УДК:573.213

О РАСЧЕТЕ ПЛОСКОГО ПОЛЯ ВО ВНЕШНОСТИ КРУГОВОГО СЕКТОРА

А.Ф. ГАРИФЬЯНОВ, Р.Ш. ГИМАДИЕВ

Казанский государственный энергетический университет

Аннотация. Рассмотрена задача о расчете электростатического поля по значениям комплексного потенциала в окрестности четверти круга. Построены линии тока векторного поля.

Ключевые слова: электростатическое поле, электростатический заряд, комплексный потенциал, линии тока, векторное поле.

В пространстве, окружающем электрический заряд (или заряды), существует электрическое поле, проявляющее себя тем, что на внесенный в любую точку упомянутого пространства единичный заряд действует сила $a = a_x + ia_y$ называемая вектором напряженности поля. Известно, что электростатическое поле всегда потенциально, т.е. в любой его точке $rot a = 0$, т.е. отсюда $\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = 0$. Иначе говоря, для такого поля всегда существует однозначная функция $\varphi(x, y)$ – потенциал поля ([1], с. 70 – 73, или [2]).

Пусть D – круговой сектор, ограниченный отрезками l_1 и l_3 прямых $Re z = \pm Im z$ соответственно и дугой l_2 окружности $|z| = 1$, $|arg z| \le \frac{\pi}{4}$. Функции $\delta_1(z) = iz$, $\delta_2(z) = z^{-1}$, $\delta_3(z) = \delta_1^{-1}$ индуцируют гомеоморфизм $\alpha(t): \partial D \to \partial D$, где $\alpha(t) = \{\delta_i(t),\ t \in l_i\}$, изменяющий ориентацию границы ∂D, причем $\alpha[\alpha(t)] = t$.

Будем считать, что во внешности $\overline{D}$ задано векторное поле $\vec{V}(z) = V_1(x, y) + iV_2(x, y)$, которое обладает комплексным потенциалом $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, причем $f(\infty) = 0$. Известно, что в окрестности профиля выполнено соотношение

$$f(iz) + f(-iz) - f(z^{-1}) - f(-z^{-1}) = g(z),\ z \in D, \qquad (1)$$

причем в угловых точках у $f(z)$ допускаются не более чем логарифмические особенности. Здесь $g(z)$ – заданная функция, аналитическая в D, граничное значение которой $g^{+}(t) \in C(\partial D)$. Подчеркнем, что при $z \in D$ точки $\pm iz$, $\pm z^{-1}$ лежат во внешности D, там где и определено поле. Вообще говоря, нельзя считать, что соотношение (1) имеет место при любом $z \notin \overline{D}$, поскольку дополнение множеств $\bigcup_{k=1}^{4} \delta_k(D)$ до полной плоскости несвязно.

Будем искать основные характеристики этого векторного поля. Введем кусочную постоянную $\theta_t = \{1,\ t \in l_1 \cup l_3;\ -1,\ t \in l_2\}$.

Теорема. Решение задачи (1) является интегралом типа Коши:

Проблемы энергетики, 2014, № 7-8

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{(g^{+}(t)-\theta_t g^{+}[\alpha(t)])dt}{t-z},\ z\notin\overline{D}. \tag{2}$$

Доказательство. В силу теоремы Коши $f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\theta_t g^{+}[\alpha(t)]dt}{t-z},\ z\notin\overline{D}$.

Подставив это выражение в (1), имеем

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\theta_t g^{+}[\alpha(t)]E(z,t)dt=g(z),\ \ z\in D, \tag{3}$$

где ядро $E(z,t)=(t-iz)^{-1}+(t+iz)^{-1}-(t-z^{-1})^{-1}-(t+z^{-1})^{-1}$.

Запишем соотношение (3) в виде $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\theta_t\alpha'(t)g^{+}(t)E(z,\alpha(t))dt=g(z),\ z\in D$.

Но $\theta_t\alpha'(t)E(z,\alpha(t))=(t-z)^{-1}+(t+z)^{-1}-(t+iz^{-1})^{-1}-(t-iz)^{-1}$ вне зависимости от того, на какой стороне l_j лежит t (проверяется непосредственным перебором трех различных случаев). Остается сосчитать вычет в точке $z\in D$, чтобы убедиться в справедливости теоремы.

Итак, по соотношению (1), связывающему значения комплексного потенциала вблизи профиля, удалось найти его всюду вне $\overline{D}$. Здесь функция $g(z)$ характеризует плотность заряда. Тогда $\vec{V}(z)=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi(x,y)$, где $\varphi(x,y)=Re\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\theta_t g^{+}[\alpha(t)](t-z)^{-1}dt\right)=-Im\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\theta_t g^{+}[\alpha(t)](t-z)^{-1}dt\right)$ и $\vec{V}(z)=\overline{f'(z)}$.

