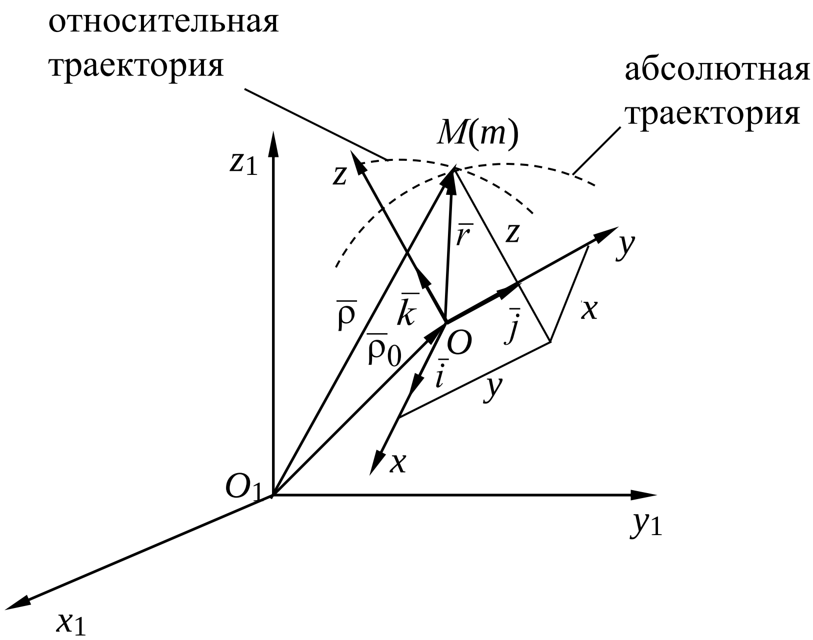


Рис. 2.6

Пусть задано движение системы координат $Oxyz$ относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Движение точки M относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ называют сложным, если задано ее движение относительно системы координат $Oxyz$. Систему координат $O_1x_1y_1z_1$ принимают при этом за неподвижную или основную, а систему координат $Oxyz$ - за подвижную. Движение точки M относительно подвижной системы координат называют ***относительным***. Соответственно, траектория (рис. 2.6), скорость $\bar{V}_r$ и ускорение $\bar{a}_r$ точки в ее движении относительно подвижной системы координат называются ***относительными***. Положение точки M по отношению к системе координат $Oxyz$ определяет радиус-вектор $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Для определения относительной скорости и относительного ускорения точки следует мысленно остановить движение подвижной системы координат и вычислить их по правилам кинематики точки.

Движение подвижной системы координат относительно неподвижной называют ***переносным движением***.

Переносной скоростью $\overline{V}_e$ **(*ускорением*** $\overline{a}_e$**)** точки M в данный момент времени называют вектор, равный скорости $\overline{V}_m$ (ускорению $\overline{a}_m$) той точки m подвижной системы координат, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка M. Для определения переносной скорости $\overline{V}_e$ и переносного ускорения $\overline{a}_e$ в данный момент времени необходимо мысленно остановить в этот момент времени относительное движение точки, определить точку m тела, неизменно связанного с подвижной системой координат, где находится в остановленный момент точка M, и вычислить скорость и ускорение точки m тела, совершающего переносное движение относительно неподвижной системы координат.

Движение точки M относительно неподвижной системы координат называют ***абсолютным***. Соответственно, траекторию (рис. 2.6), скорость $\overline{V}_a$ и ускорение $\overline{a}_a$ относительно неподвижной системы координат называют ***абсолютными***.

