

р q -дуальность: набор примеров

З. Закирова¹⁾, В. Лунев¹⁾, Н. Белобородов¹⁾

⁺Казанский государственный энергетический университет, 420066 Казань, Россия

^{*}Институт проблем передачи информации, 127994 Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 июня 2023 г.

После переработки 22 июня 2023 г.

Принята к публикации 22 июня 2023 г.

Мы детально рассматриваем ряд двухчастичных примеров р q -дуальности Рудженаарса и строим дуальные гамильтонианы. Специальный интерес представляет модель синус-Гордона.

DOI: 10.31857/S1234567823140112, EDN: gzqwce

1. Введение. Понятие р q -дуальности было введено С. Рудженаарсом [1] при описании многочастичных систем семейства Калоджеро–Рудженаарса. Позднее эта дуальность применялась в теории Зайберга–Виттена для построения дважды эллиптических систем, описывающих низкоэнергетический предел шестимерной суперсимметричной калибровочной теории, содержащей материю в присоединенном представлении [2, 3]. На самом деле, дважды эллиптические системы были построены только в простейшем случае систем с одной степенью свободы, а вопрос построения N -частичных систем до сих пор остается открытым.

Позднее в [4] был сформулирован более общий подход к р q -дуальности, который позволяет работать с ней как с любой интегрируемой N -частичной системой. Однако до настоящего момента имеется только очень ограниченный набор примеров дуальных систем. В этом письме мы расширим этот набор. Начав в качестве разминки с хорошо известного примера тригонометрической системы Рудженаарса, где дуальность, собственно, и была впервые обнаружена С. Рудженаарсом [1] (хотя и совершенно другим способом), мы далее изучим случай двухчастичной цепочки Тоды, как неперiodической (система Лиувилля), так и периодической (система синус-Гордона). Этот последний случай особо интересен, поскольку мы до сих пор не знаем гамильтонианы систем, дуальных эллиптическим системам Калоджеро и Рудженаарса, а периодическая система Тоды обладает скрытой эллиптичностью и получается из эллиптической системы Калоджеро в иноземцевском пределе [5]. Эта скрытая эллиптичность проявляет себя

в дуальном тодовском гамильтониане, который задается эллиптической функцией Якоби, причем эллиптический модуль зависит от координат системы. Поскольку периодическая система Тоды проще, чем эллиптическая модель Калоджеро, вероятно, в этом случае будет проще получить дуальные гамильтонианы и с числом частиц $N > 2$.

Подчеркнем, что построение N -частичных дважды эллиптических систем является совершенно нетривиальной задачей. Конечно, можно построить систему, в которой как импульсы, так и координаты будут лежать на торе, однако дважды эллиптическая система, по определению [2], самодуальна – и самодуальность является тем самым крайне нетривиальным свойством. Как пример, можно указать двухчастичную систему, предложенную Х. Браденом и Т. Холловудом [6], которая была позднее обобщена на N -частичную систему П. Коротеевым и Ш. Шакировым [7]. Эта система эллиптична как по импульсам, так и по координатам, но не самодуальна. Более того, как было показано в [8], эта система (на квантовом уровне) не отвечает правильному преобразованию дуальности даже в случае, когда одна из эллиптичностей вырождена: для получения правильного дуального гамильтониана требуется проделать некоторое дополнительное преобразование. Это не должно вызывать удивление – гамильтониан даже двухчастичной самодуальной системы [2] гораздо сложнее гамильтониана, предложенного в [6, 7].

В данной заметке мы рассматриваем только случай классической дуальности, хотя квантовая р q -дуальность даже естественнее, и, возможно, лучше начинать с квантового случая, переходя к классической р q -дуальности в квазиклассическом пределе. Тем не менее, классический случай сам по себе также представляет ценность.

¹⁾e-mail: zolya_zakirova@mail.ru;
vladisavlunev138@gmail.com; nichegoloch567@gmail.com

2. Преобразование дуальности в системах с одной степенью свободы. Мы начнем с объяснения того, что такое р q -дуальность. Дуальность, по определению, это отображение из набора гамильтонианов $H_i(p, q|g)$, где g – константа связи, в набор дуальных гамильтонианов $H_i^D(p, q|g)$ заданный следующим антиканоническим преобразованием переменных $\{p_i, q_i\} \rightarrow \{P_i, Q_i\}$:

$$\begin{cases} H_i(p_i, q_i|g) = H_i^{(0)}(Q_i) \\ \sum_i dp_i \wedge dq_i = -\sum_i dP_i \wedge dQ_i \end{cases} \quad (1)$$

и мы рассматриваем интегрируемую систему со свойством $H_i(p, q; 0) = H_i^{(0)}(p)$. Это определение означает, что гамильтонианы $H_i^{(0)}(Q_i)$ описывают свободную систему. В этом определении имеется произвол – например, можно добавить к P_i произвольные функции Q_i .

