

Применение метода граничных элементов для решения плоских задач упругости

А.Ф. ГАРИФЬЯНОВ,
Р.Ш. ГИМАДИЕВ,
д-р техн. наук
(КТЭУ, Казань)
gimadiev@mail.ru

На основе метода граничных интегральных уравнений – метода граничных элементов – исследуется деформирование крюка соединения крюк – валик и треугольного клина в линейной постановке.

Упругость, плоская задача, метод граничных элементов, крюк – валик, клин

При расчете напряженно-деформированного состояния конструкций широко применяются численные методы конечных разностей и конечных элементов. В ряде задач, особенно если объекты со сложными криволинейными контурами и имеются различные вырезы, применяется метод граничных интегральных уравнений – метод граничных элементов. Благодаря данному методу, исследовавшемуся в работах [1–13], возникают дополнительные возможности в расчете сложных составных элементов авиационной техники [14–20].

Преимущество этого метода в сравнении с методами конечных разностей и конечных элементов состоит в уменьшении размерности рассматриваемой задачи. Если рассматривается плоское тело, то задача сводится, по сути, к удовлетворению граничным уравнениям на контуре, а напряжения в плоском теле определяются простым интегрированием.

Далее с помощью метода граничных интегральных уравнений исследуется напряженно-деформированное состояние криволинейного крюка для соединения крюк – валик. Для отладки алгоритма расчета рассматривается также деформирование треугольного клина.

Основы метода граничных элементов

Уравнения равновесия элемента области $\Omega(x_1, x_2)$ для плоской задачи линейной теории упругости имеют вид $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j - b_j = 0$, $i, j = 1, 2$ или

$$\sigma_{ij,j} - b_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (1)$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование, $\sigma_{ij,j}$ – производные от напряжения по направлению α_j ; b_j – компоненты напряжения за счет веса элемента пластины.

При деформации координаты точек области x_i перемещаются на величину u_i . При этом в линейной постановке малые деформации можно представить в виде тензора деформации

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2. \quad (2)$$

Для изотропного материала закон Гука записывается в виде

$$\sigma_{ii} = 2G(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj}) / (1 - \nu^2); \quad \sigma_{ij} = G\varepsilon_{ij}; \quad i \neq j, \quad (3)$$

где $G = E/[2(1 + \nu)]$ – модуль упругости при сдвиге, E – модуль упругости на растяжение, ν – коэффициент Пуассона.

Уравнение равновесия Ламе относительно перемещений имеет вид

$$Gu_{j,kk} + Gu_{k,kj} / (1 - 2\nu) + b_j = 0, \quad k = 1, 2. \quad (4)$$

Граничные условия для напряжения записываются в виде

$$P_i = 2u_{k,k}n_i G\nu / (1 - 2\nu) + (u_{i,j} + u_{j,i})n_j G, \quad (5)$$

где $P_i = \sigma_{ji}n_j$ – напряжения на границе, n_j – компоненты единичного вектора, нормального к границе тела.

Пусть граница тела $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, на части Γ_1 задаются перемещения $u_i = \bar{u}_i$, на части Γ_2 – напряжения $P_i = \sigma_{ji}n_j = \bar{P}_i$.

Если прикладываемые в точке ξ сосредоточенные нагрузки независимы, то перемещения и напряжения записываются в виде $u_j^* = u_{ij}^*(\xi, x)e_i$, $P_j^* = P_{ij}^*(\xi, x)e_i$, где $u_{ij}^*(\xi, x)$, $P_{ij}^*(\xi, x)$ – перемещения и напряжения, возникающие в точке x некоторой области Ω в j -м направлении от соответствующей единичной сосредоточенной нагрузки, действующей в направлении i -го единичного вектора и приложенной в точке ξ .

Уравнение для каждой из i компонент перемещения в точке ξ записывается в виде [11]

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_j(x) - u_j(x)) P_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_2} (P_j(x) - \bar{P}_j(x)) u_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} b_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Omega(x). \quad (6)$$

Уравнение (6) называется тождеством Соммильяны для перемещения (в области Ω). Оно взаимосвязано с сингулярным решением Навье

$$Gu_{j,kk}^* + Gu_{k,kj}^* / (1 - 2\nu) + \delta(\xi, x) e_j = 0, \quad k = 1, 2, \quad (7)$$

где $\delta(\xi, x)$ – дельта-функция Дирака, $\delta(\xi, x) = 0$ при $\xi \neq x$, $\delta(\xi, x) = \infty$ при $\xi = x$ и $\int_{\Omega^*} b(x) \delta(\xi, x) d\Omega = b(\xi)$.

