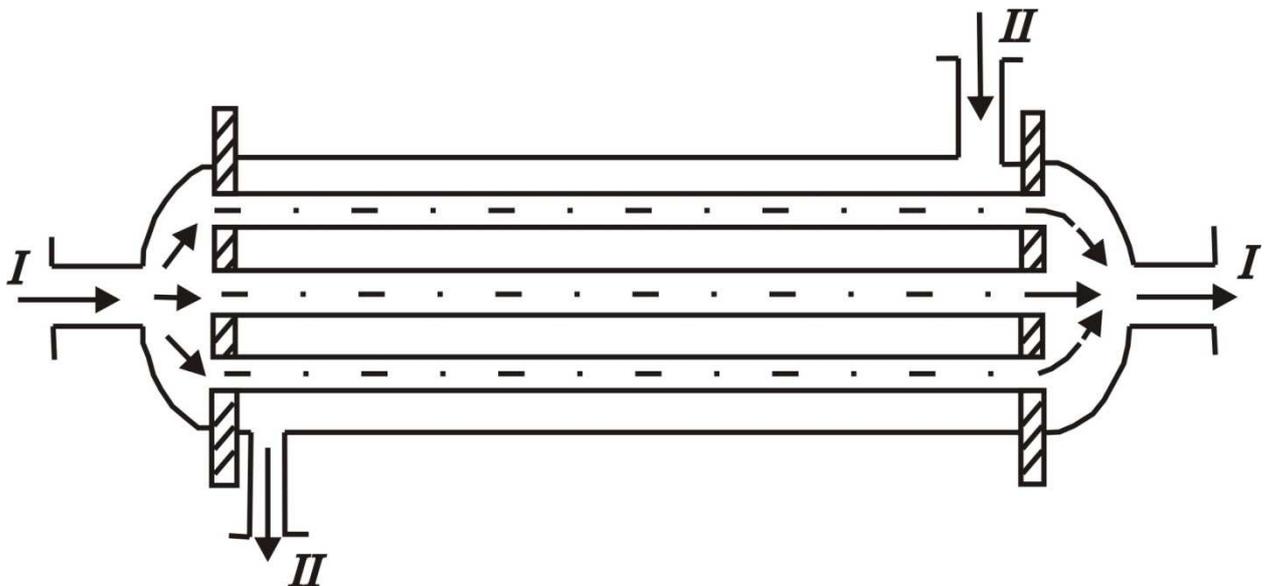


Е.А. ЛАПТЕВА, Т.М. ФАРАХОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И
РАСЧЕТ
ТЕПЛОМАССОБМЕННЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК АППАРАТОВ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Е.А. ЛАПТЕВА, Т.М. ФАРАХОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И РАСЧЕТ
ТЕПЛОМАССООБМЕННЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК АППАРАТОВ**

Учебное пособие

Под редакцией А.Г. Лаптева

«ОТЕЧЕСТВО»

КАЗАНЬ 2013

УДК 533.6+66.015.23

ББК 35.514

Л 24

Л 24 ЛАПТЕВА Е.А., ФАРАХОВ Т.М. Математические модели и расчет тепломассообменных характеристик аппаратов. Под ред. А.Г. Лаптева. – Казань: Отечество, 2013 – 182с.

В учебном пособии представлены общие сведения о теоретических основах расчета промышленных тепло и массообменных аппаратов и методах математического моделирования.

Подробно рассмотрены процессы переноса импульса, массы и тепла в ламинарных и турбулентных пограничных слоях в рабочих зонах тепло – и массообменных аппаратов. Для математического описания данных процессов использованы различные модели (Прандтля, Кармана, Ландау – Левича и др.), а так же гидродинамическая аналогия. Даны подходы к конструированию промышленных аппаратов. Представлены примеры расчета коэффициентов теплоотдачи в различных аппаратах.

Учебное пособие предназначено для аспирантов, магистров и студентов старших курсов технических вузов.