Тогда набор дуальных гамильтонианов определен как

$$H_i^D(P_i, Q_i|g) = H_i^{D,(0)}(q_i). \quad (2)$$

Не очень существенно, как выбрать $H_i^{D,(0)}$, поскольку функции гамильтонианов остаются гамильтонианами, однако их надо выбрать так, чтобы H_i^D были хорошо определенными (однозначными) функциями на симплектическом многообразии.

Если дуальные гамильтонианы могут быть выбраны совпадающими с первоначальными, система называется самодуальной. Требование антиканоничности преобразования $\{p_i, q_i\} \rightarrow \{P_i, Q_i\}$ возникает потому, что при $g = 0$ гамильтониан свободной системы $H_i^{(0)}(p_i)$ равен $H_i^{(0)}(Q_i)$, т.е. $p_i = Q_i$. Можно, конечно, определить новую координату каноническим преобразованием, переставив Q_i и P_i , но тогда система Рудженаарса перестает быть самодуальной.

В качестве простого примера рассмотрим гамильтониан (это называется рациональной моделью Калоджеро)

$$H(p, q; g) = \frac{p^2}{2} + \frac{g}{2q^2} \quad (3)$$

и

$$H_0(p) = \frac{p^2}{2}. \quad (4)$$

Введем теперь новые переменные P, Q такие, что

$$H(p, q; g) = H_0(Q). \quad (5)$$

Преобразование $(p, q) \rightarrow (P, Q)$, по определению, антиканоническое. Поэтому имеется два условия на

две новые переменные P и Q . На самом деле, антиканоническое преобразование определено неоднозначно – к P можно добавить произвольную функцию Q .

В этих новых переменных можно ввести новый свободный гамильтониан H_0^D , зависящий только от q , и определить H^D , называемый дуальным гамильтонианом:

$$H^D(P, Q; g) := H_0^D(q). \quad (6)$$

К примеру, для гамильтониана (3) и уравнения (5), антиканоническое преобразование с простейшим выбором переменной P дает

$$Q^2 = p^2 + \frac{g}{q^2}, P^2 = q^2 - \frac{g}{Q^2}.$$

Действительно, скобка Пуассона

$$\begin{aligned} \{P, Q\} &= \frac{\partial P}{\partial p} \cdot \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial P}{\partial q} = \\ &= -\frac{g^2}{(p^2q^2 + g)^2} - \frac{p^2q^2q(2g + p^2q^2)}{(p^2q^2 + g)^2} = -1, \end{aligned} \quad (8)$$

как и должно быть для антиканонического преобразования. Выберем теперь $H_0^D(q) = \frac{q^2}{2}$ и заметим, что

$$H^D(P, Q) = \frac{P^2}{2} + \frac{g}{2Q^2} = H(P, Q). \quad (9)$$

Таким образом, у нас имеется самодуальный гамильтониан, и система самодуальна.

Простейший способ иметь дело с антиканоническим преобразованием – переписать его в виде

$$dP \wedge dQ = -dp \wedge dq. \quad (10)$$

Тогда из (5)

$$\frac{\partial H_0(Q)}{\partial Q} dQ = \frac{\partial H(p, q; g)}{\partial p} dp + \frac{\partial H(p, q; g)}{\partial q} dq \quad (11)$$

и из (6)

$$\frac{\partial H_0^D(q)}{\partial q} dq = \frac{\partial H^D(P, Q; g)}{\partial P} dP + \frac{\partial H^D(P, Q; g)}{\partial Q} dQ. \quad (12)$$

Умножая левую часть (11) на правую часть (12) и наоборот и используя, что $dQ \wedge dQ = dP \wedge dP = 0$, получим

$$\frac{\partial H_0(Q)}{\partial Q} \cdot \frac{\partial H^D(P, Q; g)}{\partial P} = \frac{\partial H_0^D(q)}{\partial q} \cdot \frac{\partial H(p, q; g)}{\partial p}. \quad (13)$$

Это уравнение вместе с (5) и (6) дает три уравнения на три неизвестных переменных P, Q и $H^D(P, Q; q)$. Однако любое решение этих уравнений допускает добавление произвольной функции Q к P .

