

УДК 521.1

## ФИЗИЧЕСКАЯ ЛИБРАЦИЯ ЛУНЫ: РАСШИРЕННАЯ ПРОБЛЕМА

© 2021 г. А. А. Загидуллин<sup>1</sup>, В. С. Усанин<sup>1</sup>, Н. К. Петрова<sup>1,2</sup>, Ю. А. Нефедьев<sup>1,\*</sup>,  
А. О. Андреев<sup>1,2</sup>, Т. В. Гудкова<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

<sup>2</sup> Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия

<sup>3</sup> Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия

\*E-mail: star1955@yandex.ru

Поступила в редакцию 19.12.2019 г.

После доработки 08.07.2020 г.

Принята к публикации 15.08.2020 г.

Работа посвящена изучению физической либрации Луны. Интерес к традиционной теме, связанной с вращением Луны, вызван активностью многих стран в освоении окололунного пространства. В научном отношении главным на повестке дня является учет вязкости ядра. На данном этапе разработки теории учтены такие эффекты, как косвенные и прямые возмущения от планет, произведено включение гармоники 4-го порядка в гравитационный потенциал Луны, и сделан учет усредненного приливообразующего потенциала. Введение описанных эффектов в уравнения вращения Луны привело к существенному улучшению решения при сравнении с соответствующими данными из теории DE421, хотя остаточные разности по-прежнему остаются больше предъявляемой к теории точности в 1 мс. Влияние прямого эффекта планет составило миллисекунды, влияние 4-й гармоники проявилось в виде систематического сдвига порядка  $0.85''$  в остаточных разностях в либрации по долготе, а учет прилива позволил уменьшить остаточные разности в широте практически на порядок. При этом основным фактором, уменьшающим остаточные разности, является изменение в коэффициентах Стокса второго порядка. Расчеты проводились с использованием эфемериды DE421, построенной в Лаборатории реактивного движения NASA. Статья основана на докладе, сделанном на конференции “Астрометрия вчера, сегодня, завтра” (ГАИШ МГУ, 14–16 октября 2019 г.).

DOI: 10.31857/S0004629921010060

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В представленном исследовании рассмотрены факторы, которые позволяют повысить точность теории физической либрации Луны по сравнению с теорией, ранее построенной для модели твердотельной Луны в рамках главной проблемы физической либрации [1, 2]. Следует отметить, что исследованию динамических свойств Луны посвящено множество работ. Система Земля–Луна является одним из интереснейших объектов для изучения. Во-первых, на Луне были размещены сейсмографы, которые обеспечили независимые подтверждения наличия лунного ядра [3, 4] и существования расплавленного слоя на границе ядро/мантия. Во-вторых, имеются высокоточные гравиметрические измерения, выполненные в ходе многих космических миссий, включая Kaguya и GRAIL, на основании данных которых были построены точные карты масконов и определены высокоточные значения коэффициентов Стокса в разложении гравитационного поля Луны [5]. Уточненные значения коэффициентов Стокса подтвердили сжатие лунного ядра [6]. В-третьих,

на сегодняшний день долговременная лазерная локация Луны (ЛЛЛ) достигла высокой точности (несколько десятков миллиметров) при определении расстояния между Землей и Луной, что позволило создать высокоточные эфемериды Луны, одной из которых является эфемерида DE421 [7]. С учетом новых данных и с применением эфемериды DE421 Рамбо и Вильямс [6] построили эмпирические ряды параметров физической либрации Луны (ФЛЛ), являющиеся, по сути, самым точным на сегодня аналитическим описанием лунного вращения. Все это было бы невозможно без развития самой теории ФЛЛ, с помощью которой допустима правильная интерпретация данных лазерной локации Луны, осуществляется моделирование описанных эффектов, что в конечном итоге делается с целью улучшения точности предсказания положения Луны на орбите, положения объектов на лунной поверхности и, конечно, уточнения параметров внутреннего строения лунного тела.

Также были обнаружены диссипативные процессы, которым обязан сдвиг в узле экватора на

эклиптике на величину (по модулю)  $5.81''$ , что эквивалентно углу отклонения полюса вращения из плоскости Кассини, равному  $0.263''$ . Вильямс и др. [8], а еще ранее Йодер [9], Дике и др. [10] предложили два возможных источника диссипации: твердотельные приливы от Земли и Солнца и диссипация на границе ядра с мантией. Было показано, что эти эффекты можно рассматривать независимо друг от друга. Обработка долговременных наблюдений ЛЛЛ показала, что приливная задержка составляет около 4 ч [8].

Включение этих внутренних эффектов в модель вращения Луны требует не только сложных теоретических расчетов, но и использования высокоточных наблюдений, чувствительных к этим эффектам. Самым очевидным является установка дополнительных сейсмографов на лунную поверхность, с помощью которых можно было бы более точно идентифицировать внутреннюю структуру Луны. Другим решением является установка телескопа на поверхность Луны. Имея в наличии такой телескоп, можно будет вводить поправки в теорию ФЛЛ для уменьшения невязок между наблюдаемыми положениями звезд и теоретически рассчитанными. Данную идею планируется осуществить в миссии ILOM [11, 12].

Таким образом, для изучения тонких эффектов вращения Луны необходимо иметь инструмент, позволяющий рассчитывать и вносить соответствующие коррективы в расчет ФЛЛ для уменьшения остаточных разностей. Так, нами вначале была построена численная теория ФЛЛ, которая по внутреннему содержанию полностью соответствовала аналитической теории Петровой [2]: в уравнения была заложена модель абсолютно твердой Луны, гравитационный потенциал которой описывался гармониками второго и третьего порядка, орбитальное движение Луны задавалось аналитической теорией [13], построенной в рамках задачи Хилла, т.е. описания движения Луны в плоской задаче трех тел Солнце–Земля–Луна. Точность аналитической теории [2], определяемая сравнением с аналогичными аналитическими теориями, была не очень высокой  $\sim 0.05\text{--}0.1''$ . Полученное численное решение [1] отличалось от соответствующего аналитического лишь в либрации по долготе: остаточные разности имели амплитуду  $\sim 2''$  на резонансной частоте ( $2I - 2F$ ). Это отличие, мы полагаем, обусловлено неточностью аналитического решения при получении амплитуд резонансных и с малыми знаменателями членов.

На данном этапе исследования мы рассматриваем уже более точную модель лунного вращения. Во-первых, переходим на современную численную эфемериду, определяемую теорией DE421. Именно эта, а не более поздняя, модель была выбрана с целью иметь возможность проводить сравнение полученного решения ФЛЛ с полуэм-

пирическими рядами Рамбо и Вильямса [6], которые тоже получены на основе DE421. Такое сравнение нам было необходимо провести для того, чтобы проверить корректность проводимых нами операций по извлечению из динамической модели как параметров движения центра масс Луны, так и параметров ФЛЛ.

Во-вторых, производим уточнение числовых значений параметров, закладываемых в разрабатываемую теорию. Решение дифференциальных уравнений численным методом в рамках задачи Коши требует задания начальных условий для искомого переменных, которыми являются углы либрации и сопряженные им канонические импульсы. Неточность в начальных данных ведет к тому, что в решении появляются ложные близрезонансные гармоники. В нашем случае к неточности начальных значений наиболее чувствительна либрация по долготе, в которой описанный эффект проявляется на периодах, близких к 3 годам. Поэтому мы с особой тщательностью выбрали начальные условия для переменных либраций с эфемеридой DE421.

В-третьих, мы делаем приближенный учет деформации лунного тела вследствие твердотельных приливов, вводя средние поправки к тензору инерции Луны, полученные в [8] на основе анализа лазерных данных.

И, в-четвертых, помимо косвенного учета возмущений от планет, реализованного через переход на динамическую эфемериду, мы произвели учет прямого возмущения от планет.

После введения каждого из описанных эффектов в развиваемую нами численную теорию ФЛЛ мы получаем остаточные разности при сравнении наших результатов с данными, извлеченными из DE421, которые с высокой степенью точности совпадают с расчетами по полуэмпирическим рядам [6]. В итоге полученные разности, не превышающие  $1.2''$  для либрации по долготе и  $2''$  по широте, показывают, что мы используем правильный алгоритм работы с динамической эфемеридой, что введенные нами эффекты все больше приближают наше решение к результатам, получаемым и с помощью полуэмпирических рядов. В заключение мы обсуждаем природу оставшихся невязок и анализируем возможные неучтенные эффекты, способные уменьшить амплитуду остаточных разностей.