Рецензенты

Докт. физ. – мат. наук, проф. КГЭУ

Н.Д. Якимов

Докт. техн. наук, проф. КНИТУ (КХТИ)

Э.Ш. Теляков

ISBN 978-5-9222-0612-9

©Е.А. Лаптева, Т.М. Фарахов 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
Основные понятия и определения	8
Глава 1 Основные характеристики пограничного слоя	13
1.1 Понятие пограничного слоя	13
1.2 Формирование пограничного слоя	15
Глава 2 Ламинарный пограничный слой	21
2.1. Перенос импульса, массы и тепла в ламинарном пограничном слое	21
2.2. Коэффициенты переноса в однофазном потоке	29
Глава 3 Турбулентный пограничный слой	36
3.1. Основные характеристики турбулентности	36
3.2. Модель диффузионного пограничного слоя Ландау – Левича	50
Глава 4 Математические модели и расчет гидродинамических характеристик пограничного слоя	56
4.1 Определение касательного напряжения трения	56
4.2 Турбулентная вязкость	66
4.3 Коэффициенты переноса импульса	71
4.4. Расчет динамической скорости	80
4.5. Зернистые и насадочные слои	86
4.6 Аппараты с механическим перемешиванием и гидроциклоны	90
4.7. Основные уравнения для расчета гидромеханических характеристик	91
Глава 5 Расчет коэффициентов теплоотдачи	95
5.1 Формулы для расчета коэффициентов теплоотдачи	95
5.2. Пример расчета коэффициентов теплоотдачи при движении турбулентного потока вдоль плоской пластины	104

5.3	Пример расчета коэффициентов теплоотдачи и теплопередачи в теплообменнике типа «труба в трубе»	107
5.4	Пример расчета коэффициентов тепло и массоотдачи вентиляторной градирни с сетчатыми насадками	119
5.5	Пример расчета теплоотдачи в турбулентной пленке	123
Глава 6 Теоретические основы проектирования аппаратов		126
6.1.	Условия равновесия	126
6.2	Законы сохранения	127
6.3	Основы модели многоскоростного континуума	135
6.4.	Численное решение уравнений переноса	137
6.5	Обобщенные уравнения переноса субстанции	141
6.6.	Описание метода	143
6.7	Структура потоков	150
6.8	Стадии проектирования	154
6.9	Этапы проектирования	156
6.10	Проблема масштабного перехода	157
6.11	Подходы к конструированию массообменных аппаратов	160
6.12	Сопряженное физическое и математическое моделирование при проектировании аппаратов	163
Литература		167
Приложение		170

ВВЕДЕНИЕ

К явлениям переноса в промышленных аппаратах не ослабевает интерес многих исследователей, как с точки зрения развития различных теорий, так и для прикладных расчетов гидравлических и теплообменных характеристик.

Движение вязких сред практически всегда связано с явлениями переноса в пограничном слое, где локализуются сопротивления трения, тепло- и массоотдачи. Одним из первых концепцию пограничного слоя в 1904 году предложил Л. Прандтль, исходя из гипотезы о том, что сопротивление, вызванное трением и вязкостью при движении среды существенно зависит от пристеночной зоны (слоя).

Теоретические методы моделирования и исследования явлений переноса в пограничном слое условно можно классифицировать на точные, асимптотические, численные и приближенные. В связи с большим разнообразием конструкций тепло-и массообменных аппаратов и одновременно происходящих процессов переноса импульса, массы и энергии получить точные аналитические решения практически невозможно, особенно для аппаратов большого масштаба. Поэтому для математического моделирования явлений переноса и определения эффективности проводимых процессов в промышленных аппаратах чаще используются приближенные и численные методы. К приближенным методам относятся, например, однопараметрические интегральные методы в теории пограничного слоя, пленочная и пенетрационная модели, модель диффузионного пограничного слоя, методы линеаризации уравнений и др. Преимущество приближенных методов заключается в возможности получать необходимые формулы для выполнения конкретных инженерных расчетов.

Приближенное математическое описание процессов переноса в пограничном слое в первую очередь связано с моделями Прандтля и Кармана, гидродинамической аналогией Рейнольдса и Чилтона-Кальборна и далее моделью диффузионного пограничного слоя Ландау-Левича. Кроме этого важное значение имеют консервативные свойства пограничного слоя – т.е. весьма слабые зависимости некоторых характеристик осредненного течения по отношению к внешним возмущениям, на которые одними из первых обратили внимание С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьев.