Абсолютная скорость точки $\overline{V}_a$ определяется по ***теореме о сложении скоростей***, согласно которой абсолютная скорость точки, совершающей сложное движение, равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей:

$$\overline{V}_a = \overline{V}_e + \overline{V}_r. \qquad (2.15)$$

Абсолютное ускорение точки $\overline{a}_a$ определяется по ***теореме Кориолиса***, согласно которой абсолютное ускорение точки, совершающей сложное движение, равно геометрической сумме переносного, относительно и кориолисова ускорений:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_k. \qquad (2.16)$$

Кориолисово ускорение вычисляется по формуле

$$\overline{a}_k = 2\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r, \qquad (2.17)$$

где $\overline{\omega}_e$ - вектор угловой скорости переносного движения, $\overline{V}_r$ - вектор относительной скорости точки. Направление вектора кориолисова ускорения определяется по правилу векторного произведения: кориолисово ускорение будет направлено перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\overline{\omega}_e$ и $\overline{V}_r$ (рис. 2.7), в ту сторону, откуда кратчайший поворот от вектора $\overline{\omega}_e$ к вектору $\overline{V}_r$ видится происходящим против хода часовой стрелки.

Модуль кориолисова ускорения равен $a_k = 2\omega_e V_r \sin(\overline{\omega}_e, \overline{V}_r)$.

При переносном поступательном движении кориолисово ускорение в формуле (2.16) обращается в нуль:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r.$$

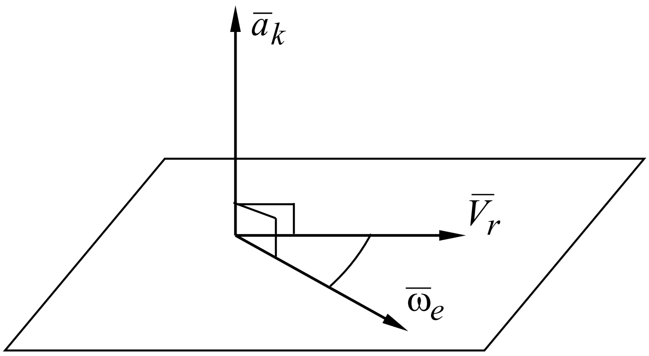


Рис. 2.7

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ. ПРИМЕР

1. Рассмотреть движение точки как сложное, разложив его на переносное и относительное движения.

2. Выбрать подвижную и неподвижную системы координат.

3. Определить угловую скорость и угловое ускорение переносного движения подвижной системы координат.

4. Мысленно остановив движение точки M в ее относительном движении в заданный момент времени t_1, определить точку m подвижной системы координат, где окажется остановленная точка.

На запрос компьютера ввести расстояние ОМ в момент времени t_1.

5. Определить расстояние h от точки M до оси вращения z_1.

На запрос компьютера ввести расстояние h от точки М до оси вращения z_1.

6. Вычислить угловую скорость квадрата ω по заданному закону вращательного движения φ = φ(t).

На запрос компьютера ввести угловую скорость квадрата ω.

7. Определить переносные скорость $\bar{V}_e$ и ускорение $\bar{a}_e$, вычислив скорость и ускорение точки m подвижной системы координат относительно неподвижной системы координат.

На запрос компьютера ввести модуль переносной скорости точки V_e.

На запрос компьютера ввести модуль переносного ускорения точки a_e.

8. Мысленно остановив переносное движение подвижной системы координат, определить относительные скорость $\overline{V}_r$ и ускорение $\overline{a}_r$ точки в заданный момент времени.

На запрос компьютера ввести модуль относительной скорости точки V_r.

На запрос компьютера ввести модуль относительного ускорения точки a_r.

9. Определить кориолисово ускорение $\overline{a}_k$ точки в заданный момент времени.

На запрос компьютера ввести модуль кориолисова ускорения точки a_k.

10. По теореме сложения скоростей определить абсолютную скорость точки.

На запрос компьютера ввести модуль абсолютной скорости точки V_a.

11. Методом проекций по теореме сложения ускорений определить абсолютное ускорение точки.

На запрос компьютера ввести модуль абсолютного ускорения точки a_a.

Пример. Квадрат D со стороной $2a$ = 40 см (рис. 2.8) вращается вокруг неподвижной оси O_1z_1 по заданному закону $\varphi = 4t^2 + 5t$. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунке дуговой стрелкой. По диагонали квадрата вдоль оси Ox, связанной плоскостью квадрата, движется точка M по закону $x = 4\cos^2\dfrac{\pi t}{6}$.

Для момента времени t_1 = 2,5 с определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.