## 2. ПОЛУЧЕНИЕ ОРБИТЫ ЛУНЫ ИЗ DE421

Сотрудниками лаборатории реактивного движения JPL NASA были написаны две программы для первичной обработки файлов эфемерид, содержащих коэффициенты Чебышева. Первая преобразует исходные данные в бинарный фор-

мат, а вторая проводит интерполяцию Чебышева на заданный момент времени.

Функция Pleph (ET, NTARG, NCTR, R), реализующая интерполяцию, написана на языке Fortran. В ней:

ET – дата в юлианской шкале;

NTARG – индекс объекта, координаты которого хотим получить (см. табл. 1);

NCTR – индекс объекта, относительно которого хотим получить координаты небесного тела NTARG;

R – массив координат и их производных.

Система координат, заложенная в эфемериду, геоцентрическая с экватором эпохи J2000, наклоненным на  $\epsilon_0 = 84381.406''$  к эклиптике эпохи. При построении численной теории ФЛЛ мы используем направляющие косинусы радиусов векторов, направленных из центра Луны в центры Земли и Солнца. Переход от прямоугольных компонентов к направляющим косинусам радиусовектора (во вращающуюся эклиптическую систему координат) реализуется следующим способом:

1. Поворот экваториальной системы координат на угол  $\epsilon_0$

$$\begin{pmatrix} X_{\text{ecl}} \\ Y_{\text{ecl}} \\ Z_{\text{ecl}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\epsilon_0) & \sin(\epsilon_0) \\ 0 & -\sin(\epsilon_0) & \cos(\epsilon_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \\ R(3) \end{pmatrix}.$$

2. Вычисление долготы  $\lambda$  и широты  $\beta$  объекта (Земли/Солнца) с переходом во вращающуюся систему отсчета за счет вычета среднего движения  $n_{\text{sider}}$  из долготы

$$n_{\text{sider}} = F + \Omega - 180^\circ;$$

$$\lambda = \begin{cases} 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{X_{\text{ecl}}}{\sqrt{X_{\text{ecl}}^2 + Y_{\text{ecl}}^2}}\right) - n, & Y_{\text{ecl}} < 0 \\ \cos^{-1}\left(\frac{X_{\text{ecl}}}{\sqrt{X_{\text{ecl}}^2 + Y_{\text{ecl}}^2}}\right) - n, & Y_{\text{ecl}} > 0; \end{cases}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{Z_{\text{ecl}}}{\sqrt{X_{\text{ecl}}^2 + Y_{\text{ecl}}^2 + Z_{\text{ecl}}^2}}\right).$$

3. Вычисление направляющих косинусов радиусов-векторов Луна–Земля, Луна–Солнце:

$$a_{\text{ecl}} = \frac{\sqrt{X_{\text{ecl}}^2 + Y_{\text{ecl}}^2}}{\sqrt{X_{\text{ecl}}^2 + Y_{\text{ecl}}^2 + Z_{\text{ecl}}^2}} \cos(\lambda);$$

$$b_{\text{ecl}} = \frac{\sqrt{X_{\text{ecl}}^2 + Y_{\text{ecl}}^2}}{\sqrt{X_{\text{ecl}}^2 + Y_{\text{ecl}}^2 + Z_{\text{ecl}}^2}} \sin(\lambda);$$

$$c_{\text{ecl}} = \frac{Z_{\text{ecl}}}{\sqrt{X_{\text{ecl}}^2 + Y_{\text{ecl}}^2 + Z_{\text{ecl}}^2}}.$$

Таблица 1. Значения NTARG

NTARG	Тело
5	Юпитер
2	Венера
13	Барицентр Земля–Луна
10	Геоцентр Луны
3	Земля
11	Солнце
15	ФЛЛ, NCTR = 0

Таблица 2. Остаточные разности между различными орбитальными теориями  $\Delta$  в компонентах Земли относительно Луны на интервале 80 лет

$\Delta$	Радиус-вектор, м	Долгота, м	Широта, м
DE430–DE421	$\pm 0.4$	0–2	$\pm 1.5$
DE431–Horizons	$\pm 1.5 \times 10^{-6}$	$\pm 1.5 \times 10^{-6}$	$\pm 0.2 \times 10^{-6}$
DE430–DE421 [7]	$\pm 0.2$	0–1	$\pm 1$

Полученные параметры необходимы для расчета потенциальной энергии системы. Потенциальная энергия учитывает взаимодействие Луны с Землей (через гармоники 2-го, 3-го и 4-го порядков) и с Солнцем (гармоника 2-го порядка). Используемые формулы приведены в [1].

Для проверки корректности вычисления параметров орбиты мы провели сравнение полученных нами значений на основе эфемерид DE421, DE430 и DE431 со значениями, взятыми из базы web-interface HORIZONS<sup>1</sup>, с заложенной моделью DE431mx. Остаточные разности, рассчитанные нами и аналогичные разности, полученные в работе [7], приведены в табл. 2.

Поскольку разности между DE431 и Horizons составляют миллионные доли метра, применяемый нами алгоритм расчетов можно считать корректным.

### 3. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ИЗВЛЕЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИБРАЦИИ ИЗ DE421

#### 3.1. Полуэмпирические ряды наблюдений

Модель DE421 была выбрана нами еще и потому, что на ней построены полуэмпирические ряды Рамбо и Вильямса [6], которые на сегодняшний день представляют собой наиболее точное

<sup>1</sup> <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>

**Таблица 3.** Фрагмент таблицы полуэмпирических рядов [6]

Arguments	Period (days)	Fourier C (")	Fourier S (")	Poisson C ("/cent)	Poisson S ("/cent)
+1	27.555	-0.046	-101.344	—	—
+F	27.212	78.575	0.249	—	—
+1-2F	-26.878	0.072	-24.569	—	—
+Ω	-6798.526	7.582	-9.023	-0.006	0.121
+2F	13.606	-0.003	-10.080	—	—
+F+W	27.185	0.004	5.758	-0.012	-0.002
-2D+2F	173.310	-0.001	-3.002	—	—
-2D+1	-31.812	-0.001	2.469	—	—
+F-W	27.239	-0.001	2.443	0.005	-0.001
+1+F	13.691	1.408	0.001	—	—

**Таблица 4.** Параметры Делоне [16], движения лунного узла (эпохи) и общей прецессии

Par	0"/"	T1, "	T2, "	T3, "	T4, "
L	134/57/48.2264	1717915923.0024	31.3939	0.051651	-0.00024470
L'	357/31/44.7744	129596581.0733	-0.5529	0.000147	0.00000015
F	93/16/19.5517	1739527263.2179	-13.2293	-0.001021	0.00000417
D	297/51/0.6902	1602961601.0312	-6.8498	0.006595	-0.00003184
Ω	125/2/40.3265	-6967919.8851	6.3593	0.007625	-0.00003586
P <sub>a</sub>	0	5028.7946	1.1113	-0.000006	0

аналитическое представление наблюдаемой физической либрации в виде рядов:

$$f(t) = \sum_{j=1}^m a_j t^j + \sum_{i=1}^n [(C_i + \varepsilon_i^c t) \cos(\varphi_i(t)) + (S_i + \varepsilon_i^s t) \sin(\varphi_i(t))]. \quad (1)$$

Ряды (1) корректно называть полуэмпирическими [14], поскольку числовые значения их коэффициентов и частот, представленных через фундаментальные аргументы Делоне (табл. 3), получены не из решения дифференциальных уравнений ФЛЛ, а в результате сложного многопараметрического анализа остаточных разностей, полученных при сравнении численного решения DE421 для ФЛЛ с данными долговременных лазерных наблюдений. Другими словами, ряды [6] являются, своего рода, аналитической интерпретацией полученных из наблюдений параметров ФЛЛ. Они не полностью соответствуют DE421, т.к. содержат еще низкоамплитудные члены  $U_n$  ( $\leq 0.03''$ ), которых нет в DE421, но они присутствуют в наблюдениях. Баркин и др. [14] показали, что природа этих членов обусловлена наличием свободной нутацией ядра Луны (Free Core Nutation – FCN), и члены со статусом  $U_n$  соответствуют гармоникам, производным от FCN [15].

Ряды [6] используются нами для процедуры проверки алгоритма (см. ниже, раздел 3.2) по извлечению параметров либрации Луны. Для этого мы реализовали программу по расчету компонентов либрации Луны согласно формуле (1) по таблицам [6] и рассчитали те же параметры по алгоритму, приведенному в разделе 3.2. В результате у нас получилось хорошее согласие в остаточных разностях. Все необходимые для расчета по формулам (1) числовые значения используемых параметров приведены в табл. 4–6.

