ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2012, том 76, № 10, с. 1218–1222

УДК 539.141,51-71,51-72

ЛОКАЛЬНО КОВАРИАНТНОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЯ π-МЕЗОНОВ

© 2012 г. А. С. Ситдиков, А. А. Хамзин, А. С. Никитин, С. Ю. Антонов

Казанский государственный энергетический университет

E-mail: airat_vm@rambler.ru

Построена алгебра канонических коммутационных соотношений в форме Вейля и дана локально ковариантная формулировка заряженного скалярного поля в терминах ковариантного функтора. Симплектическое пространство решений уравнения Клейна–Гордона–Фока представляется в виде прямой суммы симплектических пространств положительно и отрицательно заряженных π-мезонов, в каждом из которых эти поля удовлетворяют требованиям локально ковариантной квантовой теории поля. С помощью естественного преобразования показана эквивалентность двух функторов, описывающих π^+- и π^--мезоны, которая, с физической точки зрения, соответствует равенству их масс.

ВВЕДЕНИЕ

Аксиоматический подход [1, 2] в релятивистской квантовой физике первоначально возник из попыток логического/математического обоснования квантово-полевой теории сильных взаимодействий. Основной причиной, вызвавшей необходимость таких попыток, было то, что разработанный в методе возмущений аппарат перенормировок, который привел к блестящему успеху в квантовой электродинамике [3] и даже в пертурбативной КХД [4], оказался непригодным для описания сильных взаимодействий, в частности для описания нуклон-нуклонного рассеяния в зарядово-независимой псевдоскалярной мезонной теории [5]. В связи с этим потребовалось создание новых принципов квантовой теории поля, отличных от лагранжева метода с его теорией возмущений, и были предприняты интенсивные исследования по общей структуре локальной релятивистской теории поля [2, 6], которая была обязана удовлетворять лишь таким физическим принципам (аксиомам), как релятивистская инвариантность пространства состояний, локальность, спектральность, пуанкаре-инвариантность полей и др. В результате такой деятельности возникли аксиоматические теории: Вайтмана, S-матрицы Боголюбова, Лемана–Симанчика–Циммермана, алгебраический подход Хаага–Кастлера–Араки.

Наиболее плодотворным, с идейной точки зрения и близости к экспериментальной ситуации, при этом оказался алгебраический подход, опирающийся на понятия физических наблюдаемых и физических состояний. При этом наблюдаемые величины, локализованные в открытых, ограниченных областях пространства–времени Минковского, образуют C^*-алгебру $\mathcal{U}$ с единицей, а физические состояния представляются функционалами на этой алгебре. Алгебраическое описание релятивистских квантовых систем прежде всего отражает локальный характер измерений наблюдаемых физических величин, а надлежащие аксиомы отражают общие связи между локальными наблюдаемыми и соответствующими этим наблюдаемым локальными алгебрами. Основы алгебраического подхода в квантовой теории поля были заложены в работах Р. Хаага, и Д. Кастлера [7] и Н. Араки [8] (см. также [9]).

Однако попытки совместить аксиому релятивистской инвариантности алгебраического подхода с эйнштейновским принципом общей ковариантности, требующим инвариантности физических законов относительно группы Эйнштейна, оказались безуспешными. Дело в том, что при замене группы Пуанкаре группой Эйнштейна аксиома локальной коммутативности теряет свой смысл.

Естественным обобщением алгебраического подхода явилась предложенная в [10] формулировка алгебраической квантовой теории поля в рамках общековариантного формализма (так называемая локально ковариантная квантовая теория поля), использущая функториальное соответствие между категорией четырехмерных пространств–времен и категорией C^*-алгебр. В этой же работе, в рамках развитого ими формализма, авторы рассматривают также теорию нейтрального скалярного поля и показывают, что построенная алгебра канонических коммутационных соотношений (ККС) удовлетворяет требованиям локально ковариантной квантовой теории поля.