Рассмотрим более подробно частный случай, когда $g(z)\equiv 1$. В этом случае функция $f(z)$ аналитична вне l_2, т. е. аналитически продолжима через множество $l_1\cup l_3$ в D, и $f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{l_2}\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{\pi i}\ln\left(\frac{z-\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)}{z-\exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right)}\right)$, где подразумевается ветвь логарифма, аналитическая в плоскости с разрезом по l_2 и исчезающая на бесконечности. Другими словами, вещественный потенциал здесь $\varphi(x,y)=\frac{1}{\pi}\arg\left(\frac{z-\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)}{z-\exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right)}\right)$, а линии тока заданы уравнениями $\ln\left|\frac{z-\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)}{z-\exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right)}\right|=c$, т.е. это окружности

$$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{c+1}{c-1}\right)\right)^2=\frac{2c}{(c-1)^2}.$$

Построим некоторые из них при $C>1$(рис.1) и $0<C<1$(рис. 2). В таблице указаны координаты центров окружности (x_c, y_c) и их радиусы R.

$C>1$	x_c	y_c	R	$0<C<1$	x_c	y_c	R
2	0,71	-2.12	2	0,1	0,71	0,5	0,87
3	0,71	-1.41	1.23	0,2	0,71	0,79	1,07
4	0,71	-1.18	0.94	0,3	0,71	1,11	1,32
5	0,71	-1.06	0.79	0,4	0,71	1,49	1,65
6	0,71	-0.99	0.69	0,5	0,71	2	2,13
7	0,71	-0.94	0.62	0,6	0,71	2,74	2,84
8	0,71	-0.91	0.57	0,7	0,71	3,94	4,03
9	0,71	-0.88	0.53	0,8	0,71	6,33	6,39
10	0,71	-0.86	0.5	0,9	0,71	13,49	13,49

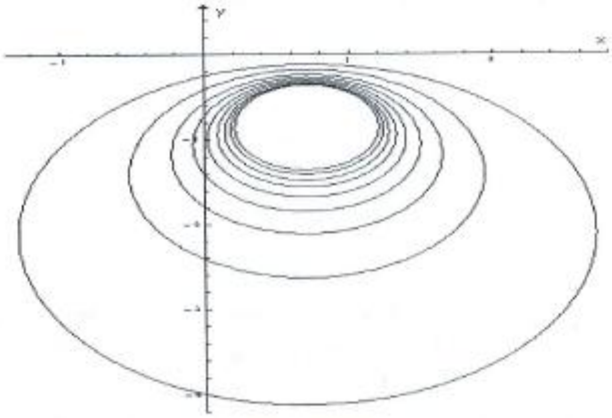

Рис 1. Линии уровня при $C>1$

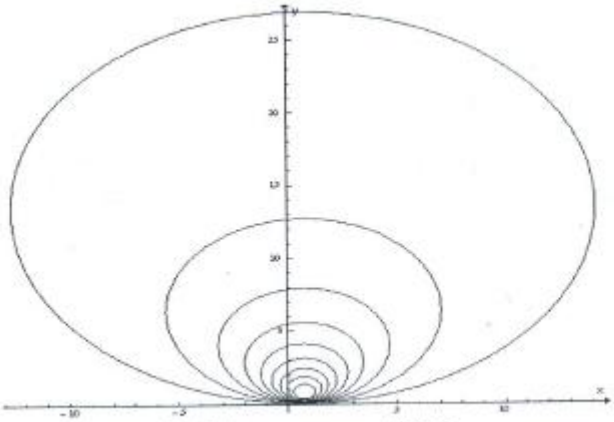

Рис 2. Линии уровня при $0<C>1$

Вывод

Итак, удалось построить линии тока векторного поля, зная лишь соотношение, связывающее значения комплексного потенциала вблизи профиля.

Литература

1. Кальницкий П.А., Добротин Д.А., Жевержеев В.Ф. Специальный курс высшей математики для ВТУЗов. Москва: «Высшая математика», 1976.
2. Аксентьев Л.А. Комплексный потенциал плоского поля. Казань: Издательство КГУ, 1989.

Поступила в редакцию *21 марта 2014 г.*

Гарифьянов Аршат Фархатович – аспирант кафедры «Высшая математика» (ВМ) Казанского государственного энергетического университета (КГЭУ). Тел: 8(917)2568426, 8(843)211-28-62.

Гимадиев Равиль Шамсутдинович – д-р техн. наук, профессор кафедры «Высшая математика» (ВМ) Казанского государственного энергетического университета (КГЭУ). Тел. 8(917)8598975, 8(843)562-24-02.