### 3.2. Извлечение параметров ФЛЛ из численной эфемериды DE421

Для получения углов либрации Луны из эфемериды DE421 мы использовали функцию Pleph. Для этого были заданы необходимые параметры NCTR = 0, NTARG = 15. Массив, возвращаемый функцией, содержит значения углов Эйлера, определяющих положение системы главных осей инерции Луны относительно ICRF. Для получения классических углов либрации  $\rho$ ,  $\tau$ ,  $I\sigma$  был использован следующий алгоритм преобразований [18]:

1) переход в систему ICRF с помощью Эйлеровых углов, полученных при выполнении функции Pleph;

**Таблица 5.** Параметры долгот планет эклиптики эпохи [17]

Par	T0, rad	T1, "	T2, "	T3, "	T4, "
Me	4.40260884240	26087.90314157420	-0.00000934290	0.00000003100	0
Ve	3.17614669689	10213.28554621100	0.00000287555	-0.00000003038	0
Ea	1.75347031435	6283.07584918000	-0.00000991890	0.00000000073	0
Ma	6.20348091341	3340.61243149230	0.00000454761	-0.00000005057	0
Ju	0.59954649739	529.69096509460	-0.00014837133	0.00000007482	0
Sa	0.84701675650	213.29909543800	0.00036659741	-0.00000033330	0.00000000217

2) переход в экваториальную систему координат;

3) определение вектора, направленного в узел нисходящего узла лунного экватора на эклиптике;

4) вычисление углов Эйлера в эклиптической системе координат на основе скалярных и векторных преобразований;

5) извлечение углов либрации  $\rho$ ,  $\tau$ ,  $I\sigma$  из углов Эйлера.

Выполнив все необходимые вычисления по этому алгоритму, мы извлекли из DE421 значения параметров ФЛЛ, рассчитав  $\tau^c$ ,  $\rho^c$ ,  $I\sigma^c$  на интервале 200 лет, начиная с J2000, с шагом 1 день. Полученные значения были сравнены со значениями  $\tau^e$ ,  $\rho^e$ ,  $I\sigma^e$ , рассчитанными по рядам (1) на этом же промежутке времени. Остаточные разности  $\Delta\tau = |\tau^c - \tau^e|$ ,  $\Delta\rho = |\rho^c - \rho^e|$ ,  $I\Delta\sigma = I \times |\sigma^c - \sigma^e|$ , представленные на рис. 1, были сравнены с аналогичными значениями, полученными в [8] (см. рис. 2).

Анализ полученных разностей показал, что расхождение с данными [6] не превышает 20 mas (mas – milli arc second, угловая миллисекунда) для всех трех углов, но для либрации в наклоне  $\rho$  на взятом интервале времени в наших расчетах присутствует небольшой тренд, природу которого мы пока не выяснили. Однако в пределах требуемой на данном этапе точности полученные результаты свидетельствуют и о корректности применяемого нами алгоритма работы с численной эфемеридой DE421, и о правильном выборе значений используемых параметров.

**3.3. Формирование числовых значений констант и начальных значений для ФЛЛ**

Как было сказано выше, для решения дифференциальных уравнений в рамках задачи Коши необходимо правильно задать начальные условия. Кроме того, поскольку был осуществлен переход на численную орбиту эфемериды DE, используемые параметры, константы и начальные

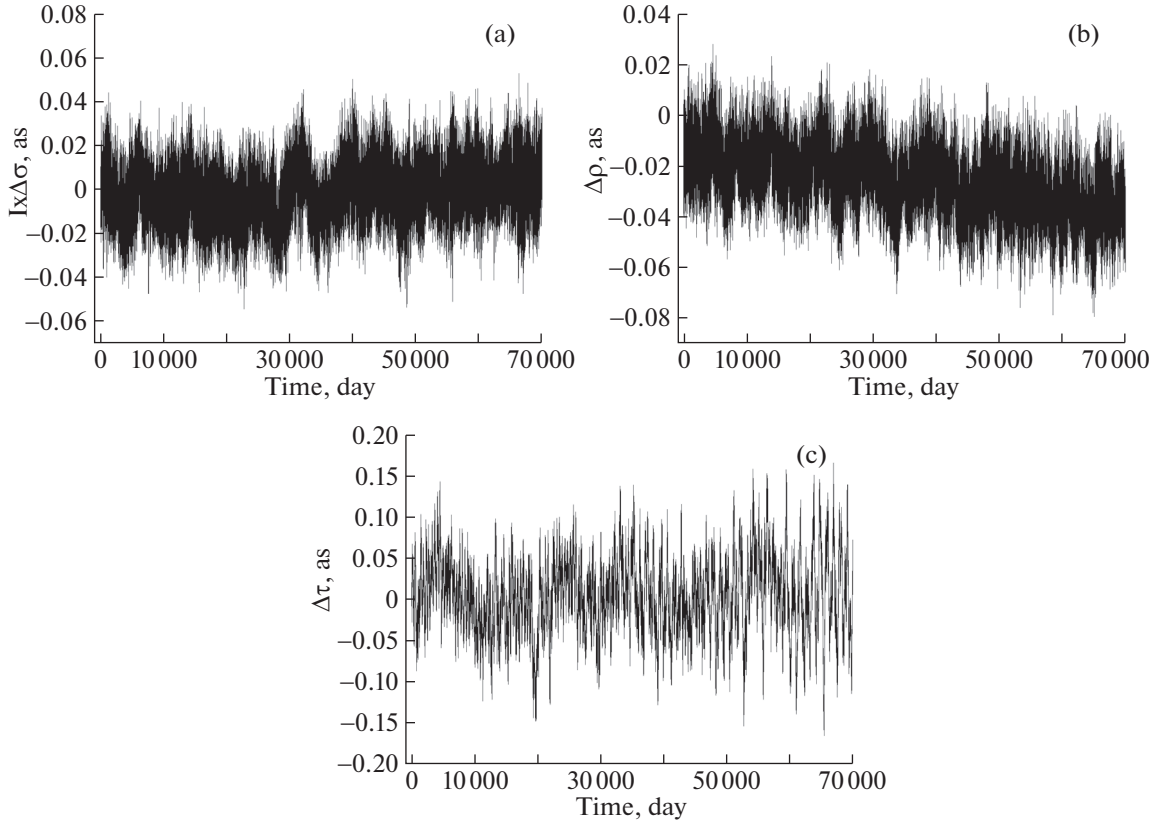
значения для углов либрации и сопряженных импульсов необходимо также привести в соответствие с параметрами DE421 (табл. 7).

Разрабатываемая нами теория физической либрации строится относительно эклиптики J2000, это надо иметь в виду, если требуется, например, переходить к эклиптике даты. В этом случае потребуются значения долготы восходящего узла  $\Omega$  от эклиптики эпохи даты от узла J2000, рассчитываемое по коэффициентам табл. 4, а также значение угла наклона экватора Земли к эклиптике  $\epsilon_0$ .

Рассмотрим алгоритм вычисления начальных условий для параметров физической либрации. Напомним, что DE421 содержит традиционные углы Эйлера и по ним можно определить параметры либрации  $\tau$ ,  $\rho$ ,  $I\sigma$ , а в разрабатываемой нами теории мы оперируем углами  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\pi$  (см. табл. 6, рис. 3), определяющими положение триэдра осей инерции Луны (динамической системы координат – ДСК), непосредственно относительно эклиптики, их еще называют самолетными углами [1]. Углы  $\nu$  и  $\pi$  по смыслу аналогичны направляющим косинусам эклиптики  $P_1$ ,  $P_2$ , а угол либрации в долготе  $\mu \sim \tau + \frac{I}{2} \sin(2F)$  [2]. Чтобы привести в согласие эти два разных способа описания ФЛЛ и получить корректные начальные значения для углов  $\mu$ ,  $\nu$  и  $\pi$ , нам необходимо запрограммировать переход от ДСК к эклиптической

**Таблица 6.** Значения полиномиальных коэффициентов  $a_j$  для параметров либрации в углах Эйлера и для направляющих косинусов эклиптики  $P_1$ ,  $P_2$  относительно системы главных осей инерции Луны

$a_j, P$	"	T1, "	T2, "	T3, "
$I\sigma$	-0.249	0.0189	-0.0036	0.000245
$\rho$	-0.014	0.0003201	-0.0001504	0.00001375
$\tau$	67.753	0.3162	-0.1034	0.007434
$P_1$	-78.513	0.00001075	-0.000006604	0.0000006663
$P_2$	0.290	0.0002411	-0.00006364	0.000004586



**Рис. 1.** Разности в углах либрации  $\tau$ ,  $\rho$ ,  $I\sigma$ , полученных при сравнении данных, извлеченных из DE421 по разработанному алгоритму, и рассчитанных по рядам [6].