3. Тригонометрическая система Рудженаарса. В качестве менее тривиального примера рассмотрим двухчастичную гиперболическую систему Рудженаарса. С этого момента мы работаем в системе центра масс с взаимодействующими гамильтонианами, зависящими только от разностей координат. Поэтому в двухчастичном случае можно выбрать $p = p_1 = -p_2$ и $q = q_1 - q_2$, и гамильтониан системы Рудженаарса принимает вид

$$H = \frac{\sinh(q + g)}{\sinh q} e^p + \frac{\sinh(q - g)}{\sinh q} e^{-p},$$

$$H_0^D(q) = 2 \cosh q. \quad (14)$$

В этом случае $H(p, q; 0) = H_0(p) = e^p + e^{-p}$, тогда $H_0(Q) = e^Q + e^{-Q} = 2 \cosh Q$. Из (5) получается

$$2 \cosh Q = \frac{\sinh(q + g)}{\sinh q} e^p + \frac{\sinh(q - g)}{\sinh q} e^{-p}.$$

Напишем уравнение (13), учтя $H^D(P, Q; g) = 2 \cosh q$:

$$\sinh Q \cdot \frac{\partial H^D(P, Q; g)}{\partial P} = \sinh q \cdot \frac{\partial H(p, q; g)}{\partial p}. \quad (15)$$

Заметим, что

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^2 - H^2 = 4 \cdot \frac{\sinh(q + g) \sinh(q - g)}{\sinh^2 q}.$$

Тогда уравнение (15) принимает вид

$$\sinh Q \cdot \frac{\partial H^D}{\partial P} = \sqrt{H^2 \sinh^2 q - 4 \sinh(q + g) \sinh(q - g)}$$

с ветвью квадратного корня, выбранной подходящим образом.

Это уравнение после преобразований переписывается как интеграл

$$\int^{H^D} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - k^2}} = P, \quad k^2 = 4 \cdot \frac{\sinh^2 Q - \sinh^2 g}{\sinh^2 Q}.$$

Производя интегрирование, находим

$$P = \ln |H^D + \sqrt{(H^D)^2 - k^2}|, \quad (16)$$

и можно добавлять произвольную функцию Q к P . Из (16) можно получить

$$2H^D = e^P + k^2 e^{-P}$$

и, переписывая k^2 как

$$k^2 = 4 \cdot \frac{\sinh(Q + g) \sinh(Q - g)}{\sinh^2 Q}$$

и делая сдвигку $P \rightarrow P + \ln \frac{2 \sinh(Q + g)}{\sinh Q}$, окончательно получаем

$$H^D = \frac{\sinh(Q + g)}{\sinh Q} e^P + \frac{\sinh(Q - g)}{\sinh Q} e^{-P}. \quad (17)$$

Таким образом, формулы (14) и (17) воспроизводят знаменитый результат С. Рудженаарса [1], что гиперболическая система Рудженаарса самодуальна.

4. Непериодическая цепочка Тоды. Рассмотрим теперь новый пример дуальных систем – непериодическую цепочку Тоды, которая в двухчастичном случае задается гамильтонианом

$$H(p, q; g) = \frac{p^2}{2} + ge^q, \quad H_0^D(q) = e^q. \quad (18)$$

Когда $g = 0$, гамильтониан свободной системы $H(p, q; 0) = H_0(p) = \frac{p^2}{2}$, т.е. $H_0(Q) = \frac{Q^2}{2}$. Тогда из (5)

$$Q^2 = p^2 + 2ge^q. \quad (19)$$

В соответствии с формулой (6), дуальный гамильтониан $H^D(P, Q; g) = e^q$, и из (13) получается

$$Q \cdot \frac{\partial H^D(P, Q; g)}{\partial P} = pe^q$$

или

$$Q \cdot \frac{\partial H^D}{\partial P} = H^D \cdot \sqrt{Q^2 - 2gH^D}$$

опять с подходящим выбором ветви корня.