Решение. Абсолютное движение точки M складывается из относительного движения точки по диагонали квадрата, заданного координатой $x = 4\cos^2\dfrac{\pi t}{6} + 3$, и переносного вращательного движения самого квадрата, заданного законом вращательного движения $\varphi = 4t^2 + 5t$.

Неподвижную систему координат $O_1x_1y_1z_1$ свяжем с опорой O_1 (рис. 2.8), направив ось z_1 по средней линии, вокруг которой вращается квадрат, а подвижную систему координат $Oxyz$ - с квадратом (на рисунке показана только ось Ox). Считается, что плоскость квадрата в данный момент времени совпадает с плоскостью $O_1x_1z_1$.

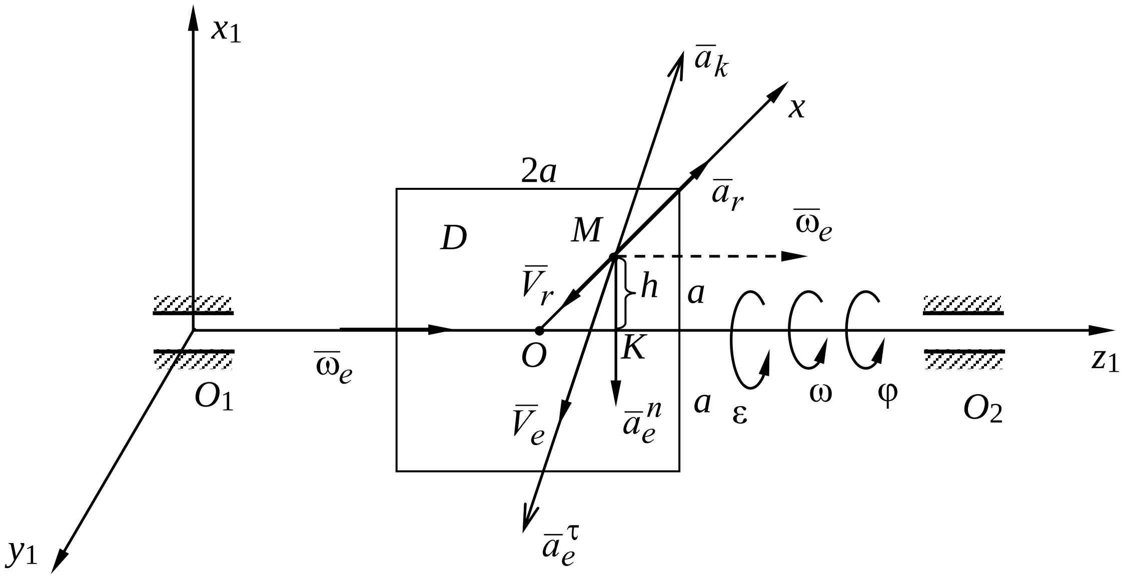


Рис. 2.8

Вычислим угловую скорость и угловое ускорение квадрата:

$$\omega_{ez_1} = \dot{\varphi} = 8t + 5, \;\; \varepsilon_{ez_1} = \dot{\omega}_{ez_1} = 8.$$

В заданный момент времени t_1 = 2,5 с $\omega_{ez_1} = 25$ и, следовательно, квадрат вращается ускоренно с угловой скоростью в данный момент времени $\omega_e = 25$ рад/с и угловым ускорением 8 рад/с^2 в положительном направлении отсчета угла поворота (рис. 2.8).

Определим положение точки M в момент времени t_1 = 2,5 с

$$x_1 = 4\cos^2 \pi \cdot 2{,}5/6 + 3 = 3{,}26795 \text{ см},$$

***OM* = 3,26795 см.**

Для определения переносной скорости $\overline{V}_e$ и переносного ускорения $\overline{a}_e$ мысленно остановим относительное движение точки в момент времени t_1 = 2,5 с и определим скорость и ускорение той точки m квадрата (рис. 2.8), где в данный момент находится движущаяся точка M

$$V_e = V_m = \omega_e \cdot h, \tag{2.18}$$

где h = MK – расстояние от точки M до оси вращения z_1. Из прямоугольного треугольника OMK

$$MK = OM \cdot \sin 45° = 2{,}31079 \text{ см}$$

и, следовательно, по формуле (2.18) ***модуль переносной скорости***

$$V_e = 25 \cdot 2{,}31079 = 57{,}76975 \text{ см/с}.$$

Вектор $\overline{V_e}$ направлен параллельно оси O_1y_1 в сторону вращения квадрата (рис. 2.8), т. е. в сторону положительного направления оси O_1y_1.
Переносное ускорение раскладываем на касательную и нормальную составляющие