ской системе через самолетные углы, а потом обратный переход от эклиптики к ДСК, но уже через углы Эйлера ( $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ).

Математически необходимый переход между эклиптической и динамической системами координат осуществляется с помощью матриц вращения, углами поворота в которых являются либо самолетные углы, либо Эйлеровы углы. Это дает нам основание связать разные виды либрационных углов через произведение матриц вращения:

$$R_x(-\pi)R_y(v)R_z(M) = R_z(\psi)R_x(-\theta)R_z(\phi). \quad (2)$$

Здесь угол  $M = L + \mu$ , где  $L$  – средняя долгота Луны, отсчитываемая от оси, направленной в точку весеннего равноденствия.

$$\begin{aligned} \sin(v) &= \sin(\psi)\sin(\theta), \\ \sin(\pi)\cos(v) &= \cos(\psi)\sin(\theta), \\ \sin(M)\cos(v) &= \cos(\psi)\sin(\phi) + \\ &+ \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\phi), \\ \cos(M)\cos(v) &= \cos(\psi)\cos(\phi) - \\ &- \sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi). \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, уравнения (3) дают нам возможность получить начальные значения самолет-

ных углов на основе Эйлеровых углов, взятых из DE421. Чтобы вычислить скорости изменения углов, мы продифференцировали по времени выражение (3) и получили необходимые соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{v}\cos(v) &= \dot{\psi}\cos(\psi)\sin(\theta) + \dot{\theta}\sin(\psi)\cos(\theta), \\ \dot{\pi}\cos(\pi)\cos(v) &= \dot{v}\sin(\pi)\sin(v) - \\ &- \dot{\psi}\sin(\psi)\sin(\theta) + \dot{\theta}\cos(\psi)\cos(\theta), \\ \dot{M}\cos(M)\cos(v) &= \dot{v}\sin(M)\sin(v) - \\ &- \dot{\psi}\sin(\psi)\sin(\phi) + \dot{\phi}\cos(\psi)\cos(\phi) + \\ &+ \dot{\psi}\cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi) - \\ &- \dot{\theta}\sin(\psi)\sin(\theta)\cos(\phi) + \\ &+ \dot{\phi}\sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\phi). \end{aligned} \quad (4)$$

В уравнениях ФЛЛ, которые построены на основе канонических уравнений Гамильтона, входят не скорости, а импульсы, сопряженные угловым координатам. Чтобы получить канонические импульсы, используем особенности подхода Гамильтона при работе с каноническими переменными. Согласно [1], проекции угловой скорости

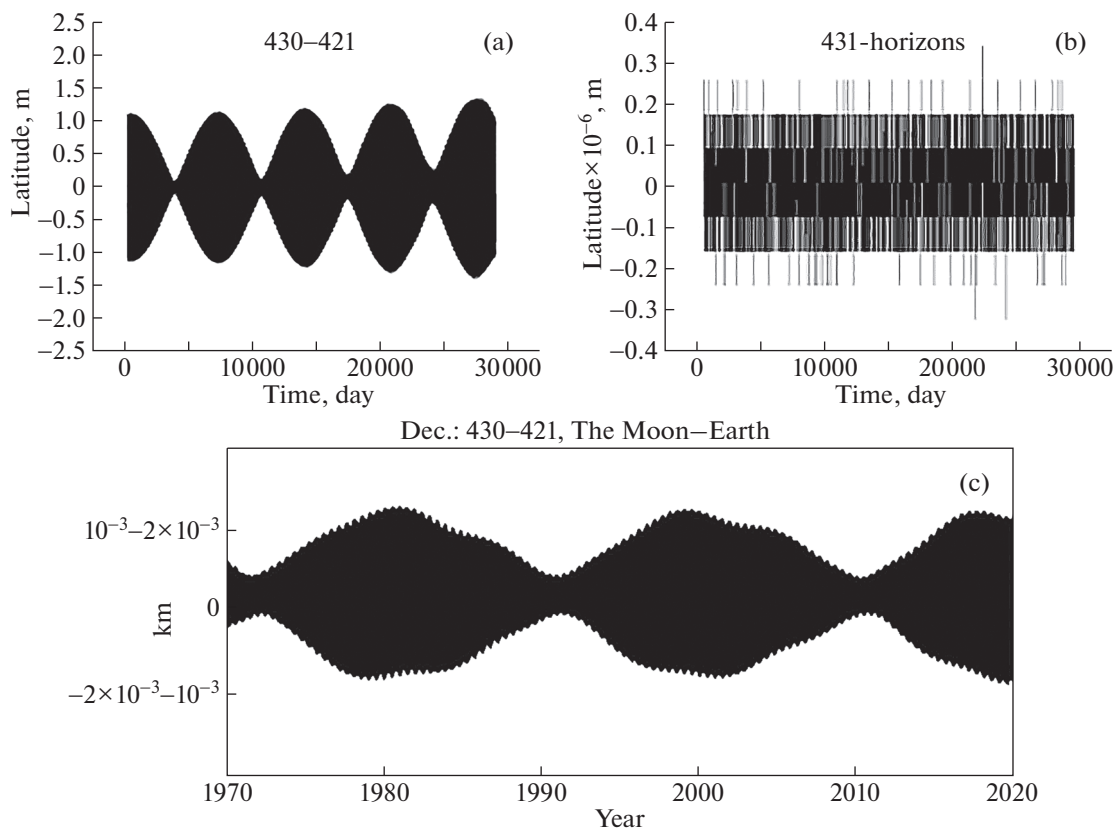


Рис. 2. Разности в широте. На нижнем графике – разность в склонении [6].

$\Omega$  вращения Луны в ДСК определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= -\dot{M} \sin(v) - \dot{\pi}, \\ \Omega_y &= -\dot{M} \cos(v) \sin(\pi) + \dot{v} \cos(\pi), \\ \Omega_z &= \dot{M} \cos(v) \cos(\pi) + \dot{v} \sin(\pi). \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив проекции угловой скорости в формулу для вычисления кинетической энергии  $T$  твердого тела и учитывая, что канонические импульсы определяются как  $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ , где  $q_1 = \mu$ ,  $q_2 = v$ ,  $q_3 = \pi$ , получаем для них следующие выражения:

$$\begin{aligned} p_3 &= A\Omega_x, \\ p_2 &= B\Omega_y \cos(\pi) + \Omega_z \sin(\pi), \\ p_1 &= \Omega_z \cos(v) \cos(\pi) - A\Omega_x \sin(v) - \\ &\quad - B\Omega_y \cos(v) \sin(\pi). \end{aligned} \quad (6)$$

При переходе к переносной системе отсчета, привязанной к ДСК, канонический импульс будет уменьшен на величину средней скорости вращения Луны  $n$  [1]:  $(p_1)_{\text{ДСК}} = p_1 - n$ . В итоге уравнения (5) и (6) позволяют вычислить необходимые начальные значения и для канонических импульсов.

Таким образом, мы получаем возможность, во-первых, на основе Эйлеровых углов, извлеченных из DE421, вычислить начальные значения параметров либрации  $\mu^0$ ,  $v^0$ ,  $\pi^0$  и сопряженных им импульсов  $p_1^0$ ,  $p_2^0$ ,  $p_3^0$ , чтобы корректно провести численное интегрирование построенных нами уравнений либрации, а во-вторых, тестировать качество получаемого нами численного решения  $\mu(t)$ ,  $v(t)$ ,  $\pi(t)$  путем сравнения с данными, рассчитываемыми по рядам [6].