Цель данной работы – исследование локально ковариантной структуры поля $\pi^{\pm}$-мезонов на глобально-гиперболических пространствах-временах, в рамках общековариантного формализма, предложенного в [10]. Как будет показано, в данном случае комплексного скалярного поля, каковым является поле $\pi^{\pm}$-мезонов, симплектическое пространство разбивается на прямую сумму двух подпространств, соответствующих π^+- и π^--мезонам. Построенная алгебра ККС при этом также будет представлять пример локально ковариантной квантовой теории поля.

Несмотря на кажущуюся тривиальность исследование свободных полей представляет собой важную задачу, поскольку построение более сложных квантово-полевых систем, включая также и взаимодействующие поля в рамках пертурбативной теории рассеяния, фактически использует результаты, полученные для свободных полей.

1. КВАНТОВО-ПОЛЕВЫЕ ТЕОРИИ КАК КОВАРИАНТНЫЕ ФУНКТОРЫ

В этом разделе кратко опишем локально ковариантную формулировку квантовой теории поля, развитую в [10] и, следуя этой работе, определим две фундаментальные категории.

Man : объектами $Obj(\mathbf{Man})$ этой категории являются четырехмерные глобально-гиперболические пространства–времена $(M,\mathbf{g})$, которые являются ориентированными и времяориентированными. Морфизмы ψ между объектами $(M_1,\mathbf{g}_1)$, $(M_2,\mathbf{g}_2) \in$ **Man** образуют множество $\psi \in hom_{\mathbf{Man}}((M_1,\mathbf{g}_1),(M_2,\mathbf{g}_2))$ и являются изометрическими вложениями ψ: $(M_1,\mathbf{g}_1) \to (M_2,\mathbf{g}_2)$ пространства–времени $(M_1,\mathbf{g}_1)$ в пространство–время $(M_2,\mathbf{g}_2)$. Эти морфизмы удовлетворяют следующим требованиям:

(1) если γ: $[a,b] \to M_2$ – некоторая причинная кривая и $\gamma(a)$, $\gamma(b) \in \psi(M_1)$, то вся кривая целиком должна принадлежать образу $\psi(M_1)$, т.е. $\gamma(t) \in \psi(M_1)$ для всех $t \in (a,b)$;

(2) изометрические вложения сохраняют ориентацию и время–ориентацию вложенных пространств–времен.

Композиция $\psi' \circ \psi$ морфизмов

$$\psi \in hom_{\mathbf{Man}}((M_1,\mathbf{g}_1),(M_2,\mathbf{g}_2))$$

и

$$\psi' \in hom_{\mathbf{Man}}((M_2,\mathbf{g}_2),(M_3,\mathbf{g}_3))$$

определяется как композиция отображений. Свойства (1) и (2) выполняются и, следовательно,

$$\psi' \circ \psi \in hom_{\mathbf{Man}}((M_1,\mathbf{g}_1),(M_3,\mathbf{g}_3)).$$

Очевидно также, что множество морфизмов

$$hom_{\mathbf{Man}}((M,\mathbf{g}),(M,\mathbf{g}))$$

обладает единицей, которая задается тождественным отображением $\mathrm{id}_M : x \mapsto x,\ x \in M$.

Alg : объектами $Obj(\mathbf{Alg})$ этой категории являются C^*-алгебры с единицей. Морфизмами α между объектами (алгебрами) $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ являются $*$-гомоморфизмы, сохраняющие единицу. Для заданных $\alpha \in hom_{\mathbf{Alg}}(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2)$ и $\alpha' \in hom_{\mathbf{Alg}}(\mathcal{U}_2,\mathcal{U}_3)$ композиция $\alpha' \circ \alpha$ также определяется как композиция отображений. Единица в $hom_{\mathbf{Alg}}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ для любого $\mathcal{U} \in Obj(\mathbf{Alg})$ также задается тождественным отображением $id_{\mathcal{U}} : A \to A,\ A \in \mathcal{U}$.

Теперь введем следующее определение.

