

УДК 621.64

СОПРЯЖЕНИЯ КОНИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ

© Р.Ш. Гимадиев

При проектировании соединения трубопроводов, имеющих формы части конуса и цилиндра или двух цилиндров, приходится решать задачу сопряжения поверхностей и определения линии кривой соединения или развертки части цилиндра. Рассматриваются математические задачи о сопряжении конической поверхности с цилиндрической, а также двух цилиндрических поверхностей.

Ключевые слова: математическое моделирование, сопряжение, трубопроводы, конус, цилиндр, край, лекало.

При проектировании соединения трубопроводов различной геометрии, имеющих формы части конуса и цилиндра, актуальной задачей является определение линии сопряжения поверхностей. Наиболее близкие задачи к этой теме рассмотрены в работах [1, 2]. Требуется определение развертки соединения цилиндрической части поверхности (края) для последующего наложения и определения линии соединения. Также эти вопросы актуальны при расчете на прочность, где исходным является определение начального состояния соединения трубопроводов, находящихся под давлением рабочей среды.

Рассмотрим три вида соединения: оси конуса и цилиндра перпендикулярны; конус вырождается в цилиндр; оси конуса и цилиндра параллельны.

1. Оси конуса и цилиндра перпендикулярны. Рассмотрим сопряжение смещенной относительно оси Oz цилиндрической поверхности с радиусом r и части конической поверхности с текущим радиусом bz (рис. 1). Оси цилиндра и конуса перпендикулярны. Положение основания цилиндра относительно оси конуса определяется параметром l . Найдем линию сопряжения этих поверхностей и площадь поверхности цилиндра от основания до линии сопряжения.

Поверхности конуса с вершиной в начале координат $Oxyz$ и смещенного цилиндра относительно начала координат вдоль оси Oz на величину z_0 (рис. 1) описываются уравнениями

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (bz)^2, \\ x^2 + (z - z_0)^2 &= r^2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где параметр b является безразмерной величиной.

Исключая из системы (1.1) x^2 , имеем

$$y = \sqrt{(z - z_0)^2 + (bz)^2 - r^2}. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) определяет линию пересечения поверхностей в проекции на плоскость Oyz .

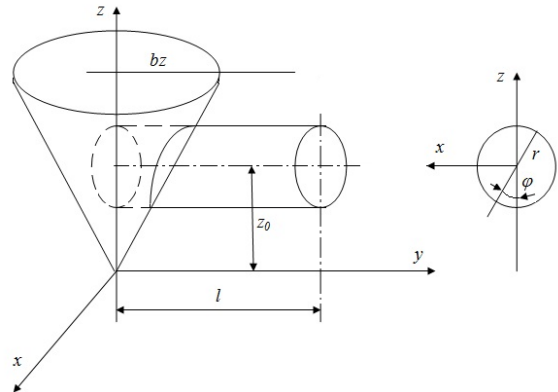


Рис. 1

Для сопряжения поверхностей введем следующие ограничения на определяющие параметры:

$$bz \geq r, z_0 \geq r + r/b. \quad (1.3)$$

Определим площадь части цилиндра, который сопрягается с конусом, для этого рассмотрим поверхностный интеграл первого рода

$$I = \iint_{(D)} d\sigma.$$

Для описания геометрии части сопряжения цилиндрической поверхности введем параметрические уравнения $x = x(\varphi, y), z = z(\varphi, y), y = y$. На основании рис. 1 имеем

$$x = r \sin \varphi, z = z_0 - r \cos \varphi, y = y. \quad (1.4)$$

Тогда в новой криволинейной системе координат поверхностный интеграл примет вид

$$I = \iint_{(D^*)} J d\varphi dy,$$

где Якобиан преобразования координат определяется по формуле

$$J = \left| \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_\varphi & z_{u\varphi} & y_\varphi \\ x_y & z_y & y_y \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r \cos \varphi & r \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r.$$

Тогда полная площадь цилиндра до линии сопряжения определяется как

$$F = 2 \int_0^\pi r d\varphi \int_{y_c}^l dy. \quad (1.5)$$

Здесь нижний предел интегрирования по y определяется по формуле (1.2)

$$y_c = \sqrt{(z - z_0)^2 + (bz)^2 - r^2}.$$

В криволинейных координатах линия сопряжения в плоскости Oyz с учетом (1.4) примет вид

$$y = \sqrt{(1 + b^2)r^2 \cos^2 \varphi - 2bz_0 \cos \varphi + b^2 z_0^2 - r^2}.$$

Тогда площадь сопряженного цилиндра определяется выражением

$$F = 2\pi lr - 2r \int_0^\pi \sqrt{(1 + b^2)r^2 \cos^2 \varphi - 2bz_0 \cos \varphi + b^2 z_0^2 - r^2} d\varphi. \quad (1.6)$$

Интеграл (1.6) при произвольных параметрах определяется одним из численных методов интегрирования: методом Эйлера, Адамса или Рунге – Кутта.

