

УДК 539.3

ТОРМОЖЕНИЕ ТЕЛА МЯГКОЙ НАДУВНОЙ ОБОЛОЧКОЙ ПРИ УДАРЕ О ПОВЕРХНОСТЬ

© 2017 г. Р. Ш. ГИМАДИЕВ

*Казанский государственный энергетический университет, Казань;
e-mail: gimadiev@mail.ru*

Приводятся результаты математического моделирования гашения скорости твердого тела с помощью мягкой каркасированной тканевой оболочки, наполненной воздухом, при ударе о твердую поверхность. Уравнения движения падающего тела, динамики нагружения безмоментных оболочек и колец усиления тканевой оболочки рассматриваются совместно. Математическая модель и численный алгоритм решения пространственной задачи динамики раздува оболочки с кольцами усиления реализуется на основе метода конечных разностей по явной схеме. Вводятся граничные условия, учитывающие соприкосновение элементов оболочки при обжатию в районе кольцевых поясов. Обсуждаются результаты численных экспериментов взаимодействия падающего тела с деформируемой каркасированной оболочкой. Выявлены параметры, влияющие на процесс торможения тела при ударе о поверхность.

Ключевые слова: Торможение тела, мягкая каркасированная оболочка, пространственная динамика, результаты численного эксперимента.

Введение. Для некоторых объектов авиационной техники для гашения энергии при приземлении используются надувные тканевые оболочки. В связи с этим является актуальным математическое моделирование этого процесса.

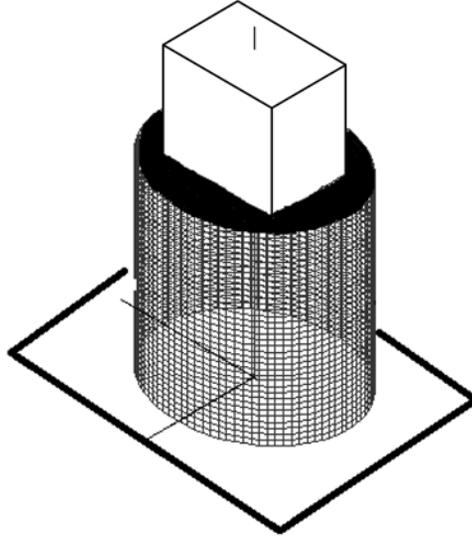
В данном исследовании рассматриваются оболочки, относящиеся к классу оболочек, имеющих большие перемещения, деформации и усиленные каркасом. Расчету оболочечных конструкций, испытывающих при нагружении сверхбольшие деформации со степенями удлинения до $\lambda = 4$, посвящены работы [1–3, 17, 18]. Каркасированные тканевые оболочки, которые в процессе эксплуатации испытывают большие степени удлинения, до $\lambda = 1.3$, широко применяются в парашютной технике [4].

Методы расчета взаимодействия каркасированных оболочек парашютного типа со средой развиты в работах [5–12].

Тканевые оболочки применяются в судостроении с целью ограничения движения и подпорки грузов надувными элементами [13]. Также каркасированные оболочки применяются в области строительства надувных конструкций, расчет таких оболочек рассмотрен в работе [14].

Теоретическому исследованию конечных деформаций в оболочках посвящены работы [15–19], которые базируются на геометрической гипотезе Кирхгофа: нормаль к срединной поверхности до деформации остается нормальной к ней и после деформации.

Наиболее близкие задачи к этой теме: в работе [8, с. 135–140] рассматривается обратная задача – подъем груза с помощью надувной мягкой оболочки, а в [11] удар мягкой сферической резиноподобной оболочки с газом по абсолютно твердой поверхности.



Фиг. 1

1. Постановка задачи. Моделируется вертикальный удар твердого тела, снабженно-го снизу надувной тканевой каркасированной оболочкой, о горизонтальную твердую поверхность.

Пусть в момент соприкосновения нижней части оболочки с горизонтальной поверхностью, скорость падающего тела равна V_{gr} направлена вертикально вниз, фиг. 1. Энергия падающего груза гасится за счет деформации тканевой оболочки, противодействия внутри оболочки движению груза. При обжатии оболочки необходимо учитывать условия контакта между соприкасающимися элементами.

Таким образом, на динамику оболочки влияют условия соприкосновения с падающим грузом, условия контакта с поверхностью, конструкция оболочки, в том числе условия сопряжения оболочки и лент кольцевого усиления, условия обжатия и контакта самой оболочки в процессе торможения. Будем считать, что вес груза равномерно распределен на площади верхней части цилиндрической оболочки и во времени эта площадь остается неизменной. Также неизменной остается площадь нижней части оболочки, примыкающей к поверхности, в процессе обжатия оболочки за счет падающего груза.

2. Метод и построение решения. Недеформированная оболочка Ω_0 в момент времени $t = t_0$ под действием внешних и внутренних сил $t > t_0$ деформируется Ω и перемещается в пространстве x_γ , $\gamma = 1, 2, 3$. Оболочка Ω_0 отнесена к системе криволинейных координат α^1, α^2, z , которая нормально связана со срединной поверхностью σ_0 .

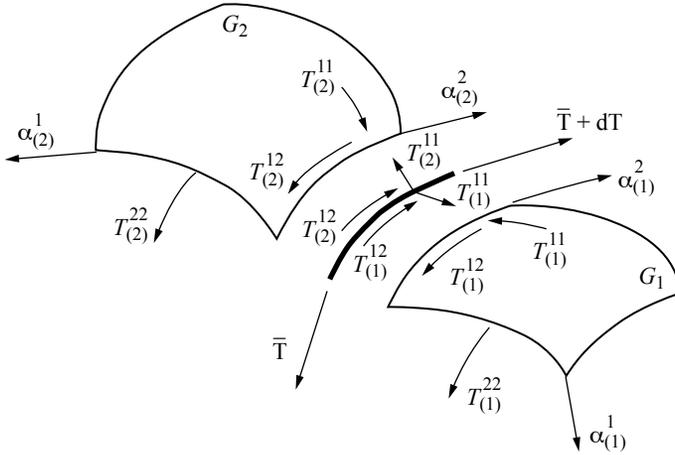
В результате деформации произвольная точка M_0 в момент времени t переходит в точку $M(\alpha^1, z) \in \Omega$.