Определение 1. (а) **Локально ковариантная квантовая теория поля** есть ковариантный функтор $\mathcal{A}$ **Man** $\to$ **Alg**, который переводит изометрические вложения $(M,\mathbf{g}) \xrightarrow{\psi} (M',\mathbf{g}')$ глобально-гиперболических пространств–времен $(M,\mathbf{g})$ в $*$-алгебраические вложения $\mathcal{A}(M,\mathbf{g}) \xrightarrow{\alpha_\psi \equiv \mathcal{A}(\psi)} \mathcal{A}(M',\mathbf{g}')$ C^*-алгебр с сохранением единицы алгебры. Свойства ковариантности выражаются следующим образом:

$$\alpha_{\psi'} \circ \alpha_\psi = \alpha_{\psi' \circ \psi}, \alpha_{id_M} = id_{\mathcal{A}(M,\mathbf{g})}$$

(для всех морфизмов $\psi \in hom_{\mathbf{Man}}((M_1,\mathbf{g}_1),(M_2,\mathbf{g}_2))$, $\psi' \in hom_{\mathbf{Man}}((M_2,\mathbf{g}_2),(M_3,\mathbf{g}_3))$ и всех $(M,\mathbf{g}) \in Obj(\mathbf{Man})$).

(б) Пусть, для морфизмов

$$\psi_j \in hom_{\mathbf{Man}}((M_j,\mathbf{g}_j),(M,\mathbf{g})) \quad j = 1,2,$$

вложения (M_1) и (M_2) в общее пространство–время (M) такие, что множества $\psi_1(M_1)$ и $\psi_2(M_2)$ причинно разделены. Локально ковариантная квантовая теория поля описываемая ковариантным функтором $\mathcal{A}$ называется причинной, если соответствующие алгебры в $\mathcal{A}(M)$ коммутируют:

$$\psi_1(M_1) \perp \psi_2(M_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\alpha_{\psi_1}(\mathcal{A}(M_1,\mathbf{g}_1)), \alpha_{\psi_2}(\mathcal{A}(M_2,\mathbf{g}_2))] = \{0\},$$

где $\psi_1(M_1) \perp \psi_2(M_2)$ означает, что $\psi_1(M_1)$ и $\psi_2(M_2)$ причинно разделены в M.

(в) Локально ковариантная квантовая теория поля, задаваемая ковариантным функтором $\mathcal{A}$, удовлетворяет аксиоме причинности в сильной форме [1], если для произвольного

$$\psi \in hom_{\mathbf{Man}}((M,\mathbf{g}),(M',\mathbf{g}'))$$

такого, что $\psi(M)$ содержит коши-поверхность многообразия $(M',\mathbf{g}')$, выполнено равенство

$$\alpha_\psi(\mathcal{A}(M,\mathbf{g})) = \mathcal{A}(M',\mathbf{g}').$$

Таким образом, локально ковариантная квантовая теория поля, задаваемая функтором $\mathcal{A}$ сопоставляет C^*-алгебры всем глобально-гиперболическим пространствам–временам. При этом алгебры, соответствующие изометричным пространствам–временам, изоморфны, что, с физической точки зрения, означает неразличимость

[1] Аксиома причинности в сильной форме (детерминизм), требует, чтобы полевая алгебра в $(M, \mathbf{g})$ порождалась полями в трехмерном пространстве в сколь угодно малом интервале времени. В схеме канонического квантования для полей, удовлетворяющих уравнениям движения, задавая на любой коши-поверхности начальные условия, мы можем восстановить поля во всем пространстве–времени.

таких алгебр. Это является прямым следствием функториальности соответствия, поскольку изометричные пространства–времена также неразличимы.

2. СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА–ФОКА

Здесь кратко рассмотрим строение симплектического пространства, являющегося пространством решений уравнения Клейна–Гордона–Фока в канонической схеме квантования и схему построения алгебры ККС над этим пространством.

Известно, что в классическом гамильтоновом формализме обобщенные импульсы p обладают особыми геометрическими свойствами и преобразуются как ковариантные векторы (в отличие от обобщенных скоростей, которые преобразуются как контравариантные векторы), поэтому, в отличие от лагранжева формализма, где обобщенные координаты q и обобщенные скорости $\dot{q}$ системы n частиц образуют $2n$-мерное многообразие, известное как касательное расслоение, в гамильтоновом подходе наборы q и p образуют фазовое пространство, представляющее собой $2n$-мерное симплектическое многообразие, наделенное кососимметрическим скалярным произведением [11].