Пример расчета. С учетом ограничений (1.3) приведем расчеты при следующих исходных параметрах:

$$b = 1, z_0/r = 2, l/r = 4.$$

Расчет линии сопряжения в плоскости Oyz приведен в табл. 1, выражение (1.2) при этих параметрах имеет вид

$$y/r = \sqrt{2k^2 - 4k + 3}, \quad (1.7)$$

где $k = z/r$.

Линия сопряжения в проекции на плоскость Oyz (в соответствии с табл. 1) изображена на рис. 2.

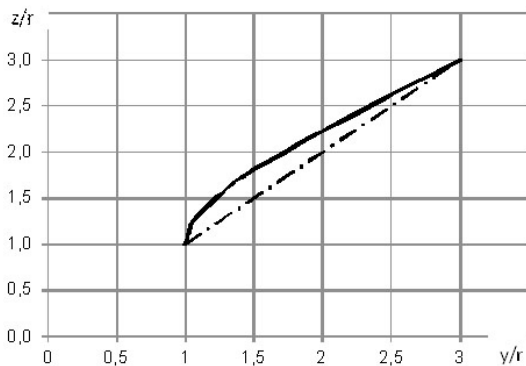


Рис. 2

Определение развертки (края) цилиндра сопряжения.

Если $y/r = f(k) = \sqrt{2k^2 - 4k + 3}$, линию развернуть по дуге $s = r\varphi$, то функция $(l - y)/r = f(s)$ и будет определять край части сопряжения цилиндра. Эти расчеты приводятся в табл. 2. На рис. 3 приводится край половины поверхности сопряжения цилиндра.

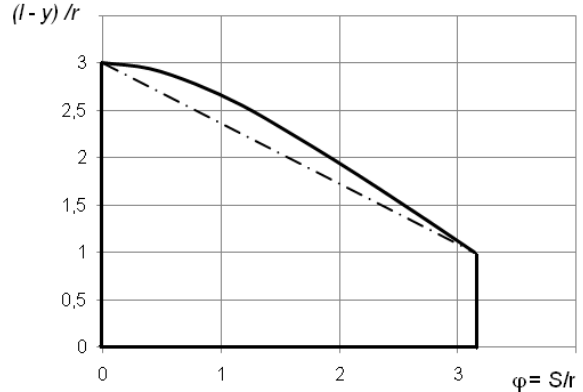


Рис. 3

2. Сопряжение двух цилиндров с взаимно перпендикулярными осями. Эта задача является продолжением первой задачи, когда конус вырождается в цилиндр. Найдем линию сопряжения двух цилиндров с радиусами r_1 и r_2 .

Пусть в системе координат $Oxuz$ уравнения поверхности первого цилиндра с радиусом r_1 и смещенного цилиндра с радиусом r_2 относительно начала координат вдоль оси Oz на величину z_0 описываются уравнениями

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r_1^2, \\ x^2 + (z - z_0)^2 &= r_2^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Исключая из системы (2.1) x^2 , имеем

$$y = \sqrt{(z - z_0)^2 + r_1^2 - r_2^2}. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) определяет линию пересечения поверхностей в проекции на плоскость Oyz . Для сопряжения поверхностей необходимо $r_1 \geq r_2$.

Определим площадь части цилиндра с радиусом r_2 , основание которого расположено на расстоянии l от плоскости Oxz , который сопрягается с первым цилиндром, с помощью поверхностного интеграла.

Для описания геометрии части сопряжения цилиндрической поверхности введем параметрические уравнения $x = x(\varphi, y), z = z(\varphi, y), y = y$ в виде

$$x = r_2 \sin \varphi, z = z_0 - r_2 \cos \varphi, y = y. \quad (2.3)$$

Таблица 1

$k = z/r$	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
y/r	1	1,061	1,225	1,43	1,732	2,031	2,345	2,669	3

Таблица 2

$\varphi = S/r$	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
$(l-y)/r$	3	2,939	8,775	2,550	2,268	1,969	1,655	1,331	1

Таблица 3

$\varphi = S/r$	0	$2\pi/32$	$4\pi/32$	$6\pi/32$	$8\pi/32$	$9\pi/32$	$10\pi/32$	$11\pi/32$	$12\pi/32$	$13\pi/32$	$14\pi/32$	$15\pi/32$	$31\pi/64$	$16\pi/32$
$(l-y)/r$	1	1,019	1,076	1,169	1,293	1,366	1,444	1,529	1,617	1,710	1,805	1,902	1,951	2