Деформированная безмоментная оболочка, в сечениях $\alpha^i = \text{const}$ и $z = \text{const}$ в момент времени t имеет толщину $h_* = h(1 + \epsilon_3) = h\lambda_3$, где ϵ_3 – истинная деформация и λ_3 – кратность удлинений в поперечном направлении z .

Вектора истинных напряжений σ^i и σ^3 определяются выражениями

$$\sigma^i = \sigma^{ij} \mathbf{e}_j, \quad \sigma^3 = \sigma^{33} \mathbf{e}_3 \quad (2.1)$$

в которых величины σ^{ij} и σ^{33} являются физическими компонентами напряжений, а \mathbf{e}_j , \mathbf{e}_3 – единичные векторы на деформированной поверхности.



Фиг. 2

В теории мягких оболочек вместо напряжений вводятся натяжения, так как понятие толщины, особенно для тканевых оболочек, весьма условное. Интегрируя выражения (2.1) по толщине оболочки h_* , можно получить

$$\mathbf{T}^i = T^{ij} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{T}^3 = T^{33} \mathbf{e}_3$$

где $T^{ij} = h\lambda_3 \sigma^{ij}$ и $T^{33} = h\lambda_3 \sigma^{33}$ – физические компоненты натяжений. Пусть на выделенный малый элемент поверхности площади $d\sigma = \sqrt{G} \partial\alpha^1 \partial\alpha^2$, действуют поверхностные силы p^- и p^+ , приложенные по сторонам поверхностей $z = -h_*/2$ и $z = h_*/2$, а также массовая сила \mathbf{Q} , которые определяются выражениями

$$\mathbf{p} = p \mathbf{e}_3 d\sigma = p \mathbf{e}_3 \sqrt{G} \partial\alpha^1 \partial\alpha^2, \quad \mathbf{Q} = g \rho h_* dF = g h_* \rho \sqrt{G} \partial\alpha^1 \partial\alpha^2$$

где $p = p^+ - p^-$ – избыточное давление, действующее на оболочку и отнесенное к единице площади σ , ρ – плотность материала оболочки, которая в процессе деформации не изменяется, так как материал оболочки считается несжимаемым, \mathbf{g} – ускорение свободного падения.

Для безмоментной теории для поперечного усилия можно принять $T^{33} = 0$ [2], что позволяет считать формирующееся напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочки плосконапряженным. Прикладывая к выделенному элементу оболочки внутренние и внешние усилия, а также инерционные силы, исходя из принципа Даламбера, можно получить уравнение движения следующего вида:

$$\begin{aligned} \rho h_* \sqrt{G} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left((T^{11} \mathbf{e}_1 + T^{12} \mathbf{e}_2) \sqrt{G_{22}} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left((T^{22} \mathbf{e}_2 + T^{21} \mathbf{e}_1) \sqrt{G_{11}} \right) + (\mathbf{p} + \rho h_* \mathbf{g}) \sqrt{G} \end{aligned} \quad (2.2)$$

в котором неизвестными являются вектор-функция \mathbf{r} и компоненты истинных внутренних усилий T^{ij} .

Рассматривается совместное деформирование гладкой оболочки и элемента усиления оболочки, фиг. 2. Пусть абсолютно гибкая однородная нить с линейной плотностью ρ_s движется в пространстве x_γ , $\gamma = 1, 2, 3$ под действием распределенной нормальной нагрузки интенсивностью \mathbf{F}_n , распределенной касательной нагрузки с интенсивностью \mathbf{F}_τ .

Деформация нити характеризуется степенью удлинения $\lambda = ds / ds_0$ или относительным удлинением $\varepsilon = \lambda - 1$. Зависимость натяжения от деформации примем в виде $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\lambda)$ при $\lambda > 0$ и $\mathbf{T} = 0$ при $\lambda \leq 0$. Масса элемента нити до деформации и после деформации не меняется: $dm = \rho_0 ds_0 = \rho_s ds$.

Уравнение движения элемента упругой весомой нити в поле силы тяжести можно записать в виде [9]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s_0} + \mathbf{F}_n \lambda + \mathbf{F}_\tau \lambda + \mathbf{g} \rho_0 \quad (2.3)$$

здесь $\mathbf{r}(s_0, t)$ – радиус-вектор произвольной точки элемента нити.

Рассматривается система уравнений (2.2) и (2.3). Пусть элемент усиления оболочки проходит по одной из лагранжевых координат оболочки (к примеру α^2). Элемент усиления, обладая большей жесткостью, разделяет гладкую оболочку на две подобласти G_1, G_2 , фиг. 2. Пусть на границах этих подобластей соприкосновения, на элементе усиления, реализуются касательные $T_{(1)}^{12}, T_{(2)}^{12}$ и нормальные натяжения $T_{(1)}^{11}, T_{(2)}^{11}$, где нижние индексы относятся к подобластям G_1 и G_2 . Тогда уравнения движения каждой подобласти описывается формулой (2.2) с граничными натяжениями $T_{(1)}^{12}, T_{(1)}^{11}$ и $T_{(2)}^{12}, T_{(2)}^{11}$ соответственно для этих подобластей. А вектора $\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_\tau$, входящие в уравнение движения элемента усиления оболочки (2.3), определяются через натяжения $T_{(1)}^{12}, T_{(1)}^{11}$ и $T_{(2)}^{12}, T_{(2)}^{11}$ и внешние нагрузки p_l , действующие на элемент усиления. Таким образом, рассматриваются уравнения движения гладких оболочек и элементов усиления оболочки совместно с учетом граничных условий. Заметим, при отсутствии элементов усиления движение оболочки определяется только уравнением (2.2).

Раскройная высота оболочки составляет l_1 . Координата α_1 меняется в диапазоне $0 \leq \alpha_1 \leq l_1$, а координата α_2 в диапазоне $0 \leq \alpha_2 \leq l_2$.