Теоретическая основа рассматриваемых далее подходов заключается в использовании известных свойств консервативности законов трения к возмущающим воздействиям (например, продольному градиенту давления), т.е. структура математического описания элементарных актов переноса инвариантна к различным возмущениям и масштабу аппарата. Влияние возмущений не изменяет форму математического описания пограничного слоя, а учитывается параметрически. Определение корректирующих параметров выполняется путем удовлетворения баланса импульса.

Рассматриваются различные модели пограничного слоя для вычисления напряжения трения и других характеристик на поверхности различных обтекаемых тел при ламинарном и турбулентном режиме. Касательное напряжение трения очень важно при определении коэффициентов гидравлического сопротивления обтекаемых тел, а также при решении тепломассообменных задач с использованием различных вариантов гидродинамической аналогии.

Рассматриваются пограничные слои при движении несжимаемой вязкой жидкости с постоянными физическими свойствами применительно к задачам химической технологии и энергетике.

Широко используется понятие коэффициента переноса импульса (импульсоотдачи), которое позволяет получить в аналитическом виде расчетные формулы для коэффициента трения, толщины пограничного слоя и теплоотдачи.

Показаны пример расчета коэффициентов тепло и массоотдачи в теплообменниках и градирнях.

В последней главе учебного пособия представлены теоретические основы конструирования промышленных аппаратов, стадии и этапы проектирования.

Учебное пособие написано с использованием, как классических монографий и учебников, так и последних работ в данной области.

В главе 1 использовалась литература (основная) [1], в главе 2 использовалась литература (основная) [1], в главе 3 использовалась литература (основная) [1], в главе 4 использовалась литература (дополнительная) [1], в главе 5 использовалась литература (основная) [2] и дополнительная [4], в главе 6 использовалась литература (основная) [3,5].

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Моделирование- изучение закономерностей процессов на моделях при условиях, допускающих распространение полученных результатов на все процессы, подобные изученному, независимо от масштаба аппарата.

В широком смысле под моделированием понимают метод исследования, при котором вместо непосредственного интересующего нас процесса или явления, протекающего в каком-то объекте, изучается соответствующий процесс на другом объекте.

Отношение силы к поверхности соприкосновения слоев обозначают через τ и называют **напряжением внутреннего трения**, а так же **напряжением сдвига или касательным напряжением** (локальным потоком импульса).

Локальный поток импульса - количества движения прямо пропорционально градиенту скорости и вязкости.

Движущей силой при течении жидкостей является **разность давлений**.

Критерий Re является мерой соотношения между силами вязкости и инерции в движущемся потоке.

Турбулентная вязкость, в отличие от обычной вязкости, не является физико-химической константой, определяемой природой жидкости, ее температурой и давлением. Турбулентная вязкость зависит от скорости жидкости и других параметров, обуславливающих степень турбулентности потока.

Перенос энергии в форме тепла, происходящий между телами, имеющими различную температуру, **называется теплообменом**.

Теплопередача - количество тепла передаваемое от более нагретого к более холодному теплоносителю, пропорционально

поверхности теплообмена F , среднему температурному напору Δt_{cp} и времени τ .

Коэффициент теплопередачи показывает, какое количество тепла (Дж) переходит в 1 сек от более нагретого к более холодному теплоносителю через поверхность теплообмена 1 м^2 при средней разности температур между теплоносителями равной 1 град.

Закон Фурье, согласно которому количество тепла dQ передаваемое посредством теплопроводности через элемент поверхности dF , перпендикулярный тепловому потоку, за время dt прямо пропорционально температурному градиенту $\frac{\partial t}{\partial n}$ поверхности dF и времени dt .

Коэффициент теплоотдачи - величина α характеризует интенсивность переноса тепла между поверхностью тела, например, твердой стенки и окружающей средой.

Процессы массопередачи характеризуются переходом одного или нескольких веществ из одной фазы в другую.

