Известия вузов. Математика *http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/*
2014, №8, с. 1–4 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное А.М. Бикчентаевым

М.А. АУХАДИЕВ, А.С. НИКИТИН, А.С. СИТДИКОВ

СКРЕЩЕННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ АЛГЕБРЫ КАНОНИЧЕСКИХ АНТИКОММУТАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ В АЛГЕБРЕ КУНЦА

Аннотация. В работе показывается, что алгебра Кунца является C^*-скрещенным произведением алгебры канонических антикоммутационных соотношений, порожденной стандартной рекурсивной фермионной системой, с группой целых чисел по эндоморфизму.

Ключевые слова: алгебра Кунца, скрещенное произведение, рекурсивная фермионная система, полевая алгебра, C^*-алгебра, изометрия.

УДК: 512.667 : 517.51

Появление данной статьи мотивировано необходимостью построения полевой алгебры [1]–[3] с целью описания суперотборной структуры [4] конечных квантовых ферми-систем. С этой целью построено скрещенное произведение C^*-алгебры Кунца с группой целых чисел по некоторому эндоморфизму [5]. При этом использованы результаты работы [6], где была предложена рекурсивная конструкция построения алгебры канонических антикоммутационнvх соотношений (КАС) с помощью генераторов алгебры Кунца $\mathcal{O}_2$ (т. е. вложение алгебры КАС в $\mathcal{O}_2$).

Алгебра Кунца $\mathcal{O}_d$ ($d \geq 2$) представляет собой C^*-алгебру, порожденную изометриями $\psi_1, \psi_2, \ldots,\ \psi_d$, которае удовлетворяют соотношениям

$$\psi_i^* \psi_j = \delta_{i,j} I,$$
$$\sum_{i=1}^{d} \psi_i \psi_i^* = I,$$

где I — единица алгебры. Введем для удобства сокращения: $\psi_{i_1 i_2 \cdots i_m} \equiv \psi_{i_1}\psi_{i_2}\cdots\psi_{i_m}$, $\psi^*_{i_1 i_2 \cdots i_m} \equiv \psi^*_{i_m} \ldots \psi^*_{i_2}\psi^*_{i_1}$ и $\psi_{i_1\cdots i_m;\, j_n \cdots j_1} \equiv \psi_{i_1}\cdots\psi_{i_m}\psi^*_{j_n}\cdots\psi^*_{j_1}$. Из приведенных выше соотношений следует, что алгебра $\mathcal{O}_d$ как линейное пространство порождена так называемыми *мономами* — операторами вида $\psi_{i_1\cdots i_m;\, j_n \cdots j_1}$. *Канонический* унитальный $*$-эндоморфизм ρ алгебры $\mathcal{O}_d$ определяется как

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^{d} \psi_i X \psi_i^*, \quad X \in \mathcal{O}_d.$$

Поступила 24.03.2014

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научных проектов № 13-02-97054 р-поволжье_а.

Генераторы a_m и a_n^* $(m, n = 1,\, 2,\, \dots)$ C^*-алгебры КАС фермионов удовлетворяют условиям [7]

$$\{a_m,\, a_n\} = \{a_m^*,\, a_n^*\} = 0,$$
$$\{a_m,\, a_n^*\} = \delta_{m,n} I.$$

В [6] показывается, что алгебра КАС изоморфна алгебре $\mathcal{O}_2^{U(1)} \subset \mathcal{O}_2$, которая состоит из элементов алгебры $\mathcal{O}_2$, инвариантных относительно стандартного действия группы $U(1)$. Другими словами, эта подалгебра как линейное пространство порождена мономами вида

$$\psi_{i_1} \cdots \psi_{i_k} \psi_{j_k}^* \cdots \psi_{j_1}^*,$$

где $i_1, \dots, i_k,\, j_1, \dots, j_k = 1, 2$. Здесь действие τ группы $U(1)$ на $\mathcal{O}_2$ задается посредством

$$\tau(z)(\psi_i) = z\psi_i, \quad z \in U(1) \ \ i = 1, 2.$$

Согласно работе [6] конструкция рекурсивной фермионной системы (РФС) состоит из трех составляющих: элемента $\mathbf{a} \in \mathcal{O}_d$, отображения ζ на $\mathcal{O}_{2d}$ и унитального $*$-эндоморфизма φ на $\mathcal{O}_d$. Эта тройка $R = (\mathbf{a}, \zeta, \varphi)$, называемая РФС в $\mathcal{O}_d$, удовлетворяет следующим условиям:

$$\mathbf{a}^2 = 0, \quad \{\mathbf{a}, \mathbf{a}^*\} = I, \tag{1}$$
$$\{\mathbf{a}, \zeta(X)\} = 0, \quad \zeta(X)^* = \zeta(X^*), \quad X \in \mathcal{O}_2, \tag{2}$$
$$\zeta(X)\zeta(Y) = \varphi(XY), \quad X, Y \in \mathcal{O}_2. \tag{3}$$