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_e^{n},$$

где $a_e^n = \omega_e^2 \cdot h = 25^2 \cdot 2{,}31079 = 1444{,}24375$ см/с^2,
$a_e^{\tau} = \varepsilon_e \cdot h = 8 \cdot 2{,}310789 = 18{,}48632$ см/с^2.

Модуль переносного ускорения равен

$$a_e = \sqrt{\left(a_e^n\right)^2 + \left(a_e^{\tau}\right)^2} = \sqrt{1444{,}24375^2 + 18{,}48632^2} = 1444{,}36 \text{ см/с}^2.$$

Вектор нормального переносного ускорения $\bar{a}_e^n$ направим по прямой MK к оси вращения. Вектор касательного ускорения $\bar{a}_e^{\tau}$ направим в сторону дуговой стрелки углового ускорения параллельно оси O_1y_1, т. е. в положительную сторону оси O_1y_1. Его направление совпадает с направлением переносной скорости $\overline{V_e}$ (рис. 2.8).

Перейдем к вычислению относительной скорости и относительного ускорения точки M: мысленно остановим вращательное движение квадрата.

Относительное движение точки M задано координатой

$$x = 4\cos^2\frac{\pi t}{6} + 3.$$

Определим проекцию относительной скорости на ось x:

$$V_{rx} = \dot{x} = -\frac{8\pi}{6}\cos\frac{\pi t}{6} \cdot \sin\frac{\pi t}{6} = -\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi t}{3}.$$

Для момента времени t_1 =2,5 с

$$V_{rx} = -\frac{2}{3}\pi\sin(\pi \cdot 2{,}5/3) = -1{,}0472 < 0.$$

Проекция относительной скорости на ось x отрицательна, следовательно, вектор $\overline{V_r}$ направлен вдоль оси x в отрицательную сторону (рис. 2.8).

Модуль относительной скорости V_r = 1,0472 см/с.

Определим проекцию относительного ускорения на ось x:

$$a_{r_x} = \dot{V}_x = -\frac{2\pi^2}{9}\cos\frac{\pi t}{3}.$$

Для момента времени t_1 =2,5 с

$$a_{r_x} = -\frac{2\pi^2}{9}\cos\frac{\pi 2{,}5}{3} = 1{,}89942 \text{ см/с}^2.$$

Поскольку $a_{r_x} > 0$, направление вектора $\bar{a}_r$ совпадает с направлением оси Ox (рис. 2.8).

Модуль относительного ускорения a_r = 1,89942 см/с^2.

Кориолисово ускорение $\bar{a}_k$ определим по формуле (2.17)

$$\bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r.$$

Модуль кориолисова ускорения в момент времени t_1 =2,5 с равен:

$$a_k = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot 25 \cdot 1{,}0472 \cdot \sin 45^\circ = 37{,}02411 \quad \text{см/с}^2.$$

Вектор кориолисова ускорения направлен параллельно оси O_1y_1 в отрицательную сторону (рис. 2.8). Абсолютную скорость точки M вычислим по теореме сложения скоростей (2.15):

$$\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$

Так как векторы $\bar{V}_r$ и $\bar{V}_e$ взаимно перпендикулярны (см. рис. 2.8), то ***модуль абсолютной скорости точки***

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = \sqrt{57{,}76975^2 + 1{,}0472^2} = 57{,}77925 \text{ см/с}.$$

Абсолютное ускорение точки M вычислим по теореме Кориолиса (2.16):