#### 4. УЧЕТ ПРЯМОГО И КОСВЕННОГО ВЛИЯНИЯ ПЛАНЕТ НА ФЛЛ

Косвенные возмущения от планет возникают из-за влияния планет на движение центра масс Луны. Ранее нами была использована аналитическая теория орбитального движения [13], которая построена для ограниченной задачи трех тел – Земли, Луны и Солнца. На данном этапе мы перешли к современной численной орбите DE421, которая построена с учетом возмущений и от планет, и даже от астероидов. Мы провели ряд тестов (разделы 2, 3), подтверждающих корректность сделанного нами перехода к новой теории движения лунного центра масс. Одним из допущений,

Таблица 7. Константы, заложенные в модель численного интегрирования

Коэффициент	Значение	Коэффициент	Значение
$C_{20}(-J_2)$	$-0.2032732576370724 \times 10^{-3}$	$C_{22}$	$0.2238976709652413 \times 10^{-4}$
$C_{22}$	$0.2238976709652413 \times 10^{-4}$	$C_{30}(-J_3)$	$-0.8404701525941 \times 10^{-5}$
$C_{31}$	$0.28452435 \times 10^{-4}$	$C_{32}$	$0.484638724000903 \times 10^{-5}$
$C_{33}$	$0.1674047530039142 \times 10^{-5}$	$S_{31}$	$0.59008 \times 10^{-5}$
$S_{32}$	$0.16841984741476 \times 10^{-5}$	$S_{33}$	$-0.2485526 \times 10^{-6}$
$C_{40}(-J_4)$	$0.9642285999999999 \times 10^{-5}$	$C_{41}$	$-0.5692687 \times 10^{-5}$
$C_{42}$	$-0.15862 \times 10^{-5}$	$C_{43}$	$-0.812041 \times 10^{-7}$
$C_{44}$	$-0.1273941 \times 10^{-6}$	$S_{41}$	$0.1574393 \times 10^{-5}$
$S_{42}$	$-0.1517312 \times 10^{-5}$	$S_{43}$	$-0.8027907000000001 \times 10^{-6}$
$S_{44}$	$0.831475 \times 10^{-7}$	$\gamma$	$0.2277305314199142 \times 10^{-3}$
$\beta$	$0.6310022025364629 \times 10^{-3}$	$\bar{C} = \frac{C}{MR^2}$	0.39326772660028886
$\frac{M_{\odot}}{M_{\oplus} + M_{\text{Moon}}}$	328900.55915	$\frac{M_{\text{Moon}}}{M_{\oplus}}$	1.0/81.30056907
$GM_S$	$0.2959122082855911 \times 10^{-3}$	$GM_{Ju}$	$0.282534584085505 \times 10^{-6}$
$\frac{GM_S}{GM_E}$	$0.7243452332698441 \times 10^{-9}$	$GM_V$	$0.7243452332698441 \times 10^{-9}$
$k_2$	0.02163368386360741	$S$	0.011
$I$	0.026919957991	$\epsilon_0$	84381.406

Примечание. Значения и количество знаков в константах взяты непосредственно из файлов модели DE421.

которые мы закладываем в нашу теорию либрации, является тот факт, что мы рассматриваем вращательное и орбитальное движение Луны не-

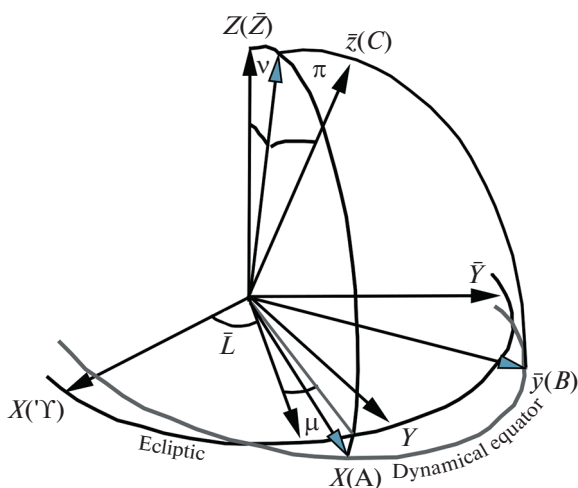


Рис. 3. Углы либрации  $\mu$ ,  $\nu$  и  $\pi$ . Селеноцентрическая эллиптическая система координат. Система  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  – эллиптическая система, равномерно вращающаяся со скоростью среднего движения Луны. Фрейм  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  – представляет ДСК.

зависимыми. Эффект спин-орбитального взаимодействия имеет очень малый вклад в точность вращательной теории [19], поэтому наше допущение оправдано, и оно позволяет нам, не меняя уравнений вращения, перевести расчеты с одной орбитальной теории на другую. Естественно, что переход к новой орбите привел и к перерасчету начальных данных уже для численного интегрирования либрационных уравнений, что в целом обеспечивает повышение точности теории либрации. Таким образом, переход на эфемериду D421 обеспечил нам автоматический учет косвенного возмущения от планет.

Для включения прямых возмущений от планет мы ввели во вторую гармонику селенопотенциала эффекты взаимодействия Луны с Венерой и Юпитером. Возмущения от других планет нами пока не рассматриваются в силу или их малых масс, или их большой удаленности.

Мы получили два решения:  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\pi$  без учета прямого воздействия от планет и  $\mu^p$ ,  $\nu^p$ ,  $\pi^p$  с учетом этого воздействия, и проанализировали полученные разности в этих решениях  $\Delta\mu^p = |\mu^p - \mu|$ ,  $\Delta\nu^p = |\nu^p - \nu|$ ,  $\Delta\pi^p = |\pi^p - \pi|$ , чтобы оценить вклад возмущений от планет в либрационные углы. По нашим расчетам оказалось, что по-



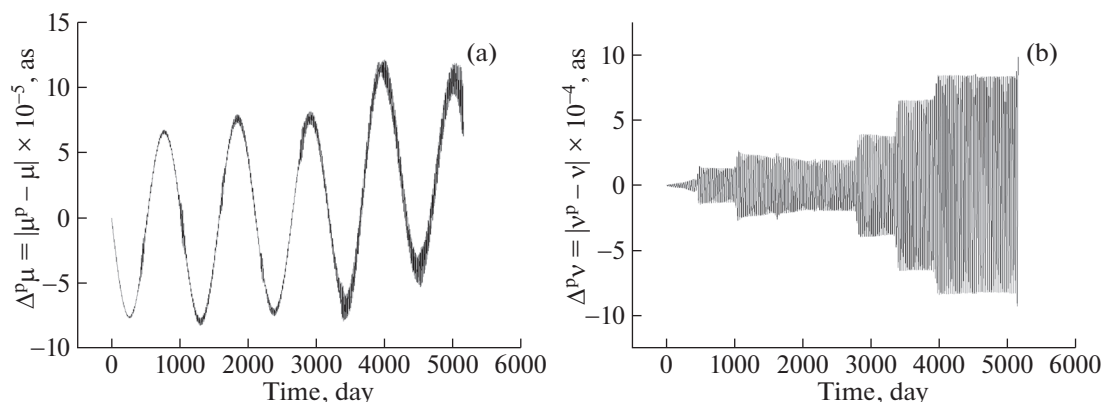


Рис. 4. Вклад возмущений от планет в либрацию по долготе и либрацию по широте.

ведение  $\Delta\nu^p$  и  $\Delta\mu^p$  практически одинаково, поэтому на рис. 4 показаны разности только для двух углов —  $\Delta\mu^p$  и  $\Delta\nu^p$ .

Анализ поведения остаточных разностей свидетельствует о том, что вклад возмущений от планет составляет лишь доли миллисекунд дуги, что намного меньше требуемой точности как теории, так и наблюдений. Полученные значения амплитуд планетных вкладов полностью согласуются с данными аналогичной работы [20], что независимо подтверждает корректность проведенных нами расчетов.

### 5. ПРИБЛИЖЕННЫЙ УЧЕТ ПРИЛИВНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ЛУННОГО ТЕЛА

Модель абсолютно твердой Луны уже совершенно не соответствует уровню точности современных наблюдений. Для адекватной обработки данных с последних спутниковых миссий и долговременных рядов лазерной локации необходимо рассматривать потенциал не твердого, а деформируемого вследствие приливного взаимодействия с Землей и Солнцем лунного тела. Вследствие твердотельных приливов тело Луны “дышит” с амплитудой примерно  $\pm 10$  см в месяц. Кроме того, влиянию приливов подвержены и гравитационное поле, и соответственно физическая либрация. В работе [21] проведен тщательный анализ высокоточных данных по спутниковому слежению в миссии GRAIL [5], основанный на построении математической модели лунного потенциала, включающего как упругие деформации, так и эффекты диссипации, обусловленные вязкими свойствами лунного тела и внутренними процессами в разогретой мантии на глубине внешнего жидкого ядра.

В нашем исследовании мы пока не готовы решать задачу в таком объеме, как это сделано учеными лаборатории реактивных исследований

НАСА (JPL NASA), имеющими многолетний опыт в развитии теории вращения Луны и построении геофизических моделей ее внутреннего строения. Но поскольку нами поставлена задача разработать свой собственный инструмент для описания лунного вращения с необходимой точностью, на данном этапе мы сделали первый шаг в этом направлении — приближенный учет приливной деформации.