Уравнение (7) дает фундаментальное решение, из которого определяются $u_{ij}^*(\xi, x)$ для выражения (6).

Выражение (6) дает непрерывное распределение перемещений в произвольной точке $\xi \in \Omega$. Для получения напряженного состояния перемещения дифференцируются по координатам в точке ξ . После подстановки результата в выражение (2), а затем результата в выражение (1) окончательно получена формула для расчета напряжения в области $\xi \in \Omega$ [11]

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k(x) - u_k(x)) P_{ijk}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_2} (P_k(x) - \bar{P}_k(x)) u_{ijk}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} b_k(x) u_{ijk}^*(\xi, x) d\Omega(x), \quad (8)$$

где тензоры u_{ijk}^* , P_{ijk}^* – перемещения и напряжения в произвольной точке r , обусловленные единичной сосредоточенной нагрузкой, приложенной в точке ξ и направленной вдоль оси k . Они определяются выражениями

$$u_{ijk}^* = ((1 - 2\nu)(r_j \delta_{ki} + r_i \delta_{kj} - r_k \delta_{ij} + 2r_i r_j r_k)) / (4\pi(1 - \nu)r);$$

$$P_{ijk}^* = \frac{G}{2\pi(1 - \nu)r^2} \left[\begin{aligned} & 2 \frac{\partial r}{\partial n} ((1 - 2\nu)r_k \delta_{ij} + \nu(\delta_{ik} r_j + \delta_{jk} r_i) - 4r_i r_j r_k) + \\ & + 2\nu(n_i r_j r_k + n_j r_i r_k) - (1 - 4\nu)n_k \delta_{ij} + \\ & + (1 - 2\nu)(2n_k r_i r_j + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \end{aligned} \right]. \quad (9)$$

Здесь: n_i, n_j – направляющие косинусы между нормалью к границе и направлениями i, j ; δ_{ij} – символы Кронекера; $r(\xi, x)$ – расстояние между точкой ξ , к которой прикладывается нагрузка, и некоторой точкой x области Ω ; r_i – производные функции по координатам точки x :

$$r = (r_i r_i)^{1/2}, \quad r_i = x_i(x) - x_i(\xi), \quad r_i = dr/x_i(x). \quad (10)$$

При переходе к границе функция $u_i(\xi)$ (6) терпит разрыв и имеет вид

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_i(\xi) + \int_{\Gamma_1} (u_j(x) - \bar{u}_j(x)) P_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \\ = \int_{\Gamma_2} (P_j(x) - \bar{P}_j(x)) u_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} b_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Omega(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Если в выражении (11) поверхностные силы $b_j(x)$ известны, то соотношение (11) определяет связь между перемещениями и напряжениями на границе тела. При заданных граничных условиях $\bar{u}_j(x)$ на Γ_1 и $\bar{P}_j(x)$ на Γ_2 это выражение представляет собой граничное интегральное уравнение. Уравнение (11) в методе граничных интегральных уравнений является исходным и используется совместно с фундаментальным решением Навье (7) для уравнения (6).

В случае плоского деформированного состояния фундаментальное решение Кельвина для перемещения на границе имеет вид

$$u_{ij}^* = -((3 - 4\nu) \ln(r) \delta_{ij} - r_i r_j) / (8\pi(1 - \nu)G). \quad (12)$$

Далее рассмотрим приложения этого метода к решению двух задач.

Расчет деформирования плоского клина

Рассмотрим задачу деформированного состояния изотропного клина в форме прямоугольного треугольника. Расчетная схема представлена на рис. 1.

На рис. 1 длина гипотенузы треугольника соответствует 1 м, по нормали к гипотенузе и катету действуют распределенные нагрузки $p = 0,2$ и прилегающий угол в 30° выбран так, чтобы суммарная внешняя нагрузка в проекции на ось Ox была равна нулю. Контур треугольника разбит на двенадцать граничных элементов. Угловые точки двоянные, по контуру пятнадцать точек. По результатам проведенных расчетов на рис. 2 приводится эпюра реакций заделки по направлению оси Oy .