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_k\ . \qquad (2.19)$$

Проектируя (2.19) на оси координат $O_1x_1y_1z_1$, находим

$$a_{a_{x_1}} = a_r \cdot \cos 45^\circ - a_e^n = 1{,}89942 \cdot \cos 45^\circ - 1444{,}24375 = -1442{,}9006\,,$$

$$a_{a_{y_1}} = a_e^\tau - a_k = 18{,}48632 - 37{,}02411 = -18{,}53779\,,$$

$$a_{a_{z_1}} = a_r \cdot \cos 45^\circ = 1{,}89942 \cdot \cos 45^\circ = 1{,}34309\,.$$

Модуль абсолютного ускорения точки М

$$a_a = \sqrt{a_{a_{x_1}}^2 + a_{a_{y_1}}^2 + a_{a_{z_1}}^2} = \sqrt{1442{,}9006^2 + 18{,}53779^2 + 1{,}34309^2} =$$

$$= 1443{,}0203 \text{ см/с}^2.$$

ЗАДАНИЕ

В табл. 2.1 даны 24 варианта задания, в которых квадрат D со стороной $2a$ = 40 см вращается вокруг неподвижной оси O_1x_1 по заданному закону $\varphi = \varphi(t)$. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунке дуговой стрелкой. По квадрату вдоль оси Ox, связанной с плоскостью квадрата, движется точка M по закону $OM = x(t)$.

Для заданного момента времени $t = t_1$ определить:

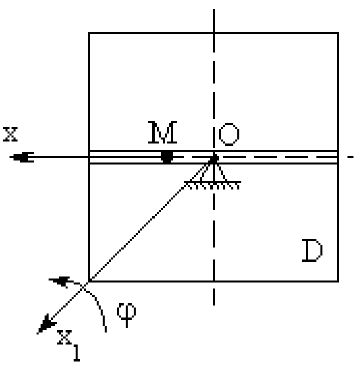
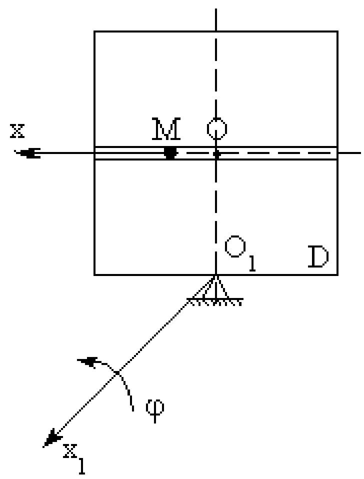
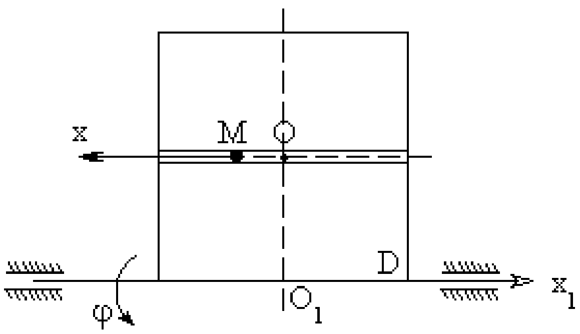
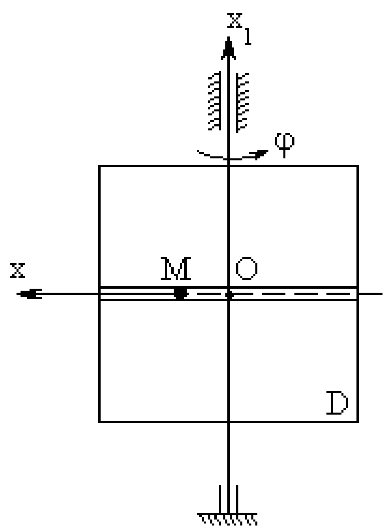
- абсолютную скорость точки M,
- абсолютное ускорение точки M.

После ввода номера задания через список прокруткой на экране компьютера появится рисунок задания, его текст и типовые исходные данные, которые преподаватель как и в первом задании может изменять по своему усмотрению. Для этого нужно выбрать вторую версию лабораторной работы и ввести свои исходные данные через текстовые поля на экране компьютера.