Суть используемого нами метода заключается в том, что приливная деформация вызывает небольшие постоянные изменения и в моментах инерции Луны ( $A, B, C, \gamma, \beta$ ), и в коэффициентах Стокса второго порядка  $C_{20}, C_{22}$ . Значения этих усредненных постоянных получены при анализе лазерных наблюдений [8]. Основываясь на этих данных, мы разработали алгоритм учета усредненных приливных деформаций.

1. Вначале вычисляем твердотельные компоненты моментов инерции

$$\begin{aligned} A_{\text{Rigid}} &= \frac{1 - \gamma\beta}{1 + \beta}, \\ B_{\text{Rigid}} &= \frac{1 + \gamma}{1 + \beta}, \\ \frac{C}{mR_{\text{Rigid}}^2} &= \frac{-2c_{20}(1 + \beta)}{2\beta - \gamma + \beta\gamma}. \end{aligned} \tag{7}$$

2. Затем вносим эмпирически определенные в [8] поправки за усредненный прилив. Пусть  $\bar{C}_r = \frac{c}{mR^2}$  — нормированный момент инерции Луны, тогда вследствие приливной деформации моменты инерции получают некоторые поправки в виде:

$$A = A_{\text{Rigid}} + \frac{\Delta A(k_2, s)}{C_r},$$

$$\begin{aligned}
B &= B_{\text{Rigid}} + \frac{\Delta B(k_2, s)}{C_r}, \\
C &= C_{\text{Rigid}} + \frac{\Delta A(k_2, s)}{C_r}, \\
C_{20} &= C_{20\text{Rigid}} + \Delta C_{20}, \\
C_{22} &= C_{22\text{Rigid}} + \Delta C_{22},
\end{aligned} \tag{8}$$

3. Значения чисел Лява  $k_2$  и сферического члена  $s$  представлены в табл. 7.

При решении задачи ФЛЛ в рамках главной проблемы [1, 2] главные моменты инерции задавались в единицах главного момента инерции  $C_{\text{Rigid}}$ . При таком подходе можно считать, что  $C_{\text{Rigid}} = 1$ . Следуя этой принятой системе, все главные моменты инерции в (8) также задаются в единицах  $C_{\text{Rigid}}$ .

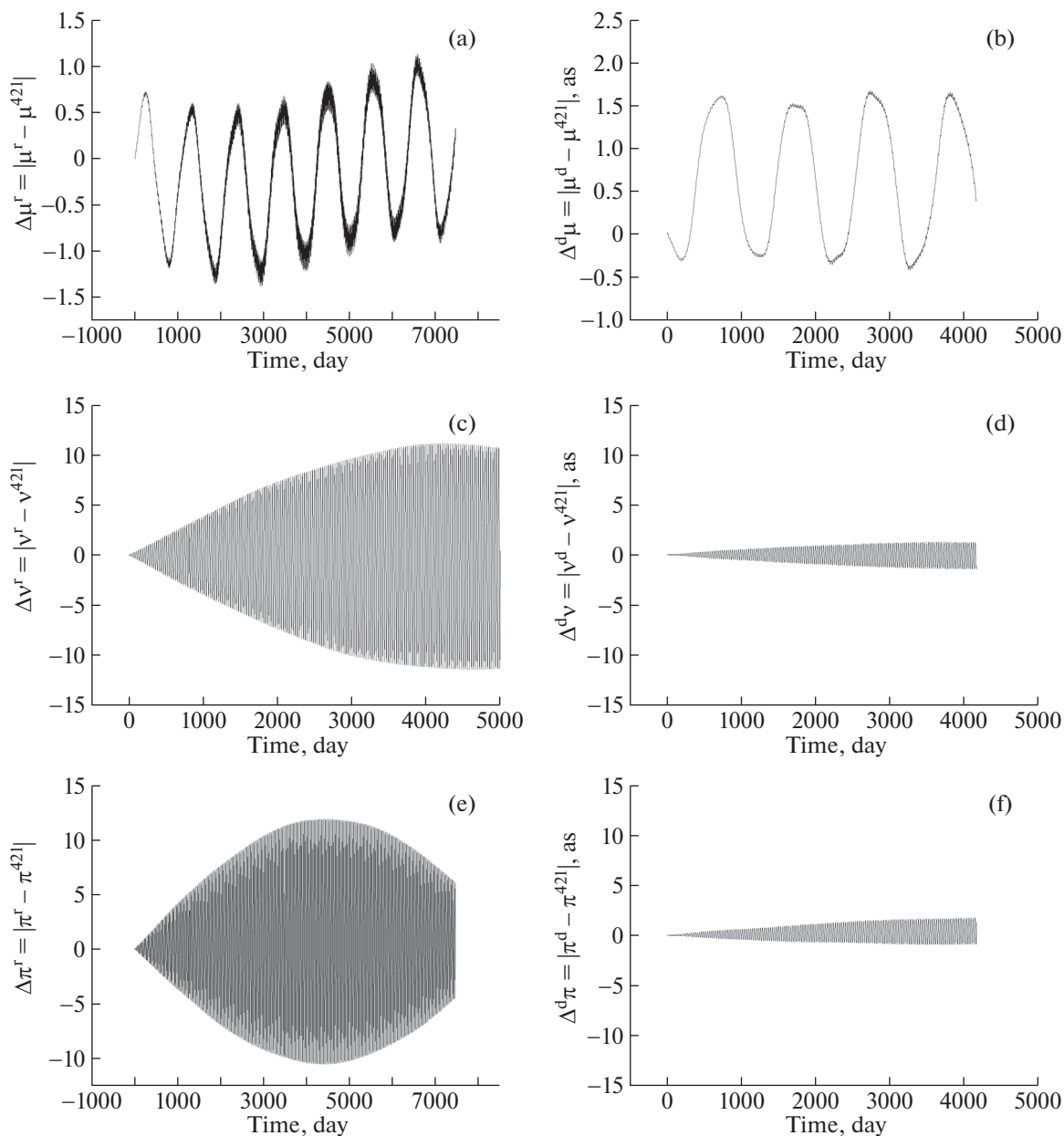
Чтобы проверить, насколько существенно скажутся на качестве нашего решения сделанные поправки за прилив, мы на интервале в 5000 дней вначале получили наше твердотельное решение  $\mu^r(t)$ ,  $\nu^r(t)$ ,  $\pi^r(t)$ , построенное уже на основе эфемериды DE421 с учетом соответствующих констант (табл. 7) и начальных значений, вычисленных по (3)–(6). Затем внесли поправки (8) в построенные ранее [1] дифференциальные уравнения ФЛЛ и получили численное решение  $\mu^d(t)$ ,  $\nu^d(t)$ ,  $\pi^d(t)$  с учетом усредненного прилива. На основе углов Эйлера, извлеченных из DE421, и редуцированных формул (3)–(6) мы получили на этом же интервале решение  $\mu^{421}(t)$ ,  $\nu^{421}(t)$ ,  $\pi^{421}(t)$ . И затем построили два типа остаточных разностей:  $\Delta\mu^r = |\mu^r - \mu^{421}|$ ,  $\Delta\nu^r = |\nu^r - \nu^{421}|$ ,  $\Delta\pi^r = |\pi^r - \pi^{421}|$  и  $\Delta\mu^d = |\mu^d - \mu^{421}|$ ,  $\Delta\nu^d = |\nu^d - \nu^{421}|$ ,  $\Delta\pi^d = |\pi^d - \pi^{421}|$ . На рис. 5 представлены графики поведения обоих типов невязок. Из анализа графиков на рис. 5 следует, что прилив значительно влияет на либрацию по широте в углах  $\nu$  и  $\pi$ , но не оказывает существенного влияния на амплитуду либрации по долготе  $\mu$ . Кроме того, в либрации по долготе присутствует фиктивная частота, период которой 1023.4 дня, что близко к резонансному периоду системы (1056.13 дня). Аналогичные гармоники проявляются и в либрации по широте: для  $\nu$  период фиктивной гармоники 27.22 дня, а для  $\pi$  – 27.16 дня, в то время как резонансные периоды в широте составляют 27.185 (для  $I\sigma$ ) и 27.239 дня (для  $\rho$ ). Появление фиктивных гармоник в решении  $\mu^r(t)$  или  $\mu^d(t)$  говорит о том, что вычисленные нами начальные значения не соответствуют заложенной в уравнения [1] модели. Этим же объясняется и нарастающее со временем увеличение остаточных разностей в обоих типах решений.