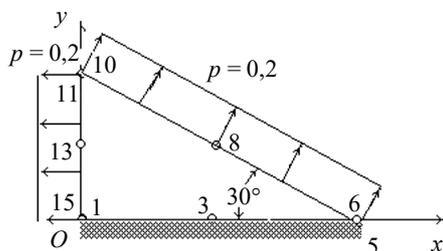


Рис. 1

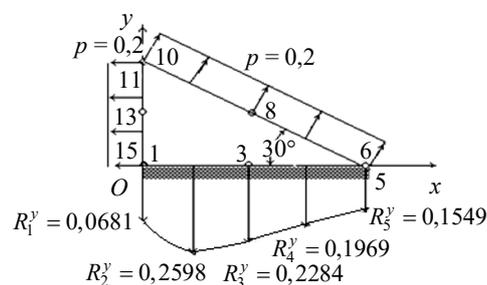


Рис. 2

Относительная погрешность интегральных значений реакций заделки и распределенной нагрузки в проекции на ось Oy составляет величину порядка 0,5 %.

Расчет деформирования крюка соединения крюк – валик

При действии внешней нагрузки R крюк работает на изгиб и срез (рис. 3). Обозначим радиус валика через r , угол наклона верхнего ребра крюка через γ . Крюк изгибается силой R , при этом изгибающий момент составит $M_{изг} = Rx$, где x – переменное расстояние между линией приложения силы R и рассматриваемым сечением с размерами прямоугольника h_x и b , где b – ширина сечения.

Рассмотрим задачу нагружения крюка соединения крюк – валик как изотропной пластины (см. рис. 3). Пусть радиус валика $r = 0,01$ м. Размеры крюка: $l_1 = 0,0226$ м; $l_2 = 0,0166$ м; $l_3 = 0,0157$ м; $l_4 = 0,0274$ м; $l_5 = 0,00667$ м; $l_6 = 0,01902$ м. Углы $\beta = 19^\circ$, $\gamma = 0^\circ$. Приведенный модуль упругости материала $E = 37400$ Н/м. Напряжение при разрыве материала $\sigma_p = 8600$ Н/м. Пусть безразмерные значения напряжений и модуль упругости $\bar{\sigma}_p = \sigma_p / [\sigma] = 2$, $\bar{E} = E / [\sigma] = 8,6977$, где $[\sigma] = 4300$ Н/м.

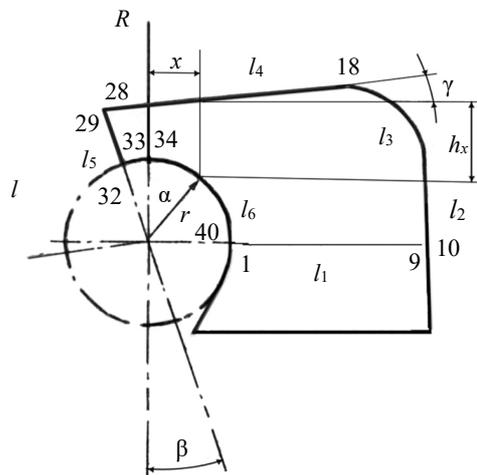


Рис. 3

Контур крюка разбит на тридцать шесть конечных граничных элементов. Общее количество точек – сорок, учитывая двойные угловые точки (см. рис. 3). Пусть валик действует на крюк с силой $R_{33} = 0,1732$, $R_{34} = 0,1732$, $R_{35} = 0,1732$ вдоль оси Oy в граничных точках 33–35. При этом крюк изгибается, и на линии $l_1 = 0,0226$ в точках 1–9 возникают реакции: $R_1^y = -0,481081$; $R_2^y = -0,264406$; $R_3^y = -0,134846$; $R_4^y = -0,052553$; $R_5^y = -0,002461$; $R_6^y = 0,030842$; $R_7^y = 0,061973$; $R_8^y = 0,084407$; $R_9^y = 0,258977$.

Сумма моментов активных сил $R_{33} = 0,1732$, $R_{34} = 0,1732$, $R_{35} = 0,1732$ относительно точки 9 (см. рис. 3) составляет $\sum M_{\text{акт}} = 0,0183068$. Сумма моментов сил реакций $R_1^y = -0,481081$; $R_2^y = -0,264406$; $R_3^y = -0,134846$; $R_4^y = -0,052553$; $R_5^y = -0,002461$; $R_6^y = 0,030842$; $R_7^y = 0,061973$; $R_8^y = 0,084407$; $R_9^y = 0,258977$ относительно точки 9 составляет $\sum M_{\text{реак}} = 0,018646$.