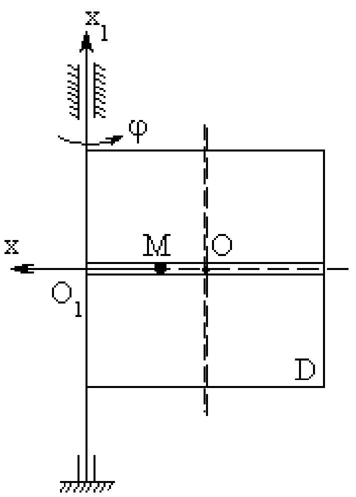
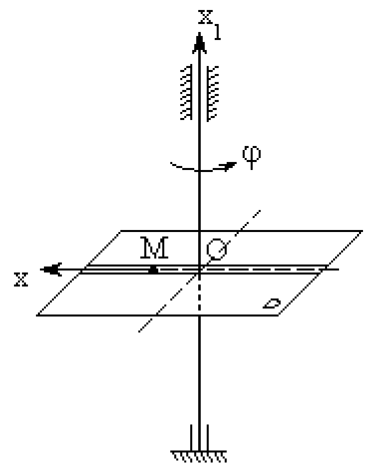
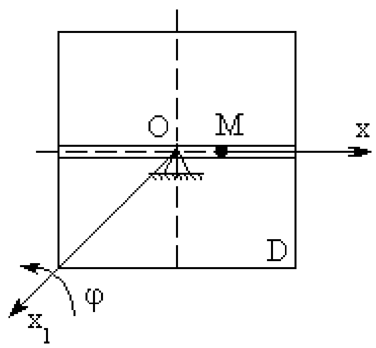
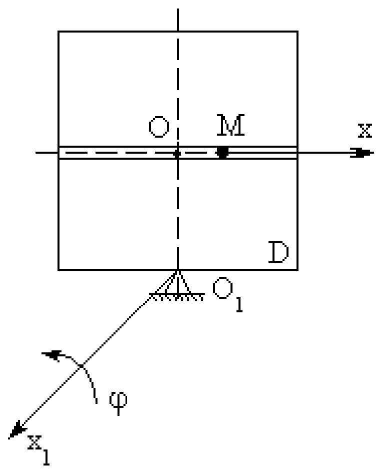
После нажатия командной кнопки с текстом «Вперед» на экране демонстрируется сложное движение точки, реализуемое анимацией. С помощью командной кнопки с текстом «Назад» можно вернуться к предыдущей странице.

Далее на последующей странице обучаемый должен ввести через текстовые поля на экране компьютера свои результаты по ходу решения задачи. Как и в первой лабораторной работе предусмотрен компьютерный контроль правильности выполнения задания и его оценка.

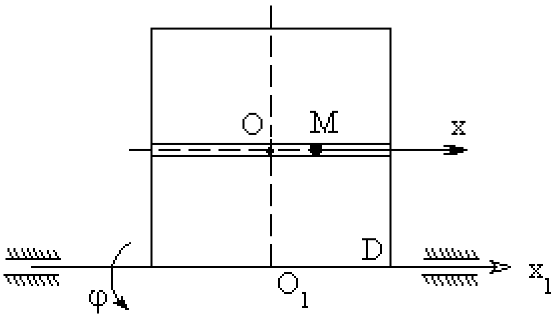
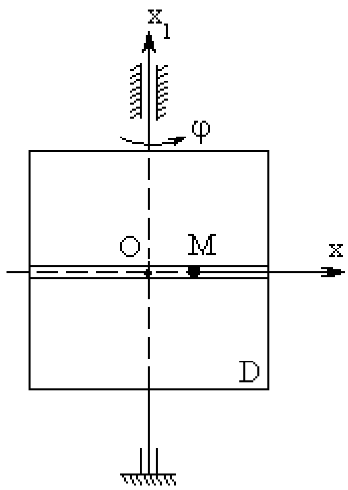
Таблица 2.1

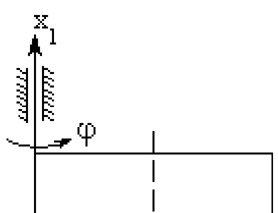
№ вари-анта	Задание	№ вари-анта	Задание
1		2	
3		4	

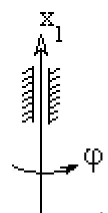
Продолжение табл. 2.1.