В контексте же канонического формализма квантования полей и в частности, в его локально ковариантной формулировке, в роли обобщенных координат выступают полевые функции $\varphi(x)$, а в роли обобщенных импульсов – ковариантные производные $\pi(x) := n^a\nabla_a\varphi(x)$, где n^a – времени подобная нормаль к коши-поверхности (гладкая пространственно подобная гиперповерхность на M называется поверхностью Коши, если $n_an^a > 0$), ∇_a – оператор ковариантного дифференцирования. Для математически корректного описания полей необходимо перейти к сглаженным операторам $\varphi(f)$ и $\pi(h)$ с бесконечно дифференцируемыми пробными функциями f, имеющими компактные носители в M. Конфигурационным пространством данной квантово-полевой системы служит пространство бесконечно дифференцируемых (C^∞) функций $\mathscr{E}(M) \equiv C^\infty(M)$ ($\varphi(x) \in C^\infty(M)$), имеющее структуру пространства Фреше (полное счетно-нормированное пространство). В качестве наблюдаемых теории выступают операторы (точнее, функционалы) на $E(M)$. Например, простейший пример представляет функционал

$$\mathscr{E}(M) \to \mathbb{C},\ \varphi(f) = \int_M d\tau\varphi(x)f(x), \tag{1}$$

соответствующий среднему значению определенного поля с некоторой пробной функцией $f \in D(M) \equiv C_0^\infty$ с компактным носителем (что указано с помощью нижнего индекса 0 в C_0^∞). Здесь $D(M)$ – пространство быстро убывающих функций, а $d\tau$ – элемент 4-объема в (M, g). Компактность носителя важна потому, что сами пробные функции при этом образуют компактное множество, что благоприятствует экспериментальной ситуации: реальные измерения производятся в конечных областях пространства–времени и за конечные промежутки времени.

Для определения ККС в терминах сглаженных операторов, на коши-поверхности $\Sigma \subset M$ введем линейное пространство решений уравнения КГФ $\mathscr{K}_\Sigma(M) = C_0^\infty(\Sigma, \mathbb{R}) \oplus C_0^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$, где $C_0^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$ – пространство пробных функций на Σ, $\mathbb{R}$ – отрезок вещественной прямой, поэтому $(f, \dot{f})$ в $\mathscr{K}_\Sigma(M)$ представляет решение φ уравнения КГФ на M, удовлетворяющее начальным данным $f = \varphi|_\Sigma$ и $\dot{f} = n^a\nabla_a\varphi|_\Sigma$, т.е. $(f, \dot{f}) \in C_0^\infty(\Sigma, \mathbb{R}) \oplus C_0^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$. Тем самым на коши-поверхности можно ввести невырожденную симплектическую структуру

$$\sigma_\Sigma(f, h) \equiv \int_\Sigma (fn^a\nabla_a h - hn^a\nabla_a f)d\Sigma, f, h \in \Sigma, \tag{2}$$

где $d\Sigma$ – элемент трехмерного объема на коши-поверхности (с метрикой на Σ, индуцированной метрикой $\mathbf{g}$ пространства–времени M).

Из глобальной гиперболичности $(M, \mathbf{g})$ следует существование опережающего E^+ и запаздывающего E^- фундаментальных решений уравнения КГФ (исчезающих соответственно вне множеств $J^-(supp(f))$ и $J^+(supp(f))$, таких, что выполняются равенства

$$(\nabla^a\nabla_a + m^2)E^\pm f = f = E^\pm(\nabla^a\nabla_a + m^2)f, f \in C_0^\infty(M, \mathbb{R}). \tag{3}$$