Таким образом, относительная погрешность моментов этих сил составляет порядка менее $\varepsilon = 1,8 \%$.

Аналитический метод расчета угла излома крюка соединения крюк – валик

При действии внешней нагрузки R крюк работает на изгиб и срез (см. рис. 3). Обозначим радиус валика через r , угол наклона верхнего ребра крюка через γ . Крюк изгибается силой R , при этом изгибный момент составит $M_{\text{изг}} = Rx$, x – переменное расстояние между осью приложения силы R и рассматриваемым сечением. Угол α и расстояние x связаны с радиусом валика r зависимостью $x = r \sin \alpha$. Изгибные напряжения определяются формулой $\sigma_{\text{изг}} = M_{\text{изг}}/W$, здесь $W = bh_x^2/6$ – момент сопротивления сечения крюка с размерами прямоугольника. Тогда для изгибных напряжений в соответствии с рис. 3 имеем

$$\sigma_{\text{изг}} = \frac{6Rr \sin \alpha}{b(A - r \cos \alpha + B \sin \alpha)^2}, \quad (13)$$

где $A = l(\cos \beta + \sin \beta \operatorname{tg} \gamma)$ и $B = r \operatorname{tg} \gamma$. Знаменатель в выражении (13) при любом значении угла α ($A - r \cos \alpha + B \sin \alpha \neq 0$), так как $l > r$.

Определим угол α , при котором в сечении крюка действует максимальное изгибное напряжение $\sigma_{\text{изг}}$. Необходимым условием экстремума функции $\sigma_{\text{изг}} = \sigma_{\text{изг}}(\alpha)$ является $d\sigma_{\text{изг}}/d\alpha = 0$. Из этого условия получается соотношение для определения угла α в виде

$$A \cos \alpha - r(1 + \sin^2 \alpha) - B \cos \alpha \sin \alpha = 0. \quad (14)$$

Можно показать, что $d\sigma_{\text{изг}}^2/d\alpha^2 < 0$, следовательно, функция (13) имеет максимум, и угол α , при котором реализуется этот максимум, определяется из уравнения (14).

Удерживая два члена разложения тригонометрических функций в ряд $\sin \alpha = \alpha - \alpha^3/6$, $\cos \alpha = 1 - \alpha^2/2$, уравнение (14) в приближенном виде запишем следующим образом:

$$A_3\alpha^3 + A_2\alpha^2 + A_1\alpha + A_0 = 0, \quad (15)$$

где $A_3 = 2B/3$; $A_2 = -(A/2 + r)$; $A_1 = -B$; $A_0 = A - r$.

Уравнение (15) решается по формулам Кардано. Используя в качестве первого приближения решение уравнения (15), можно итерационным методом с любой наперед заданной степенью точности получить решение уравнения (14).

Расчет угла излома крюка соединения крюк – валик

Углы и геометрические размеры соединения крюк – валик (см. рис. 3): $\beta = 19^\circ$, $\gamma = 0^\circ$; размеры $l = 0,02$ м, $r = 0,01$ м. Приближенное решение уравнения (15) по формулам Кардано дает значение угла максимального изгибного напряжения $\alpha = 38^\circ 30'$, которое уточняется итерационным методом. В результате получено значение этого угла $\alpha = 41^\circ$.

По результатам проведенных статических испытаний на разрыв (рис. 4) определено значение угла начала излома $\alpha = 39^\circ$, при котором изгибные напряжения достигают максимального значения. На рис. 4 фрагмент излома сопоставлен с чертежом соединения крюк – валик.

