ШИФР: М 22

Ответы на олимпиадные задания

① $\frac{1}{3}ctg^2x + \frac{12}{\cos^2 x} = 1 - 20tgx - \frac{10}{3}ctgx$ $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

$\frac{1}{3}ctg^2x + \frac{10}{3}ctgx + \frac{12}{\cos^2 x} + 20tgx - 1 = 0$

$\frac{1}{3}ctg^2x + \frac{10}{3}ctgx + 12tg^2x + 12 + 20tgx - 1 = 0$

ОДЗ

$\cos^2 x \neq 0$

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in z$

$ctg^2x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$

$ctg^2x = \frac{1}{tg^2x}$

+-

$\frac{1}{3tg^2x} + \frac{10}{3tgx} + 12tg^2x + 20tgx + 11 = 0$

$tgx \neq 0$

$x \neq \pi n$

$tgx = a$

$\frac{(1 + 10a + 12a^4 + 20a^3 + 11a^2)\cdot 3}{3a^2} = 0$

$36a^4 + 60a^3 + 33a^2 + 10a + 1 = 0$

$a = -1$

по т. Безу:

$$\begin{array}{l|l}
36a^4 + 60a^3 + 33a^2 + 10a + 1 & a+1 \\
\hline
-\;36a^4 + 36a^3 & 36a^3 + 24a^2 + 9a + 1 \\
\quad 24a^3 + 33a^2 & \\
\quad -\;24a^3 + 24a^2 & \\
\qquad 9a^2 + 10a & \\
\qquad -\;9a^2 + 9a & \\
\qquad\quad a + 1 & \\
\qquad\quad -\;a + 1 & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$(a+1)(36a^3 + 24a^2 + 9a + 1) = 0$

$a + 1 = 0$

$a = -1$

$36a^3 + 24a^2 + 9a + 1 = 0$

$(6a + 1)(6a^2 + 3a + 1) = 0$

$6a + 1 = 0$ $D = 9 - 24$

$6a = -1$ $\varnothing$

$a = -\frac{1}{6}$

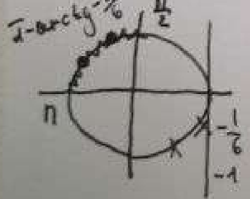
$tgx = -1$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in z$

$tgx = -\frac{1}{6}$

$x = arctg -\frac{1}{6} + \pi n$

$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$



Ответ: $135°$; $\pi - arctg - \frac{1}{6}$

④ $\log_x \frac{m+n}{3} = \frac{\log_x m + \log_x n}{2}$ если $m^2+n^2=7mn$

$\log_x \frac{m+n}{3} = \frac{\log_x mn}{2}$

$2\log_x \frac{m+n}{3} = \log_x mn$ +

$\log_x \frac{(m+n)^2}{9} = \log_x mn$ -

$\frac{(m+n)^2}{9} = mn$

$(m+n)^2 = 9mn$

$m^2+2mn+n^2 = 9mn$

$m^2+n^2 = 9mn-2mn$

$m^2+n^2 = 7mn$

③ Дано: Решение:

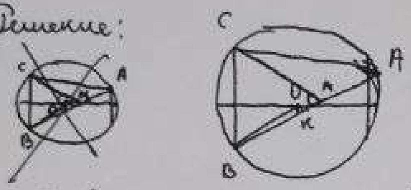
$R=4$

МБ диам

$AM:MB=2:3$

$\angle=30^\circ$

S_{ABC} - ?



т. B и C симметр. диаметру $\Rightarrow \triangle BMC$ - равнобедр.; $\angle BMC = 2\cdot 30^\circ = 60^\circ$; $AM=2x$, $BM=3x \Rightarrow$

$MB=BC=MC=3x$ $S_{MBC} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{15x^2\sqrt{3}}{4}$; K - центр центра O на хорду AB

$BK=AK=\frac{5x}{3}$; $MK=AK-AM=\frac{x}{2}$; $OK=MK\,tg\,30^\circ=\frac{x}{2\sqrt{3}}$; $OK^2+KB^2=OB^2$; $\frac{x^2}{12}+\frac{25x^2}{4}=16$; $x^2=\frac{48}{19} \Rightarrow$

$S_{ABC}=\frac{15x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{180\sqrt{3}}{19}\approx 289,3$ Ответ: $S_{ABC}\approx 269,3$ +

② $y^2-(5^x-1)(y-1)>0$

$y^2>(5^x-1)(y-1)$

$y^2>5^xy-5^x-y+1$

$y^2-5^xy+y+5^x-1>0$ +

$D=b^2-4ac=(-5^x+1)^2-4(5^x-1)=(-5^x+1)(-5^x+5)$ -

если $y=1$, то $y^2>0$ - подходит

$x=0$ - подходит.