Тогда полная площадь второго цилиндра с радиусом r_2 до линии сопряжения определяется как

$$F = 2 \int_0^\pi r_2 d\varphi \int_{y_c}^l dy, \quad (2.4)$$

здесь нижний предел интегрирования по y определяется по формуле (2.2)

$$y_c = \sqrt{(z - z_0)^2 + r_1^2 - r_2^2}.$$

В криволинейных координатах линия сопряжения в плоскости Oyz примет вид

$$y = \sqrt{r_2^2 \cos^2 \varphi + r_1^2 - r_2^2}. \quad (2.5)$$

Тогда площадь сопряжения цилиндра определяется выражением

$$F = 2\pi r_2 l - 2r \int_0^\pi \sqrt{r_2^2 \cos^2 \varphi + r_1^2 - r_2^2} d\varphi. \quad (2.6)$$

Пример расчета. Приведем расчеты при следующих исходных параметрах:

$$r_1 = r_2 = r, z_0/r = 2, l/r = 2.$$

Площадь сопряжения цилиндра (2.6) при этих исходных данных определяется как

$$F = 4\pi r^2 - 4r \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = 4r^2(\pi - 1).$$

Для линии сопряжения в плоскости Oyz из (2.5) имеем $y = r \cos \varphi$. Разворачивая эту линию по дуге $S = r\varphi$, получаем развертку или лекало сопряжения цилиндра. Эти расчеты приведены в табл. 3.

На рис. 4 приводится край полного цилиндра с радиусом $r_2 = r$, построенного по табл. 3.

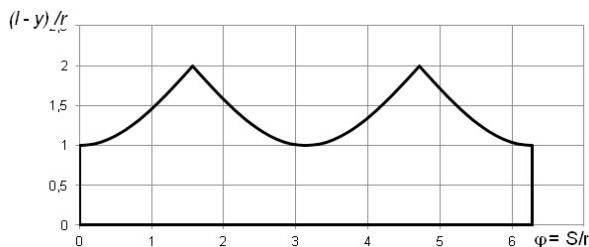


Рис. 4

На рис. 5 изображено соединение цилиндров, выполненное по лекалу рис. 4.

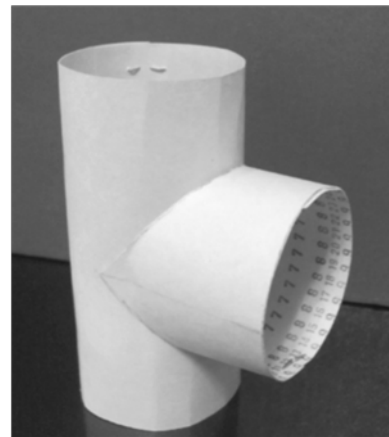


Рис. 5

3. Соединение конуса и цилиндра с параллельными осями. Найдем линию сопряжения этих поверхностей и площадь поверхности цилиндра от основания до линии сопряжения (рис. 6).

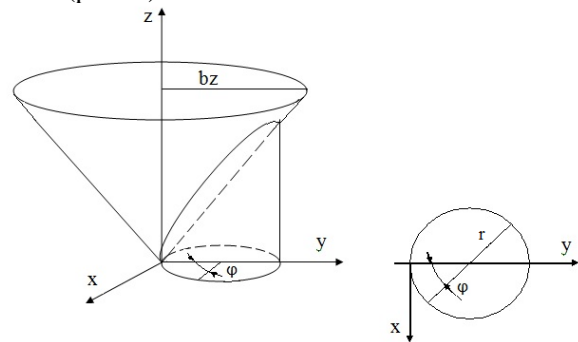


Рис. 6

Уравнения поверхностей смещенного цилиндра относительно начала координат вдоль оси Oy на величину y_0 и конуса с вершиной в начале координат $Oxyz$ (см. рис. 6) описываются уравнениями

$$\begin{aligned} x^2 + (y - y_0)^2 &= r^2, \\ x^2 + y^2 &= (bz)^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

или

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2y_0y + r^2 - y_0^2, \\ x^2 + y^2 &= (bz)^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из равенства правых частей системы (3.2) следует

$$z = \sqrt{2y_0y + r^2 - y_0^2} / b. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) определяет линию пересечения поверхностей в проекции на плоскость Oyz .

Площадь части цилиндра, который сопрягается с конусом, определяется поверхностным интегралом.