Начальные условия для оболочки: $\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2, t_0) = \mathbf{r}_0(\alpha_1, \alpha_2)$.

Граничные условия задачи. Верхняя и нижняя крышка принимаются абсолютно жесткими. Пусть груз равномерно распределен через верхнюю крышку вдоль линии $\alpha_2 = l_2$. При $t \geq t_0$ для верхней и нижней крышек имеем

$$\mathbf{r}(0, \alpha_2, t) = \mathbf{r}_0(0, \alpha_2),, \mathbf{r}(l_1, \alpha_2, t) = \mathbf{r}_0(l_1, \alpha_2)$$

Уравнение движения груза с массой m_{gr} примем в виде

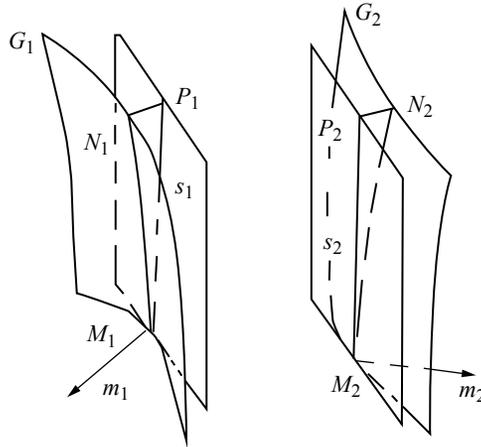
$$m_{gr} \frac{d\mathbf{V}_{gr}}{dt} = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \pi r_k^2 - m_{gr} \mathbf{g} - 2\pi r_k T_{11}(0, a_2, t) \mathbf{e}_1 \cos \gamma \quad (2.4)$$

где \mathbf{P}_1 – вектор давления внутри оболочки, \mathbf{P}_0 – атмосферное давление, \mathbf{g} – ускорение свободного падения, γ – угол между направлением действия натяжения T_{11} оболочки в точке соединения верхней крышки с радиусом r_k и направлением вектора скорости движения груза.

Поверхность соударения в расчетах принимается гладкой. При иной конфигурации поверхности необходимо дополнительные условия на границе контакта поверхности с мягкой оболочкой.

Естественными граничными условиями при обжатии оболочки являются условия соприкосновения элементов оболочек вдоль кольцевых лент усиления.

При численном моделировании мягкой оболочки в процессе колебательного движения, за счет различий в скоростях элементов, в расчетах могут наблюдаться взаимопересекающиеся области. Мягкие оболочки могут соприкасаться, но не допускают



Фиг. 3

взаимопересечения. Следовательно, алгоритм расчета необходимо дополнить условиями, учитывающими это обстоятельство, которые назовем условиями соприкосновения.

Пусть две криволинейные гладкие поверхности G_1 и G_2 (фиг. 3) соприкасаются элементами оболочек в точках M_1 и M_2 . Кривая M_1N_1 принадлежит поверхности G_1 , а кривая M_2N_2 поверхности G_2 . Вдоль этих кривых за параметры изменения приняты длины дуг s_1 и s_2 . Текущие координаты α_1 и α_2 выражаются как функции s_1 , $\alpha_1 = \alpha_1(s_1)$, $\alpha_2 = \alpha_2(s_1)$. Пусть длина дуги M_1N_1 равна Δs_1 , а точка P_1 основание перпендикуляра, опущенного из точки N_1 на касательную плоскость, проходящую через точку M_1 . Построим в точке M_1 единичный вектор \mathbf{m}_1 , направленный по нормали к поверхности G_1 . Вектор $\mathbf{P}_1\mathbf{N}_1$ параллелен вектору \mathbf{m}_1 , тогда $\mathbf{P}_1\mathbf{N}_1 = \delta_1\mathbf{m}_1$, где коэффициент δ_1 положителен, если уклонение $\mathbf{P}_1\mathbf{N}_1$ от касательной плоскости направлено в сторону вектора \mathbf{m}_1 , и отрицателен в противном случае. Аналогично получаем для поверхности G_2 , проходящей через точку M_2 : \tilde{P} .

Из дифференциальной геометрии известно, что при бесконечно малом смещении точки N_1 от M_1 расстояние P_1N_1 равно половине второй квадратичной формы поверхности G_1 , т.е. $\delta_1 = I_{2,G_1}/2$, а расстояние между точками P_2N_2 соответственно $\delta_2 = I_{2,G_2}/2$.

Следовательно, если точки M_1 и M_2 поверхностей G_1 и G_2 соприкасаются и при бесконечно малом смещении точек N_1 и N_2 на этих поверхностях вдоль линий s_1 и s_2 , для того, чтобы элементы оболочек не соприкасались, необходимо, чтобы уклонения $\mathbf{P}_1\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{P}_2\mathbf{N}_2$ были положительными, то есть

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0 \tag{2.5}$$

Вторая квадратичная форма определяется выражением [16]

$$I_{2,G} = b_{11}d\alpha_1^2 + 2b_{12}d\alpha_1d\alpha_2 + b_{22}d\alpha_2^2$$

$$b_{11} = \mathbf{m}\mathbf{r}_{11}, b_{12} = \mathbf{m}\mathbf{r}_{12}, b_{22} = \mathbf{m}\mathbf{r}_{22}, \mathbf{r}_{ik} = \partial^2\mathbf{r}/(\partial\alpha_i\partial\alpha_k)$$

Таким образом, в алгоритме расчета динамики мягкой каркасированной оболочки с подкреплениями необходимо дополнить процедуру анализа условий соприкосновения точек, принадлежащих различным подобластям оболочки выражениями вида (2.5).