Вложение Φ_R алгебры КАС в $\mathcal{O}_d$, ассоциируемое с $R = (\mathbf{a}, \zeta, \varphi)$, определяется образами генераторов a_n $(n = 1, 2, \dots)$ алгебры КАС следующим образом:

$$\Phi_R(a_n) \equiv \zeta^{n-1}(\mathbf{a}) \equiv (\underbrace{\zeta \circ \zeta \circ \cdots \circ \zeta}_{n-1})(\mathbf{a}), \quad n = 1, 2, \dots\ .$$

В силу равенств (1)–(3) эти элементы удовлетворяют соотношениям

$$\{\Phi_R(a_m), \Phi_R(a_n)\} = \varphi^{m-1}(\{\mathbf{a}, \zeta^{n-m}(\mathbf{a})\}) = \varphi^{m-1}(0) = 0, \quad m \le n,$$
$$\{\Phi_R(a_m), \Phi_R(a_n)^*\} = \varphi^{m-1}(\{\mathbf{a}, \varphi^{n-m}(\mathbf{a}^*)\}) = \varphi^{m-1}(0) = 0, \quad m < n,$$
$$\{\Phi_R(a_n), \Phi_R(a_n)^*\} = \varphi^{n-1}(\{\mathbf{a}, \mathbf{a}^*\}) = \varphi^{n-1}(I) = I.$$

Обозначим образ вложения алгебры КАС через $\mathcal{A}_R \subset \mathcal{O}_d$. $\mathcal{A}_R$ называется КАС-подалгеброй, ассоциированной с R.

Ограничимся случаем $d = 2$. Рассмотрим стандартную рекурсивную фермионную систему $C = (\mathbf{a}, \zeta, \varphi)$:

$$\mathbf{a} \equiv \psi_1 \psi_2^*,$$
$$\zeta(X) \equiv \psi_1 X \psi_1^* - \psi_2 X \psi_2^*, \quad X \in \mathcal{O}_2,$$
$$\varphi(X) \equiv \rho(X) = \psi_1 X \psi_1^* + \psi_2 X \psi_2^*, \quad X \in \mathcal{O}_2.$$

Здесь ρ — канонический эндоморфизм алгебры $\mathcal{O}_2$ (**??**). КАС-подалгебру, ассоциированную со стандартной рекурсивной фермионной системой C, обозначим $\mathcal{A}_C$. Как отмечалось выше, $\mathcal{A}_C = \mathcal{O}_2^{U(1)}$.

Для построения C^*-скрещенного произведения алгебры $\mathcal{A}_C$ по некоторому эндоморфизму δ этой алгебры воспользуемся теорией C^*-скрещенных произведений, описанной в [5], [8]. Рассмотрим отображение $\delta : \mathcal{A}_C \to \mathcal{O}_2$, задаваемое для каждого $a \in \mathcal{A}_C$ формулой

$$\delta(a) = \psi_1 a \psi_1^*.$$

Тогда справедлива

Лемма 1. *Отображение δ является $*$-эндоморфизмом $\delta : \mathcal{A}_C \to \mathcal{A}_C$.*

Пусть на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ задан $*$-эндоморфизм γ. Линейное положительное непрерывное отображение $\gamma_* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, сохраняющее инволюцию, называется *трансфер-оператором* (относительно γ), если для любых $a, b \in \mathcal{A}$ выполняется условие [8]

$$\gamma_*(\gamma(a)b) = a\gamma_*(b)$$

Если дополнительно для всех $a \in \mathcal{A}$ выполняется

$$\gamma\gamma_*(a) = \gamma(1)a\gamma(1),$$

то трансфер-оператор γ_* называется *полным.*

На алгебре $\mathcal{A}_C$ введем также отображение

$$\delta_*(a) = \psi_1^* a \psi_1 \quad \text{для каждого} \quad a \in \mathcal{A}_C. \tag{4}$$

Лемма 2. *Отображение δ_*, заданное формулой* (4)*, является полным трансфер-оператором $\delta_* : \mathcal{A}_C \to \mathcal{A}_C$ относительно δ.*