Здесь аббревиатура $supp$ означает носитель, т.е. наименьшее подмножество, вне которого функция исчезает, $J^\pm(x)$ – множества всех точек в M, которые могут быть соединены с x причинными кривыми, направленными в будущее (+) и в прошлое (–). Их разность $E = E^+ - E^-$, называемая пропагатором, позволяет ввести еще одно, изоморфное предыдущему, симплектическое пространство $(\mathscr{K}(M, \sigma))$. Это пространство можно получить, факторизуя $\mathscr{K}(M) := C_0^\infty(M, \mathbb{R}/kerE$ и определяя симплектическую структуру как [12]

$$\sigma(Ef, Eh) = \int_M f(Eh)d\tau. \tag{4}$$

Пространство $(\mathscr{K}(M, \sigma))$ позволяет построить алгебру ККС, генерируемую операторами Вейля $W(f)$, $f \in \mathscr{K}(M)$ и удовлетворяющую ККС в форме Вейля:

$$W(f)W(h) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(f,h)}W(f+h) = e^{-i\sigma(f,h)} \times \times W(h)W(f), W(f)^* = W(-f). \tag{5}$$

3. ЛОКАЛЬНО-КОВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ПОЛЯ $\pi^{\pm}$-МЕЗОНОВ

Как известно, заряженные поля и, в частности, $\pi^{\pm}$-мезоны, являющиеся античастицами по отношению друг к другу, описываются комплексной волновой функцией $\varphi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(f) + i\varphi_2(f))$ (соответственно сопряженная волновая функция есть $\varphi^*(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(f) - i\varphi_2(f))$), которая является неэрмитовым оператором. Здесь $\varphi_1(f)$ и $\varphi_2(f)$ – эрмитовы операторы[2]. Существенной особенностью является то, что операторы $\varphi_1(f)$ и $\varphi_2(f)$ взаимно коммутируют и волновые функции заряженных мезонов ортогональны друг другу. Полагая

$$W(f,\bar{f}) = e^{i(\varphi(f)+\varphi^*(\bar{f}))},\quad W(h,\bar{h}) = e^{i(\varphi(h)+\varphi^*(\bar{h}))}$$

и используя известную формулу $\exp(A)\exp(B) = \exp(-1/2[A,B])\exp(A+B)$, а также то, что коммутатор $[i(\varphi(f)+\varphi^*(\bar{f})), i(\varphi(h)+\varphi^*(\bar{h}))]$ равен сумме выражений $i\sigma(f,\bar{h})$ и $i\sigma(\bar{f},h)$, получим коммутационные соотношения Вейля (5) в следующем виде:

$$W(f,\bar{f})W(h,\bar{h}) = e^{-i\sigma(f,\bar{h})-i\sigma(\bar{f},h)}W(h,\bar{h})W(f,\bar{f}).$$

Построим теперь локальную C^*-алгебру $\pi^{\pm}$ мезонов на категории глобально-гиперболических пространств–времен (M,g), которая будет носить функториальный характер в смысле, указанном в определении 1. Заряженные скалярные поля удовлетворяют уравнению КГФ

$$(\nabla^{\mu}\nabla_{\mu} + m^2 + \xi R)\varphi = 0, \tag{6}$$

$$(\nabla^{\mu}\nabla_{\mu} + m^2 + \xi R)\varphi^* = 0, \tag{7}$$

где ∇ – ковариантная производная, m – масса, R – скалярная кривизна M, ξ – постоянная. Уравнения (6) и (7) для комплексной волновой функции справедливы лишь в том случае, когда массы заряженных $\pi^{\pm}$-мезонов одинаковы, поэтому в дальнейшем будем считать это условие выполненным. Ввиду этого теории для полей $\varphi_1(f)$ и $\varphi_2(f)$ будут полностью идентичными, что на математическом языке выражается в эквивалентности двух соответствующих функторов.

Итак, пространство $E(C_0^{\infty}(M,\mathbb{R}))$ образует симплектическое пространство с симплектической структурой (4). Для краткости симплектическое пространство $E(C_0^{\infty}(M,\mathbb{R}),\sigma)$ обозначим через $(\mathcal{R},\sigma) \equiv (\mathcal{R}(M,\mathbf{g}),\sigma)$ и построим C^*-алгебру $\mathcal{W}(\mathcal{R},\sigma)$, генерируемую унитарными элементами $W(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{R}$. Пусть $\psi \in hom_{\mathbf{Man}}((M,\mathbf{g}),(\mathbf{M}',\mathbf{g}'))$ и пусть, E $\mathcal{R}$, σ обозначают пропагатор, пространство образов и симплектическую форму для уравнения Клейна–Гордона–Фока (6) на $(M,\mathbf{g})$ и E', $\mathcal{R}'$, σ' – соответственно на $(M',\mathbf{g}')$. Обозначим через E^{ψ}, $\mathcal{R}'^{\psi}$, σ^{ψ} – соответствующие объекты для пространства–времени $(\psi(M),\psi_*\mathbf{g})$ (где $\psi_*\mathbf{g} = \mathbf{g}' \mid \psi(\mathbf{M})$ для $\psi: M \to \psi(M) \subset M'$).