Для описания геометрии части сопряжения цилиндрической поверхности введем параметрические уравнения $x = x(\varphi, z)$, $y = y(\varphi, z)$, $z = z$. На основании рис. 6 имеем

$$x = r \sin \varphi, y = y_0 - r \cos \varphi, z = z. \quad (3.4)$$

Тогда в новой криволинейной системе координат поверхностный интеграл примет вид

$$F = 2 \int_0^\pi r d\varphi \int_0^{z_c} dz, \quad (3.5)$$

здесь верхний предел интегрирования по z определяется по формуле (3.3)

$$z_c = \sqrt{2y_0y + r^2 - y_0^2} / b.$$

Учитывая $y = y_0 - r \cos \varphi$ (3.4), имеем

$$z_c = \sqrt{r^2 + y_0^2 - 2ry_0 \cos \varphi} / b.$$

Тогда площадь поверхности цилиндра до линии сопряжения составит

$$F = (2r/b) \int_0^\pi \sqrt{r^2 + y_0^2 - 2ry_0 \cos \varphi} d\varphi. \quad (3.6)$$

Исходя из геометрии сопряжения следует ограничение $bz \geq y_0 + r$.

При $y_0 = r$ интеграл (3.6) упрощается:

$$F = (2r/b) \int_0^\pi 2r \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8r^2/b. \quad (3.7)$$

Полная площадь поверхности цилиндра равна $4\pi r^2/b$.

Следовательно, площадь сопряжения цилиндра составляет $2/\pi$ от полной площади цилиндра.

Интеграл (3.6) при $y_0 \neq r$ вычисляется одним из численных методов интегрирования. При выборе шага интегрирования и определения точности вычисления можно ориентироваться на точное решение (3.7).

Определение развертки цилиндра сопряжения (кроя или лекало). Если линию со-

пряжения цилиндра $z = \sqrt{r^2 + y_0^2 - 2ry_0 \cos \varphi} / b$ в плоскости Oyz развернуть по дуге $s = r\varphi$, то функция $z = f(s)$ и будет определять край части сопряжения цилиндра.

Пример расчета. Для случая $y_0 = r$ имеем $z = (2r/b) \sin \frac{\varphi}{2}$, $s = r\varphi$.

На рис. 7 приводится график половины поверхности цилиндра сопряжения, т.е. края или лекало части цилиндрической поверхности до линии сопряжения с конусом

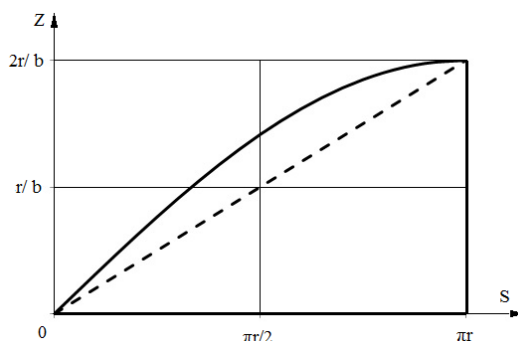


Рис. 7

Выводы. Результаты могут быть использованы в машиностроении при проектировании сопряжений криволинейных поверхностей, имеющих формы части конуса и цилиндра, и цилиндров с произвольными радиусами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Высоцкая Н.Н. и др. Технические развертки изделий из листового материала. Л. Машиностроение, 1968. С. 78–83.
2. Солнцев О.В. Способ получения разверток отрезков и отверстий в стволах тройников и крестовин: пат. RU 2346772 C2; опубл. 20.02. 2009. Бюл. № 5.

References

1. Vysotskaya N.N., Ierusalimskiy A.M., Nevelson R.A., Fedorenko V.A. Flat patterns for the components made of sheet material. Leningrad, Mashinostroenie, 1968, pp. 78–83.
2. Solntsev O.Yu. A method for producing flat patterns of branch pipes and holes in the stems of tee-joints and cross-pieces. Patent RF, no. 2346772 C2, February 20, 2009. Bulletin 5.

INTERFACE BETWEEN CONICAL AND CYLINDRICAL SURFACES

© R.Sh. Gimadiev

Kazan State Power Engineering University,
51, ulitsa Krasnoselskaya, Kazan, 420034, Russian Federation

When designing pipeline connections having the shape of a cone and a cylinder or two cylinders, it is necessary to solve the problem of interfacing their surfaces and defining the line of a curve for the connection or a flat pattern of the cylinder. The paper considers mathematical problems concerning the interface between conical and cylindrical surfaces and also between two cylindrical surfaces.

Key words: mathematical modelling, interface, pipelines, cone, cylinder, cutting, pattern.