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
5		6	
7		8	

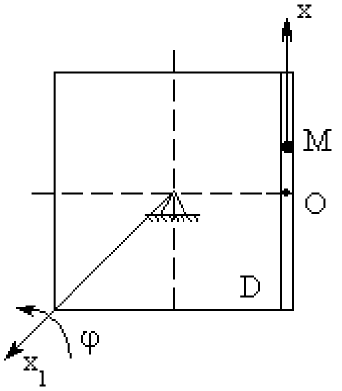
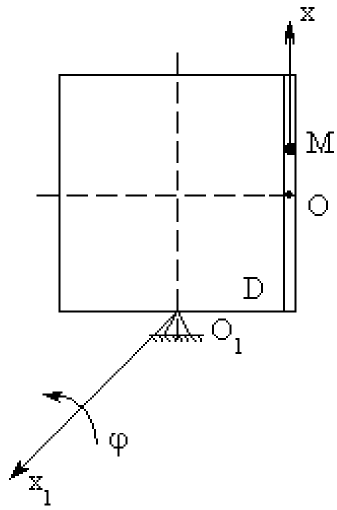
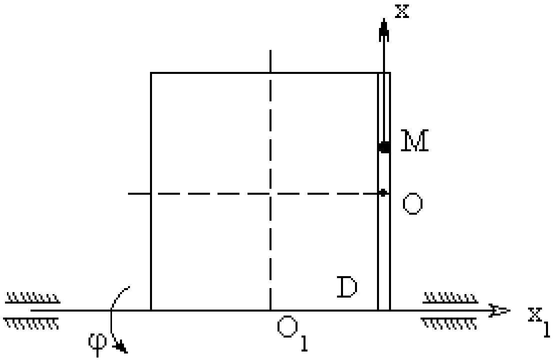
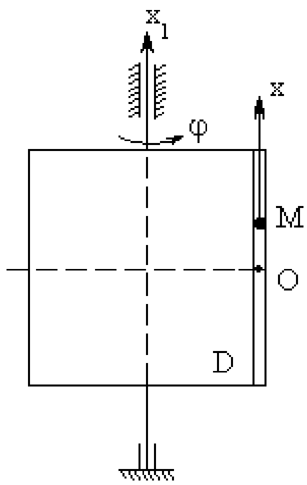
Продолжение табл. 2.1

№ вари-анта	Задание	№ вари-анта	Задание
9		10	
11		12	

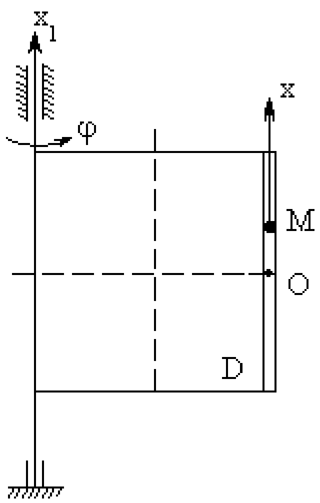
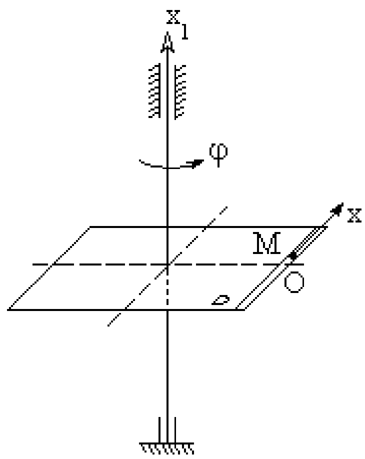
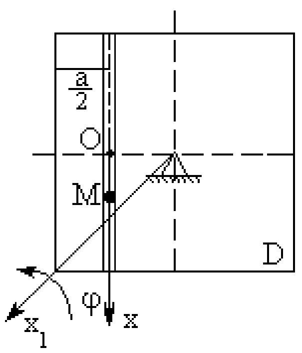
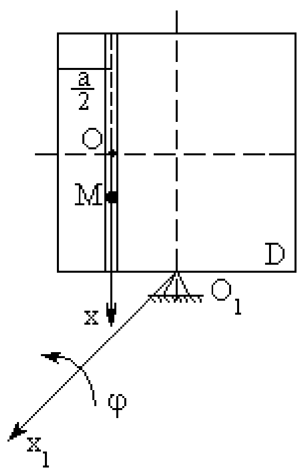