Пусть, ψ_* – симплектоморфизм между $(\mathcal{R},\sigma)$ и $(\mathcal{R}^{\psi},\sigma^{\psi})$, и следовательно, согласно стандартной теореме [13], существует C^*-алгебраический изоморфизм

$$\tilde{\alpha}_{\psi}: \mathcal{W}(\mathcal{R},\sigma) \to \mathcal{W}(\mathcal{R}^{\psi},\sigma^{\psi}),$$

так что

$$\tilde{\alpha}_{\psi}(W(\varphi)) = W^{\psi}(\psi_*(\varphi)), \varphi \in \mathcal{R}, \tag{8}$$

где $W^{\psi}(.)$ – генераторы ККС для $\mathcal{W}(\mathcal{R}^{\psi},\sigma^{\psi})$. Поскольку $\psi: M \to \psi(M) \subset M'$ является изометрией метрики, выполнено соотношение $\psi_*\mathbf{g} = \mathbf{g}' \mid \psi(M)$, где символ $\mid$ означает сужение. Отсюда следует, что опережающие и запаздывающие фундаментальные решения уравнения КГФ на $(M,\mathbf{g})$, должны удовлетворять соотношению $E^{\psi} = \chi_{\psi(M)}E' \mid C_0^{\infty}(\psi(M),\mathbb{R})$, где $\chi_{\psi(M)}$ – характеристическая функция $\psi(M)$. Более того, $\mathcal{R}^{\psi}$ может быть идентифицирована с $E' \mid C_0^{\infty}(\psi(M),\mathbb{R})$, а σ^{ψ} – с $\sigma' \mid \mathcal{R}^{\psi}$. Обозначим через $\iota_{\psi}: \psi(M) \to M'$ каноническую инъекцию $\iota_{\psi}(x') = x'$. Тогда отображение T^{ψ}, которое сопоставляет каждому элементу Ef $(f \in C_0^{\infty}(M,\mathbb{R}))$ элемент $E'\iota_{\psi*}f$ в $(\mathcal{R}',\sigma')$, есть симплектическое отображение из $(\mathcal{R}'^{\psi}, \sigma^{\psi})$ в $(\mathcal{R}',\sigma')$, и поэтому получаем C^*-алгебраический мономорфизм $\tilde{\alpha}_{\iota_{\psi}}: \mathcal{W}(\mathcal{R}^{\psi},\sigma^{\psi}) \to \mathcal{W}(\mathcal{R}',\sigma')$ посредством

$$\tilde{\alpha}_{\iota_{\psi}}(W^{\psi}(\varphi)) = W'(T^{\psi}\varphi), \varphi \in \mathcal{R}^{\psi}, \tag{9}$$

где $W'(.)$ – генераторы ККС для $\mathcal{W}(\mathcal{R}',\sigma')$. Следовательно, полагая $\alpha_{\psi} = \tilde{\alpha}_{\iota_{\psi}} \circ \tilde{\alpha}_{\psi}$, получаем C^*-алгебраический мономорфизм $\alpha_{\psi}: \mathcal{A}(M,\mathbf{g}) \to \mathcal{A}(M',\mathbf{g}')$. Свойство ковариантности $\alpha_{\psi'\circ\psi} = \alpha_{\psi'} \circ \alpha_{\psi}$ для