Перенос вещества внутри фазы может происходить путем молекулярной диффузии, либо путем конвекции и молекулярной диффузии.

Конвективный перенос вещества, осуществляемый под действием турбулентных пульсаций, часто **называется турбулентной диффузией**.

Коэффициенты массоотдачи β показывают, какое количество вещества переходит от поверхности раздела фаз в ядро фазы через единицу поверхности в единицу времени при движущейся силе, равной единице.

Условные обозначения

a – коэффициент температуропроводности, м²/с; удельная поверхность м²/м³;

a_T – коэффициент турбулентной температуропроводности, м²/с;

a_V – удельная поверхность насадки, м²/м³;

C – концентрация целевого компонента;

c_p – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К);

D, D_T – коэффициенты молекулярной и турбулентной диффузии, м²/с;

D_k – диаметр колонны, м;

d – диаметр контактного элемента, трубы, дисперсной частицы, м;

d_0 – диаметр отверстия, м;

d_3 – эквивалентный диаметр насадки, канала, м;

E_m – эффективность по Мерффри;

F – площадь межфазной поверхности пленки, площадь пластины, трубы, м²;

G – массовый расход газа (пара), кг/с;

H – длина контактного элемента, м; энтальпия, Дж/кг;

K_t – коэффициент теплопередачи, Вт/(м²·К), м/с;

L – массовый расход жидкости, кг/с; длина (характерный размер), м;

l – масштаб явлений, характерный размер, м;

P – давление, Па;

$Q_{ж}$ – расход жидкости в насадочной колонне, м³/(м² час); на тарелке, м³/(м·с);

q – плотность теплового потока, Дж/(м²·с) или (Вт/ м²); удельный расход жидкости в пленке, м³/(м·с);

R – радиус контактного устройства, дисперсной частицы, м;

R_3 – эквивалентный радиус отверстия, м;

r – удельная теплота парообразования, Дж/кг; поперечная координата, м;

r_p, r_x, r_t – источники импульса, массы, теплоты;

T – температура потока, °С;

t – время, с;

u, v – продольная и поперечная составляющие вектора осредненной скорости, м/с;

u_* – динамическая скорость, $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$, м/с;

U, U_{∞} – скорость потока, м/с;
 V_{∞} – скорость движения дисперсного элемента, м/с;
 V – объем, м³; скорость, м/с;
 W_K – средняя скорость газа в колонне, м/с;
 W_{Γ} – средняя скорость газа в орошаемой трубке, м/с;
 x, y, z – продольная, поперечная и вертикальная координаты, м;
 α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К); угол;
 (αa) – объемный коэффициент теплоотдачи, с⁻¹;
 $\Delta U, \Delta W$ – градиент скорости, м;
 ΔP – перепад давления, Па;
 δ – толщина пограничного слоя, м;
 δ_1 – толщина вязкого подслоя, м;
 δ_0 – средняя толщина пленки жидкости, м;
 δ_{ij} – символ Кронекера;
 ε – диссипация энергии, Вт/м³ или м²/с³;
 $\varepsilon_{св}$ – удельный свободный объем насадки;
 $y^+ = u_* y / \nu$ – безразмерная координата в пограничном слое;
 θ – угол движения пленки;
 λ – удельная теплопроводность, Вт/(м·К);
 μ – динамическая вязкость, Па·с;
 ν, ν_{Γ} – коэффициенты молекулярной и турбулентной вязкости, м²/с;
 ξ – коэффициент гидравлического сопротивления;
 φ – объемная доля дисперсной фазы;
 ρ – плотность фазы, кг/м³;
 σ – поверхностное натяжение, Н/м;
 τ – касательное напряжение, Па.