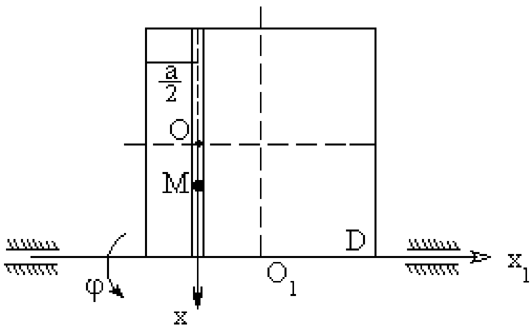
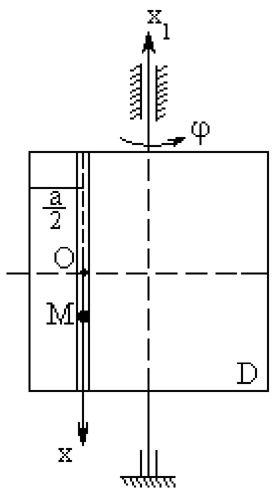
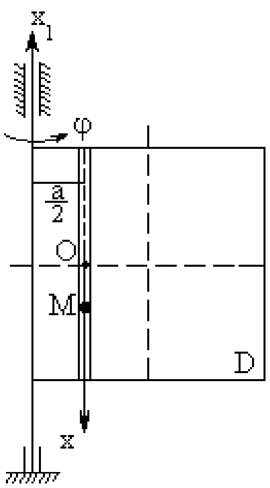
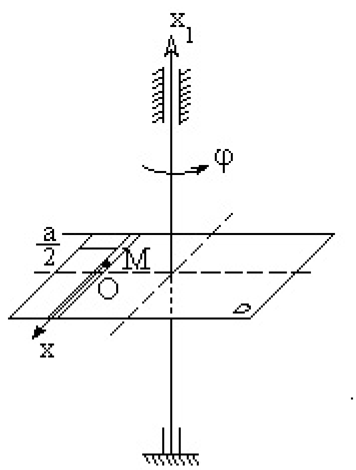
Продолжение табл. 2.1

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
13		14	
15		16	

Продолжение табл. 2.1

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
17		18	
9		20	

Окончание табл. 2.1

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
21		22	
23		24	

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для вузов. 11-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1995.

2. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для техн. вузов/ А.А.Яблонский, С.С.Норейко, С.А.Вольфсон и др., 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 1985. – 367 с.

3. Хакимуллина Л.Ш., Петрушенко Ю.Я. Опыт разработки и применения лабораторного практикума на базе компьютера в курсе теоретической механики// Инновационное образование: проблемы, поиски, решения: Материалы IV междунар. науч.-методической конф. – Казань, КГЭУ, 2006. – С. 231-233.

Содержание

Учебное издание

Петрушенко Юрий Яковлевич,
Хакимуллина Лариса Шарифовна

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ НА БАЗЕ КОМПЬЮТЕРА
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Статика и кинематика

(Кафедра механики КГЭУ)

Редактор издательского отдела Н.А.Артамонова

Изд. Лиц. ИД № 03480 от 08.12.00. Подписано в печать 07.12.07.
Формат 60×84/16. Гарнитура «Times». Вид печати РОМ.
Физ.печ.л. . Усл.печ.л. . Уч.-изд.л.
Тираж 500 экз. Заказ №3074

Издательский отдел КГЭУ, 420066, Казань, Красносельская, 51
Типография КГЭУ, 420066, Казань, Красносельская, 51