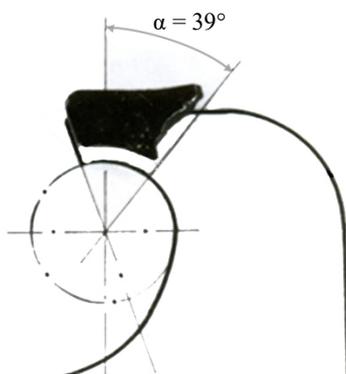


Рис. 4

Таким образом, при расчете треугольного клина методом граничных элементов относительная погрешность интегральных значений реакций заделки и распределенной нагрузки в проекции на вертикальную ось составила величину порядка 0,5 %. Расчет на изгиб крюка соединения крюк – валик методом граничных элементов показал хорошее соответствие моментов от активных и реактивных сил. Предложен приближенный аналитический метод расчета угла излома крюк – валик, выявлена хорошая сходимость результатов расчета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексидзе М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М.: Наука, 1978. 351 с.
2. Купрадзе В.Д. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости: классическая и микрополярная теория, статистика, гармонические колебания, динамика. Основы и методы решения. М.: Наука, 1976. 664 с.
3. Громадка Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. М.: Мир, 1990. 303 с.
4. Механика. Новое в зарубежной науке: в 15 т. / Под ред. А.Ю Ишлинского, Г.Г. Черного. М.: Мир, 1978. Т. 15. Метод граничных интегральных уравнений. 209 с.
5. Boundary-Integral Equation Method: Computational Applications in Applied Mechanics / Eds. T.A. Cruse, F.J. Rizzo. N.Y: ASME, 1975. 142 p.
6. Rizzo F.J, Shippy D.J. An Application of the Correspondence Principle of Linear Viscoelasticity Theory // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1971. Vol. 21. Iss. 2. P. 321–330.

7. Rizzo F.J., Shippy D.J. An Advanced Boundary Integral Equation Method for Three-Dimensional Thermoelasticity // International Journal Numerical Methods Engineering. 1977. Vol. 11. Iss. 11. P. 1753–1768.
8. Swedlow J.L., Cruse T.A. Formulation of Boundary-Integral Equations for Three-Dimensional Elasto-Plastic Flow // International Journal of Solids and Structures. 1971. Vol. 7. Iss. 12. P. 1673–1683.
9. Starfiel A.M. Boundary Element Methods in Solid Mechanics. George Allen & Unwin, 1983. 322 p.
10. Recent Advances in Boundary Element / Ed. C.A. Brebbia. London: Pentech Press, 1978. 424 p.
11. Бреббия К., Теллес Ж., Вррубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
12. Грибов А.П., Малахов В.Г. Расчет гибких пластин методом граничных элементов // Актуальные проблемы механики оболочек: Тр. междунар. конф., посвященной памяти заслуженного деятеля науки ТАССР проф. А.В. Саченкова. Казань: УНИПРЕСС, 1998. С. 52–58.
13. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
14. Гимадиев Р.Ш. Численное моделирование раскрытия мягкого двухоболочкового крыла // Вычислительные технологии: ИВТ СО РАН, Новосибирск. 1995. Т. 4. № 11. С. 51–59.
15. Шабалов А.В. и др. Моделирование трансформирования шестилучевой складчатой структуры // Изв. вузов. Авиационная техника. 2019. № 2. С. 108–117.
16. Халиулин В.И. и др. Расчет параметров гиперболического параболоида для линейчатой преформы Х-фитинга // Изв. вузов. Авиационная техника. 2019. № 3. С. 4–12.
17. Гирфанов А.М., Лебянкина О.А., Гимадиев Р.Ш. Исследование возможности моделирования запаздывания на переходных режимах полета вертолета // Изв. вузов. Авиационная техника. 2019. № 4. С. 176–178.
18. Костин В.А., Валитова Н.Л. Об улучшении сходимости вычислений упругих характеристик конструкции при использовании аппарата функции чувствительности // Изв. вузов. Авиационная техника. 2019. № 4. С. 168–171.
19. Гимадиев Р.Ш., Халиулин В.И., Левшонков Н.В. К расчету параметров изготовления несущих поверхностей наддувом // Изв. вузов. Авиационная техника. 2020. № 2. С. 3–11.
20. Паймушин В.Н. и др. Исследование точности стандарта испытаний Astm E756-05 по определению демпфирующих свойств материалов при растяжении-сжатии // Изв. вузов. Авиационная техника. 2020. № 2. С. 29–37.

Поступила в редакцию 25.04.22

После доработки 31.05.22

Принята к публикации 8.09.22

Application of the Boundary Element Method to Solving the Plane Elastic Problems

A.F. GARIF'YANOV AND R.SH. GIMADIEV

Kazan State Power Engineering University, Kazan

The deformation of the hook of the hook–roller connection and the triangular wedge is investigated in linear formulation based on the method of boundary integral equations–the boundary element method.

Elasticity, plane problem, boundary element method, hook–roller, wedge