В дальнейшем для (2.2) вместо трех неизвестных функций перемещений $u^\gamma(\alpha^1, \alpha^2, t)$ введем в рассмотрение новые неизвестные, принимая для \mathbf{r} представление

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2, t) = \sum_{\gamma=1}^3 x_\gamma \mathbf{i}_\gamma = x_\gamma \mathbf{i}_\gamma, \quad x_\gamma = x_\gamma(\alpha^1, \alpha^2, t)$$

где x_γ – новые неизвестные, представляющие собой координаты произвольной точки на σ относительно неподвижной ортогональной декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ с ортами \mathbf{i}_γ . Тогда для определения основных базисных векторов \mathbf{r}_j и компонент метрического тензора G_{ij} используются соотношения

$$\mathbf{r}_j = \partial \mathbf{r} / \partial \alpha^j = x_{j,\gamma} \mathbf{i}_\gamma, \quad r_{j,\gamma} = \partial x_\gamma / \partial \alpha^j, \quad G_{jm} = \mathbf{r}_j \mathbf{r}_m = r_{j,k} r_{m,k} \quad (2.6)$$

При этом

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{r}_i / \sqrt{G_{ii}} = l_{i\gamma} \mathbf{i}_\gamma, \quad l_{j\gamma} = r_{j,\gamma} / \sqrt{G_{jj}}, \quad I_1 = (2 / \pi) y_{\max} (\tilde{x} - a)$$

где $l_{\delta\gamma} = \cos(\mathbf{e}_\delta, \mathbf{i}_\gamma)$ – направляющие косинусы, определяемые выражениями $l_{j\gamma} = r_{j,\gamma} / \sqrt{G_{jj}}$:

$$\begin{aligned} l_{31} &= (l_{12}l_{23} - l_{13}l_{22})\sqrt{G_{11}G_{22}}/\sqrt{G} \\ l_{32} &= (l_{13}l_{21} - l_{11}l_{23})\sqrt{G_{11}G_{22}}/\sqrt{G} \\ l_{33} &= (l_{11}l_{22} - l_{12}l_{21})\sqrt{G_{11}G_{22}}/\sqrt{G} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Пусть вектор \mathbf{g} направлен вдоль оси x_3 , тогда $\mathbf{g} = g\mathbf{i}_3$. Проектируя уравнение (2.2) на декартовы оси и учитывая соотношения (2.7), приходим к трем уравнения движения:

$$\begin{aligned} \rho h_* \sqrt{G} \frac{\partial^2 x_\gamma}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \alpha^1} \left((T^{11}l_{1\gamma} + T^{12}l_{2\gamma})\sqrt{G_{22}} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \alpha^2} \left((T^{22}l_{2\gamma} + T^{21}l_{1\gamma})\sqrt{G_{22}} \right) + p_3 l_{3\gamma} \sqrt{G} (1 - \delta_{3\gamma} \rho h_* g) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\delta_{31} = \delta_{32} = 0, \quad \delta_{33} = 1, \quad \gamma = 1, 2, 3$$

Для замыкания полученной системы уравнений, состоящей из уравнений движения (2.8), геометрических и кинематических соотношений (2.6) и (2.7), необходимо составить физические соотношения для оболочки с тканевой основой.

2.1. Физические соотношения для ткани. Тканевые материалы обладают малой жесткостью на сдвиг, примерно до 2% по сравнению с жесткостью на растяжение [14]. Поэтому можно положить модули упругости на сдвиг равными $E_{12} = E_{21} = 0$. Тогда физические соотношения для ткани применительно к уравнениям (2.8) можно принять в виде [8,14]:

$$\begin{aligned} T_{11} &= (E_{11}e_{11} + \nu_{21}E_{22}e_{22})/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) + \eta \dot{e}_{11} \\ T_{22} &= (E_{22}e_{22} + \nu_{12}E_{11}e_{11})/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) + \eta \dot{e}_{22} \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.25$ – аналоги коэффициента Пуассона, e_{11} , e_{22} – относительные удлинения, \dot{e}_{11} и \dot{e}_{22} – скорости относительных удлинений, η – коэффициент вязкого трения в материале, E_{11} , E_{22} – модули упругости на растяжение.

Физическое соотношение для кольцевого пояса примем в виде

$$N_{22} = [E_2 e_2 / \Delta l + \nu_{12} E_{11} e_{11}] / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) + \eta \dot{e}_2$$

e_2 , E_2 – относительное удлинение и модуль упругости для кольцевого каркаса, Δl – некоторая приведенная ширина для согласования деформирования каркаса и ткани.

2.2. *Определение необходимого избыточного давления для полного торможения груза.* Пусть в момент соприкосновения нижней части оболочки с поверхностью, скорость груза равна V_{gr} , фиг. 1. Энергия груза равна сумме потенциальной и кинетической энергии $E = mgl_1 + mV_{gr}^2/2$, где l_1 – раскройная высота оболочки.

Пусть вся энергия идет на обжатие оболочки, т.е. на работу $A = \bar{P}\bar{F}l_1$, где \bar{P} – среднее значение давления в процессе обжатия, \bar{F} – площадь сечения деформированной оболочки. Тогда $\bar{P} = (mgl_1 + mV_{gr}^2/2)/(\bar{F}l_1)$. В общем случае можно принять, что давление растет от нуля до P_{max} при времени \tilde{t} , затем падает до нуля в процессе конечной фазы обжатия при времени t_k , можно предположить, что время \tilde{t} соответствует конечной фазе обжатия. Для определения P_{max} из условия полного погашения энергии падающего груза и профиля нарастания и спада давления воспользуемся теоремой о среднем.

В соответствии с частным случаем теоремы о среднем, для непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ справедливо $\int_a^b f(x) dx = \tilde{y}(b - a)$, где \tilde{y} – среднее значение

функции в промежуточной точке отрезка $[a, b]$. Опираясь на эту теорему, сформулируем следующее утверждение:

Для двух синусоидальных кривых определенных на отрезках $[a, \tilde{x}]$ и $[\tilde{x}, b]$, имеющих на границах отрезка нулевые значения и в совместной точке значение $y_{max} = f(\tilde{x})$, независимо от расположения точки \tilde{x} на отрезке $[a, b]$ выполняется условие $y_{max} = (\pi/2)\tilde{y}$, где \tilde{y} – среднее значение функции на отрезке.