Комплексы

$C_f = 2\tau / (\rho U_{\infty}^2)$ – коэффициент трения;

$Re = U_{\infty} l / a$ – число Пекле;

$Re_{\Gamma} = U_{\infty} l / D_{\Gamma}$ – турбулентное число Пекле;

$Nu = \alpha l / \lambda$ – число Нуссельта;

$Sh = \beta l / D$ – число Шервуда;

$We = \rho U_{\infty}^2 l / \sigma$ – число Вебера;

$Fr = U_{\infty}^2 / (gl)$ – число Фруда;

$Re = U_{\infty} l / \nu$ – число Рейнольдса;

$R_1 = u_* \delta_1 / \nu$ – безразмерная толщина вязкого подслоя;

St – число Стантона;

$Sc = \nu / D$ – число Шмидта;

$Pr = \nu / a$ – число Прандтля;

$[Sc] = \nu [D]^{-1}$ – квадратная матрица чисел Шмидта;

$Ga = gd_{\text{ж}}^3 / \nu_{\text{ж}}$ – число Галилея.

Нижние индексы

D – дисперсная фаза;

$G, \text{г}$ – газовая фаза;

$x, \text{ж}$ – жидкая фаза;

gr – значение параметров на границе раздела фаз;

c – сплошная фаза;

st – значение параметров на стенке;

n, k – значение параметров на входе и на выходе;

∞ – значение параметров в ядре потока;

ij – строка столбец матрицы.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

1.1. Понятие пограничного слоя

В рабочей зоне массотеплообменного аппарата одной из важных характерных областей является пограничный слой жидкости и газа (пара), от достоверности математического описания которого зависит точность расчета диффузионных и тепловых потоков, необходимых для вычислений эффективности контактных устройств. Пограничный слой характеризуется большими поперечными градиентами скорости, концентрации и температуры и формируется на поверхности раздела при различных скоростях движения сплошной и дисперсной фаз. В этом случае различают пограничный слой в сплошной фазе (внешний) и в дисперсной фазе (внутренний). Кроме того, пограничный слой образуется на элементах конструкции аппарата (на стенках, перегородках и т.д.) при обтекании их потоками жидкости или газа.

Классическим примером пограничного слоя является пограничный слой, который образуется на плоской пластине при обтекании ее поверхности жидкостью и пограничный слой в круглых трубах. Большинство экспериментальных данных различных зарубежных и отечественных исследователей получено именно для этих условий. Более сложным для исследования и математического описания является пограничный слой на поверхностях с различной кривизной (обтекание цилиндра, сферы и других тел). Такой пограничный слой характеризуется большим градиентом давления и точкой отрыва, за которой производная и скорость потока меняют

знаки. Также значительно сложны и труднодоступны пограничные слои на поверхности раздела двухфазных и многофазных сред.

При расчете массо- и теплообменных аппаратов необходимо определение количества переданной массы M целевого компонента из одной фазы в другую, а также количества переданного тепла Q :

$$M = K_{ox} \overline{\Delta x} F \theta = K_{oy} \overline{\Delta y} F \theta, \quad (1.1.1)$$

$$Q = K_t \overline{\Delta T} F \theta, \quad (1.1.2)$$

где $\overline{\Delta x}$ и $\overline{\Delta y}$ – средние движущие силы процессов массопередачи, выраженные через концентрации фаз x и y ; $\overline{\Delta T}$ – средняя движущая сила процесса теплопередачи; F – площадь межфазной поверхности, m^2 ; θ – время, с.

Коэффициенты пропорциональности K_{ox} , K_{oy} , и K_t называются коэффициентами массо- и теплопередачи и характеризуют скорость переноса массы и тепла между фазами. Эти коэффициенты зависят от гидродинамических режимов движения потоков, состояния межфазной поверхности и физических свойств среды.

Коэффициенты массопередачи определяются из уравнений аддитивности фазовых сопротивлений в зависимости от способа выражения движущей силы

$$\frac{1}{K_{ox}} = \frac{1}{\beta_x} + \frac{1}{m\beta_y}; \quad \frac{1}{K_{oy}} = \frac{m}{\beta_x} + \frac{1}{\beta_y}, \quad (1.1.3)$$

где m – коэффициент распределения, представляющий собой тангенс угла наклона касательной к линии равновесия; β_x, β_y – коэффициенты массоотдачи в фазах x и y , кг/(м²с (ед. дв. с.)).