$$\psi \in hom_{\mathbf{Man}}((M,\mathbf{g}),(M',\mathbf{g}'))$$

и

$$\psi' \in hom_{\mathbf{Man}}((M',\mathbf{g}'),(M'',\mathbf{g}''))$$

есть следствие соотношений (8) и (9). Как было показано в [14], причинность и сильная причинность [9] выполняются для $\mathcal{W}(\mathcal{R},\sigma)$ в следующем смысле: (1): если $f,h \in C_0^{\infty}(M,\mathbb{R})$ с $supp\, f \subset (supp h)^{\perp}$, то $W(Ef)$ и $W(Eh)$ коммутируют; (2): если N – открытая окрестность поверхности Коши Σ в M, то для каждого $f \in C_0^{\infty}(M,\mathbb{R})$ найдется $h \in C_0^{\infty}(N,\mathbb{R})$ с $W(Ef) = W(Eh)$. Полагая $\mathcal{A} = \mathcal{W}(\mathcal{R}(M,\mathbf{g}),\sigma_{(M,g)})$, все сказанное в компактной

[2] Мы здесь не учитываем изотопическую симметрию, поэтому считаем, что масса скалярного эрмитова поля φ_3 π^0-мезона отличается от массы заряженных мезонов.

форме можно изобразить в виде следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}((M,\mathbf{g}),\sigma) & \xrightarrow{\psi_*} & \mathcal{R}((M',\mathbf{g}'),\sigma') \\ \downarrow \mathcal{A} & & \downarrow \mathcal{A} \\ \mathcal{W}(\mathcal{R}(M,\mathbf{g}),\sigma_{(M,g)}) & \xrightarrow{\alpha_\psi \equiv \mathcal{A}(\psi)} & \mathcal{W}(\mathcal{R}(M',\mathbf{g}'),\sigma_{(M',g')}). \end{array}$$

Таким образом, ковариантный функтор $\mathcal{A}$, построенный из категории симплектических пространств (решений уравнения КГФ для комплексного поля), на категорию алгебр ККС (в форме Вейля) удовлетворяет требованиям локально ковариантной квантовой теории поля. Также можно показать, что существует естественное преобразование Ψ

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}(\mathcal{R}(M_1,\mathbf{g}_1),\sigma_{(M_1,g_1)}) & \xrightarrow{\Psi_{(M_1,g_1)}} & \mathcal{W}'(\mathcal{R}(M_1,\mathbf{g}_1),\sigma_{(M_1,g_1)}) \\ \downarrow \alpha_\psi & & \downarrow \alpha'_\psi \\ \mathcal{W}(\mathcal{R}(M_2,\mathbf{g}_2),\sigma_{(M_2,g_2)}) & \xrightarrow{\Psi_{(M_2,g_2)}} & \mathcal{W}'(\mathcal{R}(M_2,\mathbf{g}_2),\sigma_{(M_2,g_2)}), \end{array}$$

которое означает, что функторы $\pi^{\pm}$-мезонов, имеющих одинаковые массы, совпадают.

А.С. Ситдиков благодарен Якобусу Сандерсу за обсуждение некоторых затронутых здесь вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайтман А.* Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. М.: Наука, 1968. 250 с.
2. *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969. 424 с.
3. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984. 520 с.
4. *Индурайн Ф.* Квантовая хромодинамика. М.: Мир, 1986. 400 с.
5. *Goldberger M.L.* // Phys. Rev. 1955. V. 99. P. 986.
6. *Йост Р.* Общая теория квантованных полей. М.: Мир, 1967. 190 с.
7. *Haag R., Kastler D.* // J. Math. Phys. 1964. V. 5. P. 848.
8. *Araki H.* // Progr. Theor. Phys. 1964. V. 32. P. 844.
9. *Haag R.* Local Quantum Physics. 2nd ed. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1996. p. 560.
10. *Brunetti R., Fredenhagen K., Verch R.* //Commun. Math. Phys. 2003. V. 237. P. 31.
11. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. 5 изд. М.: УРСС, 2003. 408 с.
12. *Sanders J.A.* Aspects of locally covariant quantum field theory. PhD-thesis. University of York (U.K.), 2008.180 с.
13. *Bratteli O., Robinson D.V.* Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1987. 350 p.
14. *Dimock J.* // Commun. Math. Phys. 1980. V. 77. P. 219.