Решение DE421 получено с учетом многих факторов: вязкоупругая модель с диссипацией для приливного потенциала, учет дифференциального вращения ядра и мантии, неинерциальные силы (сила Кориолиса и центробежная сила), высшие степени разложения селенопотенциала, начиная с четвертой гармоники, и прямые возмущения от планет (Юпитера и Венеры).

## 6. ВЛИЯНИЕ 4-Й ГАРМОНИКИ СЕЛЕНОПОТЕНЦИАЛА

Аналитические оценки показывают, что вклад в возмущающий потенциал от 4-й гармоники, а тем более от 5-й и 6-й гармоник, во много раз меньше по сравнению со 2 и 3 гармониками:  $\frac{U_3}{U_2} \sim 3 \times 10^{-4}$ ,  $\frac{U_4}{U_2} \sim 3 \times 10^{-6}$ . Однако на современном уровне требований к точности теории вклад 4-й гармоники является значимым. Получив выверенное выражение для гармоники  $U_4$  через направляющие косинусы (9), см. ниже, мы включили ее в гамильтониан и сравнили полученное решение  $\mu^{(4)}$ ,  $\nu^{(4)}$ ,  $\pi^{(4)}$  с решением  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\pi$  без учета этой гармоники. Построенные остаточные разности  $\Delta\mu^{(4)} = |\mu^{(4)} - \mu|$ ,  $\Delta\nu^{(4)} = |\nu^{(4)} - \nu|$ ,  $\Delta\pi^{(4)} = |\pi^{(4)} - \pi|$  представлены на рис. 6.

$$\begin{aligned}
U(\rho, \theta, \varphi) &= \frac{GM}{\rho} \left( 1 + \left( \frac{a}{\rho} \right)^2 + \right. \\
&+ [c_{20}P_2(\cos \theta) + c_{22} \cos(2\lambda)P_{22}(\cos \theta)] + \\
&+ \left. \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{\rho} \right)^n [c_{nm} \cos(m\lambda) + \right. \\
&+ \left. s_{nm} \sin(m\lambda)] P_{nm}(\cos \theta) \right), \\
U_4 &= \frac{GM_e}{a_{em}^3} M_m a^2 \left( \frac{a_{em}}{\rho} \right)^5 \left( \frac{a}{a_{em}} \right)^2 [\Lambda], \\
[\Lambda] &= 0.375c_{40} + 7.5c_{42} - 15c_{42}u_1^2 + 105c_{44}u_1^4 - \\
&- 15s_{42}u_1u_2 + 420s_{44}u_1^3u_2 - 630c_{44}u_1^2u_2^2 - \\
&- 420s_{44}u_1u_2^3 + 105c_{44}u_2^4 - 7.5c_{41}u_1u_3 + \\
&+ 420c_{43}u_1^3u_3 - 7.5s_{41}u_2u_3 - 420s_{43}u_2^3u_3 + \\
&+ 3.75c_{40}u_3^2 - 60c_{42}u_3^2 + 105c_{42}u_1^2u_3^2 + \\
&+ 105s_{42}u_1u_2u_3^2 + 17.5c_{41}u_1u_3^3 + 17.5s_{41}u_2u_3^3 + \\
&+ 4.375c_{40}u_3^4 + 52.5c_{42}u_3^4 - 315c_{43}u_1u_3(1 - u_3^2) + \\
&+ 315s_{43}u_2u_3(1 - u_3^2),
\end{aligned} \tag{9}$$



**Рис. 5.** Остаточные разности между решением DE421 и решением для твердотельной модели (слева) и модели с учетом приливных деформаций (справа). Все решения получены в углах  $\mu$ ,  $v$ ,  $\pi$ .

где  $c_{ij}, s_{ij}$  – коэффициенты Стокса,  $a_{em}$  – среднее расстояние Земля–Луна,  $a$  – средний радиус Луны,  $\rho$  – мгновенное расстояние Земля–Луна,  $M_{e/m}$  – масса Земли/Луны соответственно,  $u_i$  – направляющие радиусы-векторы возмущающего тела относительно центра Луны.

Анализируя остаточные разности на рис. 6, мы видим, что вклад 4-й гармоники в либрацию по долготе проявляется как в виде постоянного смещения на  $0.9''$ , так и в виде периодических изменений с амплитудой порядка  $0.9''$  и периодом в

1056 дней. Наши прежние расчеты показали аналогичное проявление в либрации по долготе 3-й гармоники селенопотенциала [1], которая описывает “грушевидность” формы Луны. В результате вытянутый “носик груши” осуществляет либрационные колебания относительно направления, которое примерно на  $200''$  смещено к востоку относительно среднего направления на Землю. Но, оказывается, и 4-я гармоника также вызывает постоянный сдвиг в положении оси  $x$  относительно среднего направления на Землю,

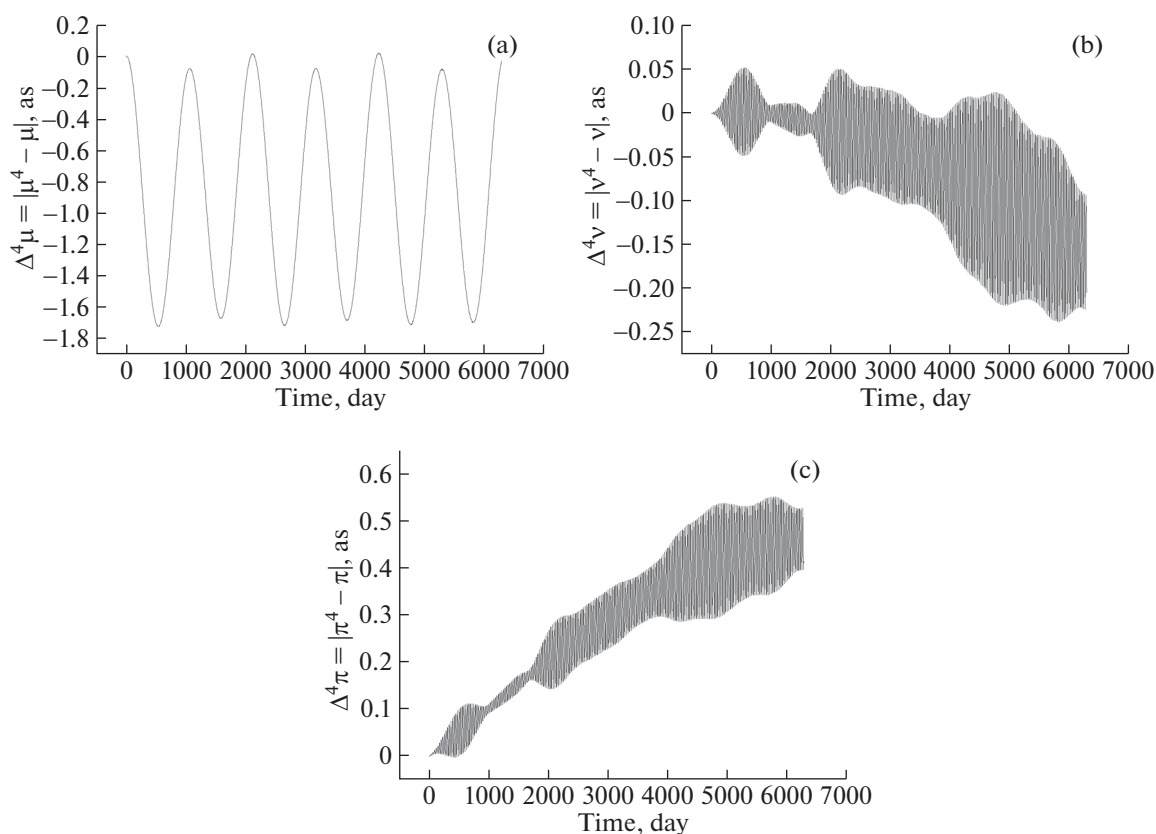


Рис. 6. Вклад 4-й гармоники в решение ФЛЛ.

однако величина этого сдвига на 2 порядка меньше вклада от 3-й гармоники.