При движении теплоносителей вдоль плоской стенки коэффициент теплопередачи в выражении (1.1.2) вычисляется по следующему выражению:

$$\frac{1}{K_t} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_{ст}}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}, \quad (1.1.4)$$

где $\delta_{ст}$ – толщина стенки, м; λ – коэффициент теплопроводности материала стенки, Вт/(мК); α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи от первого и второго теплоносителей, Вт/(м²град).

В большинстве случаев коэффициенты массо- и теплоотдачи зависят от скорости переноса массы и тепла в тонком пограничном слое, который образуется на межфазной поверхности при обтекании тел потоками жидкости или газа. Поэтому математическое описание процессов переноса в пограничном слое имеет большое значение при проектировании массо- и теплообменных аппаратов.

1.2. Формирование пограничного слоя

При движении среды (жидкости, газа или пара) около твердого тела происходит прилипание ее частиц к поверхности. Скорость среды на поверхности равна нулю. Вследствие трения соседние слои движущейся среды затормаживаются, поэтому ее скорость в зоне течения, непосредственно прилегающей к твердому телу, изменяется от

нуля на межфазной поверхности до значения скорости в ядре потока на внешней границе указанной зоны. Эта зона носит название *гидродинамического* пограничного слоя. Чем меньше вязкость среды, тем тоньше гидродинамический пограничный слой и большее значение в этом слое имеет градиент скорости. Вне пограничного слоя градиент скорости невелик. Следовательно, силы трения здесь малы, и ими обычно пренебрегают. Значение пограничного слоя очень велико, так как он определяет гидродинамическое сопротивление при движении среды относительно твердого тела, а также сопротивление переносу массы и тепла.

Между внешним потоком и пограничным слоем резкой границы нет, поскольку средняя скорость жидкости по сечению потока изменяется монотонно, без скачков. Обычно толщину пограничного слоя определяют условно, исходя из того, что на его внешней границе скорость составляет 99 % от скорости внешнего потока. Толщина гидродинамического пограничного слоя δ зависит от скорости движения среды U_∞ , ее вязкости ν и значения продольной координаты Ox :

$$\delta = \text{const} \left(\frac{x\nu}{U_\infty} \right)^b. \quad (1.2.1)$$

Пограничный слой образуется как в ламинарных, так и в турбулентных потоках, но структура этих пограничных слоев различна. При обтекании твердого тела ламинарным потоком жидкости (газа) с постоянной по сечению скоростью, тормозящее действие обтекаемой поверхности проявляется в начале в тонком пристенном слое. По мере удаления от входной кромки жидкости увеличивается толщина слоя, в

котором из-за торможения жидкости стенкой проявляется действие сил вязкого трения. В результате по мере удаления от входа толщина ламинарного пограничного слоя непрерывно возрастает (рис. 1.1) и на достаточном удалении от входной кромки действие сил вязкого трения распространяется на весь поток.

При контакте турбулентного потока с обтекаемой поверхностью (рис. 1.2) на передней кромке пластины образуется ламинарный пограничный слой, подобный рассмотренному выше. По достижении некоторого критического размера ламинарное движение в пограничном слое становится неустойчивым (точка А) и развивается турбулентность. В переходной зоне, ограниченной точками А и В, турбулентность распространяется на всю толщину пограничного слоя 1, за исключением тонкого слоя вблизи стенки, называемого вязким подслоем 2.

В вязком подслое имеет место струйное течение, которое подвергается интенсивным внешним возмущениям, вызванным проникновением турбулентных пульсаций из ядра потока.

Важной характеристикой пограничного слоя является касательное напряжение τ , которое также называют напряжением внутреннего трения, напряжением сдвига и локальным потоком импульса.