Предложение 1. *Для C^*-подалгебры алгебры Кунца, ассоциированной со стандартной рекурсивной фермионной системой, и для трансфер-оператора δ_* справедливы равенства*

$$\delta_*\zeta(X) = X, \quad X \in \mathcal{A}_C,$$
$$\delta_*(\mathbf{a}) = 0, \quad n = 0.$$

Рассмотрим C^*-алгебру $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathcal{A}_C, \psi_1)$, порожденную алгеброй $\mathcal{A}_C$ и изометрией ψ_1. Согласно определению [8] алгебра $\mathcal{A}_C$ является *алгеброй коэффициентов* для $\mathcal{B}$, если дополнительно выполняется очевидное свойство

$$\psi_1 a = \delta(a)\psi_1, \quad a \in \mathcal{A}_C.$$

Поэтому справедлива

Лемма 3. *Алгебра $\mathcal{A}_C$ является алгеброй коэффициентов для $\mathcal{B}$.*

В соответствии с теорией [5] алгебру $\mathcal{B}$ можно рассматривать как скрещенное произведение

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_C \times_\delta \mathbb{Z} = \mathcal{B}(\mathcal{A}_C, \psi_1),$$

элементами которого являются конечные суммы вида

$$x = \psi_1^{*N} a_{\overline{N}} + \cdots + \psi_1^* a_{\overline{1}} + a_0 + a_1\psi_1 + \cdots + a_N\psi_1^N.$$

Предложение 2. *C^*-алгебра $\mathcal{A}_C \times_\delta \mathbb{Z}$ есть алгебра Кунца.*

Таким образом, показано, что алгебру Кунца можно представить как скрещенное произведение алгебры КАС с эндоморфизмом.

Литература

[1] Doplicher S., Roberts J.E. *Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics*, Comm. Math. Phys. **131**, 51–107 (1990)

[2] Doplicher S. Roberts J.E. *Endomorphisms of C∗-algebras*, Ann. Math. **130**, 75–119 (1989).

[3] Doplicher S., Roberts J.E. *A new duality theory for compact groups*, Invent. Math. **98**, 157–218 (1989).

[4] Doplicher S., Haag R., Roberts J.E. *Local observables and particle statistics.* I, Comm. Math Phys. **23**, 199–230 (1971); *Local observables and particle statistics.* II, Comm. Math. Phys. **35**, 49–85 (1974).

[5] Антоневич А.Б., Бахтин В.И., Лебедев А.В. *Скрещенное произведение C^*-алгебры на эндоморфизм, алгебры коэффициентов и трансфер-операторы*, Матем. сб. **202** (9), 3–34 (2011).

[6] Abe M., Kawamura K. *Recursive fermion system in Cuntz algebra.* I. *Embeddings of fermion algebra into Cuntz algebra*, Comm. Math. Phys. **228**, 85–101 (2002).
[7] Брателли У., Робинсон Д. *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика* (Наука, М., 1982)
[8] Lebedev A.V., Odzijewicz A. *Extensions of C^*-algebras by partial isometries*, Math. Sb. **195**, 951–982 (2004).

М.А. Аухадиев
старший преподаватель, кафедра высшей математики,
Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,
e-mail: m.aukhadiev@gmail.com

А.С. Никитин
доцент, кафедра высшей математики,
Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,
e-mail: drnikitin@rambler.ru

А.С. Ситдиков
профессор, кафедра высшей математики,
Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,
e-mail: airat_vm@rambler.ru

M.A. Aukhadiev, A.S. Nikitin, and A.S. Sitdikov

Crossed product of an algebra of canonical anticommutative relations in the Kuntz algebra

Abstract. We show that the Cuntz algebra is a C^*-crossed product of the canonical anticommutation relations algebra, generated by a standard recursive fermion system, with the group of integers by endomorphism.

Keywords: Cuntz algebra, crossed product, recursive fermion system, algebra of fields, $C*$-algebra, isometry.

M.A. Aukhadiev
Senior Lecturer, Chair of Higher Mathematics,
Kazan State Power Engineering University,
51 Krasnosel'skaya str., Kazan, 420066 Russia,
e-mail: m.aukhadiev@gmail.com

A.S. Nikitin
Associate Professor, Chair of Higher Mathematics,
Kazan State Power Engineering University,
51 Krasnosel'skaya str., Kazan, 420066 Russia,
e-mail: drnikitin@rambler.ru

A.S. Sitdikov
Professor, Chair of Higher Mathematics,
Kazan State Power Engineering University,
51 Krasnosel'skaya str., Kazan, 420066 Russia,
e-mail: airat_vm@rambler.ru