Что касается вклада 4-й гармоники в либрации по широте, то он менее заметен по сравнению с влиянием на долготу. Включение в селенопотенциал  $U_4$  приводит к появлению долгопериодической составляющей, природу которой мы пока не можем объяснить: на интервале интегрирования в 15 лет период гармоники составляет не более четверти этого периода.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение вращения небесного тела является важнейшим инструментом и для исследования его структуры, и для построения высокоточной системы координатно-временного обеспечения при решении навигационных задач. Для Луны оба направления являются очень актуальными. К настоящему времени на основе современных спутниковых данных о гравитационном поле Луны и благодаря компьютерно-математическому анализу большого ряда долговременных лазерных наблюдений Луны в лаборатории JPL NASA разработаны высокоточные численные теории серии DE, описывающие спин-орбитальную динамику Лунного тела. Динамические эфемериды

позволяют не только адекватно описывать современные наблюдения, и уточнять многие параметры внутреннего строения Лунного тела, динамическая теория — это постоянно развиваемый инструмент, позволяющий изучать все более тонкие эффекты, определяющие лунную динамику. Поэтому перед нами была поставлена задача разработать свой собственный физико-математический и компьютерный инструментарий для описания лунного вращения численным способом.

В работе [1] мы разработали численную теорию физической либрации для модели твердотельной Луны. В настоящей статье мы показали те факторы и методы, благодаря которым нам удалось существенно повысить точность разрабатываемой теории.

В первую очередь сделан необходимый переход от менее точной аналитической теории орбитального движения к численной эфемериде DE421. Корректность разработанного нами алгоритма включения численной эфемериды (разделы 2 и 3) проверена анализом остаточных разностей при сравнении полученного нами решения с аналогичными решениями для параметров движения центра масс Луны (табл. 2).

Разрабатываемая нами теория строится в углах либрации  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\pi$ , которые описывают положение триэдра осей инерции Луны (ДСК) относительно эклиптики аналогично самолетным углам в аэродинамике (рис. 2). В численных эфемеридах DE для описания ФЛЛ используются углы Эйлера и соответствующие либрационные поправки к ним  $\tau$ ,  $\rho$ ,  $I\sigma$ . Чтобы проверить корректность извлечения этих величин из динамической теории и для адекватного сравнения результатов собственного решения  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\pi$  с данными DE421, нами были построены уравнения (3)–(6), позволяющие осуществлять переход от углов Эйлера к самолетным углам. Эти уравнения позволили также адекватно вычислить начальные условия для интегрирования либрационных уравнений и выверить числовые значения параметров, закладываемых в разрабатываемую теорию (пп. 3.2 и 3.3).

Разработанные нами программы расчета  $\tau$ ,  $\rho$ ,  $I\sigma$  на основе полуэмпирических рядов (1), построенных Рамбо и Вильямсом [6], существенно упростили процедуру сравнения собственных результатов, с фактически наблюдаемыми данными, т.к. ряды [6] – это аналитическое представление наблюдений ФЛЛ, полученных на основе анализа измерений лазерной локации (п. 3.1).

Проверив корректность алгоритмов извлечения данных из теории DE421, мы приступили к улучшению модели вращения Луны в разрабатываемой нами теории.

Во-первых, перевод наших расчетов на эфемериду DE421 позволил автоматически учесть косвенные возмущения от планет Солнечной системы, эффект влияния которых заложен в расчетах движения лунного центра масс.

Во-вторых, мы включили в уравнение второй гармоники селенопотенциала потенциал взаимодействия Луны с Венерой и Юпитером (раздел 4) и оценили вклад этого эффекта на параметры вращения Луны (рис. 4): он не превосходит нескольких миллисекунд дуги, что хорошо согласуется с аналогичными данными работы [20].

В-третьих, мы сделали приближенный учет приливной деформации лунного тела, включив в тензор инерции и коэффициенты Стокса 2-го порядка постоянные добавки, определенные в [8] на основе анализа лазерных наблюдений. Включение этого эффекта при сравнении с данными DE421 уменьшило амплитуду остаточных разностей в широте на один порядок. При этом мы показали, что основную роль в этом улучшении результатов играет включение приливных деформаций в коэффициенты Стокса, влияние добавок к моментам инерции практически не сказалось на решении.

И, наконец, в селенопотенциал включена 4-я гармоника, благодаря которой удалось избавиться в либрации по долготе от имеющейся в

предыдущей модели [1] систематической разницы при сравнении с DE421. Вместе с тем 4-я гармоника вносит небольшой, по сравнению с 3-й гармоникой, вклад в постоянный сдвиг “носика Луны” относительно среднего направления на Землю (раздел 6).

В итоге все перечисленные эффекты позволили нам построить улучшенную модель ФЛЛ по сравнению с предыдущим вариантом [1]. Наша улучшенная теория отличается от DE421 следующим образом: вариации остаточных разностей в угле либрации по долготе  $\mu$  от  $-1.1''$  до  $0.75''$ , в угле  $\nu$  от  $-2.3''$  до  $1.8''$  и в угле либрации  $\pi$  от  $-1.5''$  до  $2.7''$ .

Конечно, амплитуда остаточных разностей еще достаточно велика, чтобы говорить о достижении необходимой точности нашей теории. Поэтому мы не собираемся останавливаться на достигнутом и разрабатываем методы и математический аппарат для включения таких эффектов, как влияние фигуры Земли на селенопотенциал, более точный, а не приближенный учет приливных явлений, а также включение в структуру лунного тела жидкого ядра в простейшей модели Пуанкаре.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ

Настоящая работа поддержана Российским научным фондом, грант 20-12-00105 (согласно гранту РФ разработана метод анализа данных и проведены численные расчеты). Работа выполнена в соответствии с Программой Правительства Российской Федерации по конкурентному росту Казанского федерального университета. Работа частично поддержана стипендией Президента Российской Федерации молодым ученым и аспирантам SP-3225.2018.3, грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 19-32-50108\19 “мол\_нр” и Фондом развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. A. Zagidullin, N. K. Petrova, V. S. Usanin, Y. A. Nefed'ev, and M. V. Glushkov, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Ser. Fiziko-Matem. Nauki* **159**, 529 (2017).
2. N. Petrova, *Earth, Moon and Planets* **73**, 71 (1996).
3. R. C. Weber, P.-Y. Lin, E. J. Garnero, Q. Williams, and P. Lognonne, *Science* **331**, 309 (2011).
4. R. F. Garcia, J. Gagnepain-Beyneix, S. Chevrot, and P. Lognonné, *Phys. Earth and Planetary Interiors* **188**, 96 (2011).
5. A. S. Konopliv, R. S. Park, D.-N. Yuan, S. W. Asmar, et al., *J. Geophys. Res. Planets* **118**, 1415 (2013).
6. N. Rambaux and J. Williams, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **109**, 85 (2011).
7. J. Williams, D. Boggs, and W. Folkner, *DE430 Lunar Orbit, Physical Librations and Surface Coordinates*. JPL In-

- teroffice Memorandum (Internal Document). Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California, 19 (2013).
8. *J. G. Williams, D. H. Boggs, C. F. Yoder, J. T. Ratcliff, and J. O. Dickey*, *J. Geophys. Res. Planets* **106** (E11), 27933 (2001).
  9. *C. F. Yoder*, *Philosoph. Transactions Roy. Soc. London. Ser. A, Math. and Phys. Sci.* **303**, 327 (1981).
  10. *J. O. Dickey, P. Bender, J. Faller, X. Newhall, et al.*, *Science* **265**, 482 (1994).
  11. *H. Hanada, K. Heki, H. Araki, K. Matsumoto, et al.*, in *A Window on the Future of Geodesy* (Springer, 2005), p. 163.
  12. *N. Petrova and H. Hanada*, *Solar System Res.* **47**, 463 (2013).
  13. *M. C. Gutzwiller*, *The motion of the Moon as computed by the method of Hill, Brown, and Eckert* (US Government Printing Office, 1986).
  14. *Ю. Баркин, Х. Ханада, К. Матсумото, С. Сасаки, and М. Баркин*, *Астрон. вестн. Исслед. Солнечной системы* **48**, 436 (2014).
  15. *N. Petrova, Y. A. Nefedyev, A. Zagidullin, and A. Andreev*, *Astron. Rep.* **62**, 1021 (2018).
  16. *J. Chapront, M. Chapront-Touzé, and G. Francou*, *Astron. and Astrophys.* **387**, 700 (2002).
  17. *P. Bretagnon*, *Astron. and Astrophys.* **114**, 278 (1982).
  18. *D. B. Taylor, S. A. Bell, J. L. Hilton, and A. T. Sinclair*, *Tech. Rep.*, Naval Observatory Washington DC (2010).
  19. *Y. V. Barkin*, in *Interactions Between Physics and Dynamics of Solar System Bodies* (Springer, 1993), p. 404.
  20. *E. Bois, I. Wytrzyszczak, and A. Journet*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **53**, 185 (1992).
  21. *J. G. Williams and D. H. Boggs*, *J. Geophys. Res. Planets* **120**, 689 (2015).