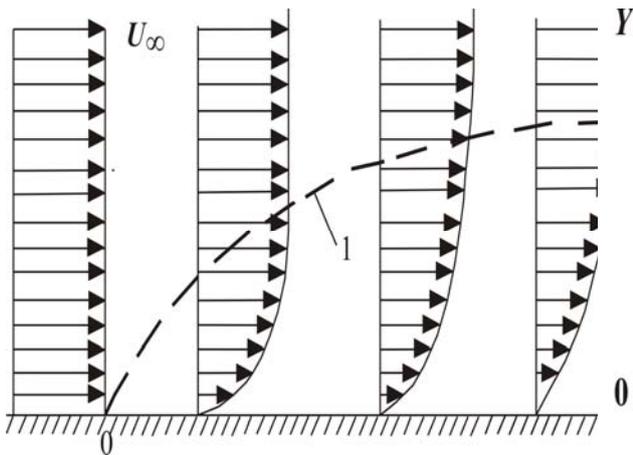


Рис. 1.1. Формирование ламинарного пограничного слоя на плоской пластине:
1 – граница пограничного слоя

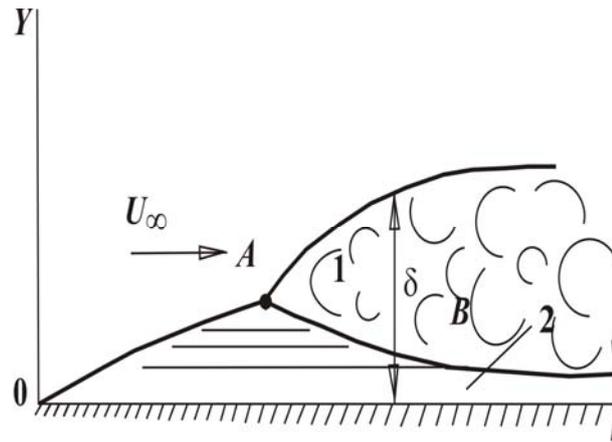


Рис. 1.2. Формирование турбулентного пограничного слоя на плоской пластине:
1 – турбулентный пограничный слой; 2 – вязкий подслой

При движении жидкости касательная сила P_y , которую надо приложить для сдвига, тем больше, чем больше градиент скорости $\partial U / \partial y$. Сила P_y также пропорциональна площади контакта F

$$P_y = \mu F \frac{\partial U}{\partial y} = \rho \nu F \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (1.2.2)$$

где μ – коэффициент динамической вязкости Па·с; $\nu = \mu / \rho$ – коэффициент кинематической вязкости, м²/с.

Отношение силы P_y к поверхности контакта F есть касательное напряжение

$$\tau = -\rho \nu \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (1.2.3)$$

Выражение (1.7) часто называют законом внутреннего трения Ньютона.

В расчетах тепло- и массообменных процессов роль касательного напряжения τ очень велика, так как между процессами переноса импульса, массы и тепла часто существует аналогия.

Аналогично образованию гидродинамического пограничного слоя формируется *диффузионный* и *тепловой* пограничные слои. Эти слои имеют также область 1, в которой преобладает турбулентный механизм переноса и тонкие области у стенки (аналогично 2), где более значительную роль начинают играть молекулярная диффузия и теплопроводность. Толщина этих областей далеко не всегда совпадает с толщиной вязкого подслоя 2. Это связано с тем, что если профиль скоростей определяется кинематической вязкостью ν , то на профиль концентрации влияет коэффициент молекулярной диффузии D , а на профиль температур – коэффициент температуропроводности a . Отношение $Sc = \nu/D$ называется диффузионным числом Шмидта, а $Pr = \nu/a$ – тепловым числом Прандтля. Числа Шмидта и Прандтля являются не просто отношением физических величин, а имеют глубокий смысл.

Например, для газов число Шмидта составляет порядка единицы ($Sc \approx 1$), а для жидкостей $Sc \approx 10^2 - 10^3$. Отсюда следует, что профили скоростей и концентраций в однофазном газовом потоке будут примерно подобны, а в жидкости влияние вязкости сказывается сильнее, чем молекулярной диффузии, и профили будут различны.