Действительно, если на восходящей и на нисходящей линиях кривые описываются синусоидами, тогда площадь криволинейной трапеции определяется интегралом

$$I = y_{max} \int_a^{\tilde{x}} \sin\left(\frac{\pi(x-a)}{2(\tilde{x}-a)}\right) dx + y_{max} \int_{\tilde{x}}^b \cos\left(\frac{\pi(x-\tilde{x})}{2(b-\tilde{x})}\right) dx$$

Для первого интеграла получаем значение $I_1 = (2/\pi)y_{max}(\tilde{x}-a)$, а для второго $I_2 = (2/\pi)y_{max}(b-\tilde{x})$. Таким образом $I = I_1 + I_2 = (2/\pi)y_{max}(b-a) = \tilde{y}(b-a)$ и результат интегрирования не зависит от расположения точки \tilde{x} внутри отрезка $[a, b]$ и $\tilde{y} = (2/\pi)y_{max}$, следовательно $y_{max} = (\pi/2)\tilde{y}$.

Пусть, первая фаза обжатия оболочки протекает во времени от $t = t_0$ от \tilde{t} , до момента действия максимального давления P_{max} , а вторая фаза во времени от \tilde{t} до t_k .

Тогда закон изменения давления на восходящей и на нисходящей линиях кривой можно принять в виде

$$\tilde{p}(t) = P_{max} \sin\left(\frac{\pi(t-t_0)}{2(\tilde{t}-t_0)}\right), \quad \tilde{p}(t) = P_{max} \cos\left(\frac{\pi(t-\tilde{t})}{2(t_k-\tilde{t})}\right) \quad (2.10)$$

Определим в первом приближении время конца обжатия оболочки t_k . Среднее значение давления в оболочке в процессе обжатия \bar{P} создает среднее ускорение торможения груза $\tilde{g}_p = \bar{P}\bar{F}/m$. При этом скорость тела в конце обжатия оболочки составит $V_{gr} = V_0 + (g - \tilde{g}_p)(t_k - t_0)$, где V_0 – скорость груза в момент времени $t = t_0$. Если оболочка полностью гасит энергию падения тела, то $V_{gr} = 0$, тогда $(t_k - t_0) = V_0/(\tilde{g}_p - g)$, здесь $\tilde{g}_p > g$.

При обжатии реализуется высокочастотное колебание элементов оболочки, колебания оболочки влияют на значение действующего давления. При движении элемента оболочки

против внутреннего давления действующий на этот элемент давление увеличивается, а в противоположном направлении – уменьшается, т.е. происходит демпфирование раздува колебанием самой оболочки.

При решении задачи об обжатии оболочки избыточное давление $p(t)$ аппроксимируем зависимостью

$$p(t) = \tilde{p}(t)(1 - v^n V^n)^2 \operatorname{sgn}(1 - v^n V^n) \quad (2.11)$$

используемой в теории мягких оболочек при исследовании динамики парашютов [8]. В зависимость (2.11) введено слагаемое $v^n V^n$, в котором v^n представляет собой коэффициент аэродинамического демпфирования среды при движении в ней оболочки со скоростью $V^n = \partial u_3 / \partial t$ в направлении нормали \mathbf{e}_3 к поверхности σ . Здесь компонента u_3 вектора перемещений вычисляется по формуле $u_3 = \mathbf{u}\mathbf{e}_3$.

В этой зависимости закон распределения избыточного давления \tilde{p} по пространственным координатам α^1, α^2 считается заданным (2.10) в момент времени t .

В дальнейшем будем считать, что при $t = t_0$ начальная форма оболочки σ_0 описывается уравнением $r(\alpha^1, \alpha^2, t_0) = r(\alpha^1, \alpha^2)$, в котором α^1 – криволинейная координата вдоль образующей оболочки, изменяющаяся в пределах $0 \leq \alpha^1 \leq l_1$, а окружная координата α^2 изменяющийся в пределах $0 \leq \alpha^2 \leq l_2$. Скорости элементов оболочки в начальный момент времени считаем равными скорости груза: $dr(\alpha^1, \alpha^2, t_0)/dt = V_{gr}$, а скорости элементов оболочки нижней части при соприкосновении с поверхностью равны нулю $dr(l_1, \alpha^2, t)/dt = 0$.

3. Разностная схема решения задачи. Рассмотрим элемент (i, j) разностной сетки, покрывающей деформированную поверхность. Предполагаем, что его масса сосредоточена в узле (i, j) .

В каждый момент времени кратности удлинений в направлениях α^1 и α^2 будем вычислять по формулам

$$\lambda_1^{i+1/2, j} = h_1^{-1} \left(\sum_{k=1}^3 (x_{i+1, j}^{\gamma} - x_{i, j}^{\gamma})^2 \right)^{1/2}$$

$$\lambda_2^{i, j+1/2} = h_2^{-1} \left(\sum_{k=1}^3 (x_{i, j+1}^{\gamma} - x_{i, j}^{\gamma})^2 \right)^{1/2}$$

$$\lambda_1^{i+1/2, j+1/2} = (\lambda_1^{i+1/2, j+1} + \lambda_1^{i+1/2, j})/2$$

$$\lambda_2^{i+1/2, j+1/2} = (\lambda_2^{i+1, j+1/2} + \lambda_2^{i, j+1/2})/2$$

где $h_1 = h_1(i, j)$ и $h_2 = h_2(i, j)$ – расстояния между точками $(i + 1 / 2, j)$, $(i, j + 1 / 2)$ и (i, j) сетки.