Интегрируя это уравнение с подходящим образом подобранной функцией Q , получаем

$$P = \ln \frac{Q - \sqrt{Q^2 - 2gH^D}}{Q + \sqrt{Q^2 - 2gH^D}}. \quad (20)$$

Следовательно, дуальный гамильтониан

$$H^D = \frac{Q^2}{2g \cosh^2(P/2)}. \quad (21)$$

Переменная P в терминах переменных p, q :

$$P = \ln \frac{\sqrt{p^2 + 2ge^q} - p}{\sqrt{p^2 + 2ge^q} + p}. \quad (22)$$

Используя формулы (19), (22), можно проверить, что скобка Пуассона

$$\{P, Q\} = -\frac{2ge^q}{p^2 + 2ge^q} + \frac{gpe^q}{p^2 + 2ge^q} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{p^2 + 2ge^q} + p} - \frac{1}{\sqrt{p^2 + 2ge^q} - p} \right) =$$

$$= -\frac{2ge^q + p^2}{p^2 + 2ge^q} = -1.$$

5. Периодическая цепочка Тоды. Наконец, рассмотрим наиболее интересный пример периодической цепочки Тоды. Двухчастичный гамильтониан имеет вид

$$H(p, q; g) = \frac{p^2}{2} + g^2 \cosh^2 q, \quad H_0^D(q) = \cosh q. \quad (23)$$

Следовательно, $H(p, q; 0) = H_0(p) = \frac{p^2}{2}$, откуда $H_0(Q) = \frac{Q^2}{2}$ и из (5)

$$Q^2 = p^2 + 2g^2 \cosh^2 q. \quad (24)$$

Уравнение (13) имеет вид

$$Q \cdot \frac{\partial H^D(P, Q; g)}{\partial P} = p \sinh q$$

или

$$Q \cdot \frac{\partial H^D}{\partial P} = \sqrt{Q^2 - 2g^2(H^D)^2} \cdot \sqrt{(H^D)^2 - 1}.$$

Здесь $\cosh q = H^D$, и нужно быть аккуратным с двумя ветвями корней. Отсюда получается интеграл

$$\int^{H^D} \frac{dz}{\sqrt{Q^2 - 2g^2 z^2} \cdot \sqrt{z^2 - 1}} = \frac{P}{Q}.$$

Он может быть переписан в виде

$$\int^{H^D} \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 z^2} \cdot \sqrt{1 - z^2}} = iP, \quad k^2 = \frac{2g^2}{Q^2}.$$

После замены переменных $z = \sin t$ получается интеграл

$$\int_0^{\arcsin H^D} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = iP,$$

который является эллиптическим интегралом, и мы фиксируем произвольную функцию Q , выбирая нижний предел интеграла. Теперь легко получить формулу для дуального гамильтониана H^D в виде функции Якоби $\operatorname{sn}(x|k)$, где k – эллиптический модуль [9]:

$$H^D = \operatorname{sn}\left(iP \left| \sqrt{2g}Q^{-1} \right.\right).$$

Удивительная черта этого дуального гамильтониана – появление эллиптической функции, несмотря на то, что гамильтониан Тоды (23) не содержит никакой эллиптичности. Более того, эллиптический модуль в H^D динамический, т.е. зависит от координаты. Причиной является то, что периодическая цепочка Тоды получается в иноземцевском пределе из эллиптической модели Калоджеро [5], и гамильтониан, дуальный эллиптической модели Калоджеро, также зависит от динамического эллиптического модуля [2].

Еще раз подчеркнем важность этого примера, поскольку он ухватывает основные черты эллиптической модели Калоджеро (дуальный гамильтониан является функцией Якоби с динамическим эллиптическим модулем [2]), но много проще. Это открывает возможность построения дуальных гамильтонианов, обладающих основными чертами эллиптического калоджеровского случая, с числом частиц $N > 2$.

Мы благодарны А. Миронову за ценные обсуждения.

Эта работа была поддержана Российским научным фондом (грант # 23-41-00049).

1. S. N. M. Ruijsenaars, *Comm. Math. Phys.* **115**, 127 (1988).
2. H. W. Braden, A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, *Nucl. Phys. B* **573**, 553 (2000); hep-th/9906240.
3. A. Mironov and A. Morozov, *Phys. Lett. B* **475**, 71 (2000); hep-th/9912088; hep-th/0001168.
4. A. Mironov and A. Morozov, *Phys. Lett. B* **524**, 217 (2002); hep-th/0107114.
5. V. Inozemtsev, *Comm. Math. Phys.* **121**, 629 (1989).
6. H. W. Braden and T. J. Hollowood, *JHEP* **0312**, 023 (2003); hep-th/0311024.
7. P. Koroteev and S. Shakirov, arXiv:1906.10354.
8. A. Mironov, A. Morozov, and Y. Zenkevich, *Eur. Phys. J. C* **81**, 461 (2021); arXiv:2103.02508.
9. H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher transcendental functions*, MC Graw-Hill Book Company, Inc., London (1955), v. 3.