Для вычисления направляющих косинусов основных базисных векторов используются соотношения

$$\{l_{1, \gamma}\}_j^i = \frac{x_{i+1, j}^{\gamma} - x_{i, j}^{\gamma}}{h_1 \lambda_1^{i+1/2, j}}, \quad \{l_{2, \gamma}\}_i^j = \frac{x_{i, j+1}^{\gamma} - x_{i, j}^{\gamma}}{h_2 \lambda_2^{i, j+1/2}}$$

Уравнениям движения (2.2), допускающим относительно компонент вектора скорости представление в некотором обобщенном виде (A и B – некоторые константы):

$$\partial \mathbf{V} / \partial t - A \partial \mathbf{T} / \partial s = B \quad (3.1)$$

ставятся в соответствие их разностные аналоги. Например, при

$$2 \leq i \leq n_1 - 1; \quad 2 \leq j \leq n_2 - 1$$

$$\begin{aligned} \{V^\gamma\}^{n+1/2} &= \{V^\gamma\}^{n-1/2} + P_{i,j} \frac{\Delta t}{h_1 h_2} F_{i,j}^\gamma + \\ &+ \frac{\Delta t}{\rho h_*} \left(\sum_{\pm} \left[\begin{aligned} &\left\{ T^{11} \lambda_2 \right\}_{j \pm 1/2}^{i+1/2} \left\{ l_{1\gamma} \right\}_{j \pm 1/2}^{i+1/2} - \left\{ T^{11} \lambda_2 \right\}_{j \pm 1/2}^{i-1/2} \left\{ l_{1\gamma} \right\}_{j \pm 1/2}^{i-1/2} + \right. \\ &\left. \left\{ T^{12} \lambda_2 \right\}_{i+1/2}^{j \pm 1/2} \left\{ l_{2\gamma} \right\}_{i+1/2}^{j \pm 1/2} - \left\{ T^{12} \lambda_2 \right\}_{i-1/2}^{j \pm 1/2} \left\{ l_{2\gamma} \right\}_{i-1/2}^{j \pm 1/2} \right] / (2h_1) + \\ &\sum_{\pm} \left[\begin{aligned} &\left\{ T^{22} \lambda_1 \right\}_{i \pm 1/2}^{j+1/2} \left\{ l_{2\gamma} \right\}_{i \pm 1/2}^{j+1/2} - \left\{ T^{11} \lambda_2 \right\}_{i \pm 1/2}^{j-1/2} \left\{ l_{1\gamma} \right\}_{i \pm 1/2}^{j-1/2} + \right. \\ &\left. \left\{ T^{21} \lambda_1 \right\}_{j+1/2}^{i \pm 1/2} \left\{ l_{2\gamma} \right\}_{j+1/2}^{i \pm 1/2} - \left\{ T^{21} \lambda_1 \right\}_{j-1/2}^{i \pm 1/2} \left\{ l_{2\gamma} \right\}_{j-1/2}^{i \pm 1/2} \right] / (2h_2) - \\ &-\rho h_* \delta_{3\gamma} g \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь

$$\{l_{1\gamma}\}_{j-1/2}^{i+1/2} = (x_{i+1,j-1/2}^\gamma - x_{i,j-1/2}^\gamma) / (h_1 \lambda_{i+1/2,j-1/2}^1)$$

$F_{i,j}^\gamma$ – сумма проекций площадей восьми треугольников, примыкающих к узлу (i, j) , на плоскость $x^\gamma = 0$ ($\gamma = 1, 2, 3$). Так, для первого треугольника имеем

$$F_{i,j}^1 = \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} &x_{i,j}^2 (x_{i+1/2,j}^3 - x_{i+1/2,j+1/2}^3) + x_{i+1/2,j}^2 (x_{i+1/2,j+1/2}^3 - x_{i,j}^3) + \\ &+ x_{i+1/2,j+1/2}^2 (x_{i,j}^3 - x_{i+1/2,j}^3) \end{aligned} \right)$$

Проекции площади на другие плоскости $x^2 = 0$ и $x^3 = 0$ определяются аналогично. При этом индексы 1, 2, 3 меняются циклической перестановкой.

Шаг интегрирования выбирается в соответствии с критерием Куранта – Фридрихса – Леви

$$\Delta t < \alpha_k \min(h_1, h_2) / c \quad (3.3)$$

где α_k – коэффициент Куранта, c – скорость распространения малых возмущений в материале (скорость звука).

Граничные условия для оболочки будем удовлетворять на расширенной сетке, размеры которой определяются числами 1, n_1 и 1, n_2 . Индексы i и j будут меняться при этом в пределах $1 \leq i \leq n_1$, $1 \leq j \leq n_2$. Искомые координаты узловых точек оболочки на временных слоях определяются по формулам

$$(x^\gamma)_{i,j}^{n+1} = (x^\gamma)_{i,j}^{n+1} + \Delta t (\tilde{V}^\gamma)_{i,j}^{n+1/2} \quad (\gamma = 1, 2, 3) \quad (3.4)$$

Таким образом, в основе построения численного решения сформулированной задачи используется явная схема метода конечных разностей. В результате при построении решения составленной системы уравнений вводится в рассмотрение дискретная область

$$S_{n_i} = n_i/h_i, \quad n_i = 1, 2, 3, \dots, \quad S_i / \Delta s_i \quad \text{и} \quad t_n = n\Delta t, \quad n = 1, 2, \dots, \quad t/\Delta t - 1$$

При этом значения искомым функций на каждом шаге интегрирования определяем через уже известные их значения на предыдущем шаге в рамках единого алгоритма сквозного счета.

В начальный момент времени при $n = 0$ (т.е. при $t = -\Delta t/2$) в уравнениях вида (3.2) необходимо для начала счета задать $(\tilde{V}^\gamma)_{i,j}^{-1/2}$ на расширенной сетке. В дальнейшем при времени $t > 0$ эти скорости на каждом шаге пересчитываются на расширенной сетке.

Выбор коэффициента η (2.9), учитывающего влияние внутреннего трения в материале на динамику оболочки, шага интегрирования Δt и шагов расчетной сетки h_1 и h_2 , связанных соотношением (3.3), осуществляется на основе численного эксперимента.

Заметим, что изложенный алгоритм позволяет исследовать также и статические задачи механики деформирования оболочек методом установления.

3.1. Оценка погрешности аппроксимации производных. Рассмотрим в уравнении (3.1) производную $\partial T / \partial s$ относительно полуцелой сетки

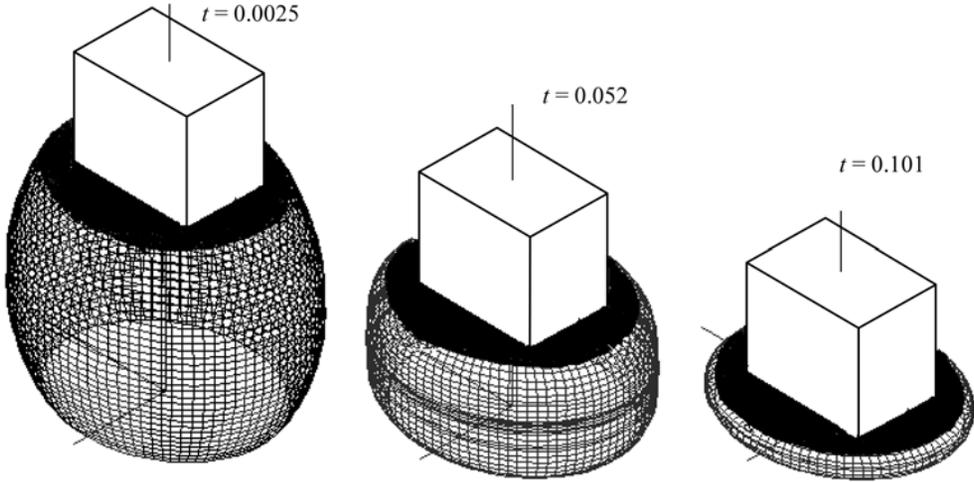
$$s_{i+1/2} = (i + 1/2)h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

при фиксированном времени t_n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Для нее, раскладывая значения функции T в ряд Тейлора, в окрестности целой точки в [8] на основе работы [20] показано, что центральная разность по лагранжевой координате на полуцелой сетке аппроксимирует производную $\partial T / \partial s$ со вторым порядком точности. Учитывая, что значения Δt и Δs связаны линейным соотношением (3.3), $\Delta t = c_1 h$, где $c_1 = \alpha_k / c$, вычисляются и производные $\partial V / \partial t$. Следовательно, центральные разности относительно полуцелой сетки аппроксимируют частные производные $\partial T / \partial s$, $\partial V / \partial t$ в уравнении (3.1) со вторым порядком точности.

3.2. Уравнения движения в безразмерном виде. Для представления уравнения (2.2) в безразмерном виде задаются: характерный размер $L = l_1$ [м], представляющий собой длину образующей оболочки; перепад давления и плотность воздуха ρ_B [кг/м³], по которым определяется характерная скорость V_0 [м./с]; вводятся в рассмотрение характерная сила $T_0 = \rho_B V_0^2 L^2$ [Н] и характерная масса $M_s = 2\pi r L \rho$ [кг] оболочки; ρ – плотность материала оболочки; параметр Ньютона $A_N = \rho_B V_0^2 L^2$. Размерное значение ускорения g выражается через безразмерный параметр \tilde{g} в соответствии с зависимостью $g = \tilde{g} V_0^2 / L$, а также производится замена $t = \tau L / V_0$, где τ – безразмерное время. И $T_{ij} = \tilde{T}_{ij} T_0 / L$, $p = \tilde{p} T_B / L^2$, $\eta = \tilde{\eta} T_0 / V_0$, $\rho = \tilde{\rho} M_s / L^2$.

4. Анализ результатов и примеры. Пусть оболочка имеет цилиндрическую форму с диаметром $d = 0.5$ м, образующей $l_1 = 0.6$ м. В расчетах использовалась регулярная сетка с числом ячеек 90×36 вдоль окружности и образующей цилиндра соответственно. Оболочка изготовлена из капроновой ткани с модулями упругости $E_{11} = E_{22} = 20$ кН/м по направлениям образующей цилиндра и его окружности. Плотность ткани $\rho = 0.05$ кг/м². Оболочка усилена тремя кольцевыми поясами в пять слоев ткани с равномерным шагом по высоте оболочки. Масса падающего груза принята $G = 100$ кг. Начальная скорость груза и оболочки в момент соприкосновения с поверхностью нижней части цилиндрической оболочки принята $V_{gr} = 6.0$ м/с.

Давление определяется скоростным напором $p = k_p \rho_B V_0^2 / 2$, где характерная скорость $V_0 = 80$ [м/с], плотность воздуха $\rho_B = 0.125$ г [кг/м³], коэффициент повышения



Фиг. 4

давления $k_p = 4$. В расчетах принято, что внутри оболочки в процессе обжатия значение перепада давления p остается неизменным.

Начальное состояние, соответствующее этим данным, приведено на фиг. 1, с этого момента начинается процесс торможения груза. На фиг. 4 приводятся результаты численного эксперимента процесса торможения груза.

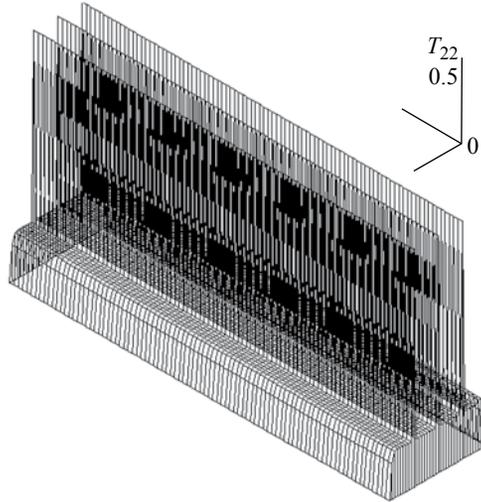
Максимальная деформация оболочки в окружном направлении происходит в момент времени $t = 0.0025$ с в области середины оболочки при этом максимальные безразмерные натяжения составляют $T_{22} = 6.099$. Скорость груза равна $V_{gr} = 6.018$ м/с, высота груза составила $H_{gr} = 0.975 l_1$. При времени $t = 0.052$ с скорость груза равна $V_{gr} = 5.359$ м/с, оболочка обжалась наполовину и высота груза составила $H_{gr} = 0.5 l_1$. В момент времени $t = 0.101$ с скорость груза равна $V_{gr} = 4.503$ м/с, а высота груза составила $H_{gr} = 0.1 l_1$.

На фиг. 5 приводится график поверхностных окружных натяжений для этого времени. Максимальные безразмерные натяжения $T_{22} = 1.706$ также реализуется посередине оболочки. Пояса усиления существенно снижают уровень окружных натяжений.

Время полного торможения составило $t_k = 0.125$ с. А скорость груза при соприкосновении с поверхностью $V_{gr} = 4.04476$ м/с.

Проведем расчеты для тестирования программы. Пусть давление в оболочке при обжатии сохраняется равным $p = 0$ (свободное падение тела). В начальный момент движения груз имеет скорость $V_{gr} = 6.0$ м/с. Время падения с высоты $l_1 = 0.6$ м определяется из уравнения $gt^2 + 2V_{gr}t - 2l_1 = 0$ и составляет $t = 0.09294$ с. А скорость для свободного падения при соприкосновении с поверхностью соответственно $V_{gr} = 6.91143$ м/с. Рассмотрим эту задачу с помощью численного интегрирования выше приведенным алгоритмом, расчеты дают $V_{gr} = 6.91003$ м/с. Относительная погрешность по сравнению с точным решением составляет $\epsilon = 0.0203\%$. На основании этого расчета выбран и коэффициента Куранта $\alpha_k = 0.02$ для формулы (3.3), который обеспечивает устойчивость решения.

Применение надувной мягкой оболочки позволило в расчетном случае снизить скорость груза при ударе о поверхность на $\Delta V = 6.91143 - 4.04476 = 2.86667$ м/с.



Фиг. 5

В расчетах, проведенных для ткани с модулями упругости $E_{11} = E_{22} = 18.75$ кН/м, скорость при ударе тела о поверхность составила $V_{gr} = 3.88157$ м/с. А расчеты при $E_{11} = E_{22} = 15$ кН/м, дают значение скорости равное $V_{gr} = 3.76559$ м/с.

Таким образом, уменьшая модуль упругости материала (используя более деформативные материалы) можно понизить скорость при ударе тела о поверхность. Этот эффект происходит за счет большей деформации оболочки и увеличения эффективной площади давления против движения груза. Уменьшение скорости падения происходит и за счет увеличения давления внутри оболочки.

5. Заключение. Разработана математическая модель торможения падающего груза с помощью мягкой карказированной оболочки, внутри которой создается противодействие движению груза при соприкосновении его с поверхностью.

Разработан численный алгоритм решения дифференциальных уравнений в частных производных с граничными условиями соприкосновения элементов мягкой оболочки при ее обжати.

Для проверки методики расчета проведен численный эксперимент. Выявлены параметры, влияющие на процесс торможения тела. Результаты расчета согласуются с общими представлениями процесса торможения падающего груза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гиниятуллин А.Г., Гимадиев Р.Ш. Исследование наполнения оболочки баллонного катетера // Медицинская техника. 1993. Вып. 2. С. 30–33.
2. Гимадиев Р.Ш., Гимадиева Т.З., Паймушин В.Н. О динамическом процессе раздувания тонких оболочек из эластомеров под действием избыточного давления // ПММ. 2014. Т. 78. Вып.2. С. 236–248.
3. Gimadiev R. Sh., Gimadieva T.Z., Paimushin V.N. Mathematical Simulation of Dynamics at Elastomeric Shells Inflation // Int. Conference on the Methods of Aerophysical Research. August 19–25. 2012. Kazan, Russia. Abstracts. V. 1. P. 114–115.

4. Лобанов А.Н. Основы расчета и конструирования парашютов. М.: Машиностроение, 1965. 363 с.
5. Ильгамов М.А. Введение в нелинейную гидроупругость. М.: Наука, 1991. 200 с.
6. Морозов В.И., Пономарев А.Т., Рысев О.В. Математическое моделирование сложных аэроупругих систем. М.: Физматлит, 1995. 736 с.
7. Мосеев Ю.В., Рысев О.В., Федоров В.В. Математическая модель формообразования двухоболочкового планирующего парашюта // Тр. семинара “Взаимодействие оболочек со средой”: Казань: КФТИ КФ АН СССР, 1985. № 20. С. 31–40.
8. Гимадиев Р.Ш. Динамика мягких оболочек парашютного типа. Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2006. 208 с.
9. Гимадиев Р.Ш., Куринская В.П., Михайловский Ю.В. Численное и экспериментальное исследование раскрытия ленточного крестообразного парашюта // Изв. вузов. Авиаци. техника. 1997. № 1. С. 6–11.
10. Ридель В.В., Гулин Б.В. Динамика мягких оболочек. М.: Наука, 1990. 205 с.
11. Гильманов А.Н. Динамика ударного взаимодействия мягко сферической оболочки, заполненной газом, с твердой поверхностью // Тр. семинара “Нелинейные проблемы аэрогидроупругости”. Казань: КФТИ КФ АН СССР, 1979. Вып. 11. С. 98–114.
12. Шагидуллин Р.Р. Проблемы математического моделирования мягких оболочек. Казань: Казан. мат. о-во, 2001. 235 с.
13. Магула В.Э. Судовые эластичные конструкции. Л.: Судостроение, 1978. 263 с.
14. Отто Ф., Тростель Р. Пневматические строительные конструкции. М.: Стройиздат, 1967. 320 с.
15. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: ОГИЗ, 1948. 212 с.
16. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. 326 с.
17. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336с.
18. Колтак Е.П. Устойчивость безмоментных оболочек при больших деформациях. СПб.: СПбГУ, 2000. 248 с.
19. Паймушин В.Н. Теория тонких оболочек при конечных перемещениях и деформациях, основанная на модифицированной модели Кирхгофа-Лява. ПММ // 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 813–829.
20. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач в газовой динамике. М.: Наука, 1992. 423 с.

Поступила в редакцию

25.11.2015