Теоретическую основу описания процессов переноса в пограничном слое составляют фундаментальные законы сохранения и равновесия, одним из свойств которых является их инвариантность к масштабу и к взаимодействию с другими явлениями, т.е. структура математического описания пограничного слоя слабо зависит от размера аппарата (контактного устройства). Влияние характерного размера

контактного устройства и влияние явлений других масштабов в математическом описании учитывается параметрически, например, за счет изменения величины динамической скорости и толщины пограничного слоя. Это дает возможность рассматривать процессы переноса в пограничном слое независимо от размера аппарата. Кроме того, в большинстве случаев толщина пограничного слоя на межфазной поверхности значительно меньше линейного размера дисперсного элемента (пузыря, струи, капли), поэтому часто с достаточной точностью используется модель плоского пограничного слоя в декартовой системе координат.

Контрольные вопросы.

1. Что такое пограничный слой?
2. Определение касательного напряжения.
3. Как различают пограничный слой?
4. Запишите уравнение теплопередачи.

ГЛАВА 2

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

2.1. Перенос импульса, массы и тепла в ламинарном пограничном слое

Пограничный слой образуется как в ламинарных, так и в турбулентных потоках, но структура этих слоев различна. Толщину ламинарного пограничного слоя δ оценивают, исходя из того, что в пределах этого слоя инерционная сила и сила вязкого трения имеют один порядок. Как правило, пограничный слой тем тоньше, чем вязкость меньше. Установлено, что на основе решения уравнений Навье – Стокса толщина пограничного слоя пропорциональна квадратному корню из кинематической вязкости

$$\delta \sim \sqrt{\nu}, \quad (2.1.1)$$

или в более общей формулировке

$$\frac{\delta}{L} \approx \frac{b}{\sqrt{\text{Re}_L}}, \quad (2.1.2)$$

где b – коэффициент пропорциональности; $\text{Re}_L = U_\infty L / \nu$ – число Рейнольдса; U_∞ – скорость в ядре потока, м/с; L – характерный размер обтекаемого тела, м; $\nu = \mu / \rho$, м²/с.

При записи уравнений Навье – Стокса обычно принимается, что толщина пограничного слоя значительно меньше характерного размера тела, т.е. $\delta \ll L$. Это допущение позволяет рассматривать двумерную

плоскую задачу. В результате система уравнений Навье – Стокса записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2.1.4)$$

с уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.1.5)$$

Пограничные условия имеют вид: при $y=0$, $u=v=0$ (условия прилипания к стенке), при $y=\delta$, $u=U_\infty$ (в ядре потока).

В теории и практике научных исследований широко применяется подход оценки членов математического описания для упрощения уравнений.

На основе выше сделанного предположения ($\delta \ll L$) величина безразмерной величины пограничного слоя (2.1.2) $\delta/L \ll 1$. Если поток движется в направлении оси OX , то в пограничном слое $v \ll u$ и $\partial u / \partial y \gg \partial u / \partial x$. Поэтому члены в левой части уравнения (2.1.3) одного порядка. Кроме того, величина $\partial^2 u / \partial x^2 \ll \partial^2 u / \partial y^2$, а $\partial P / \partial y = 0$, т.е. давление по толщине пограничного слоя постоянно. Итак, после выполненных сокращений из двух уравнений Навье – Стокса можно

оставить только одно, а связь между неизвестными величинами u и v выразить, используя уравнение неразрывности (2.1.5).

В итоге система уравнений (2.1.3) – (2.1.5) преобразуется к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.1.7)$$

При обтекании поверхностей с числами Пекле $Re_T = U_\infty L / a \gg 1$ и $Re_D = U_\infty L / D \gg 1$, кроме скоростного пограничного слоя, образуются температурные (тепловые) и концентрационные (диффузионные) пограничные слои. Дифференциальные уравнения для этих слоев имеют вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (2.1.8)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \quad (2.1.9)$$

где T, C – температура и концентрация; a, D – коэффициенты молекулярной теплопроводности и диффузии, m^2/s .

В качестве граничных условий к системе уравнений (2.1.6) – (2.1.9) используют:

$$u = U_{\infty}; T = T_{\infty}; C = C_{\infty}, \text{ при } y = \delta;$$

$$v = u = 0; T = T_{\text{ст}}; C = C_{\text{ст}}, \text{ при } y = 0.$$

Целью интегрирования уравнений пограничного слоя является получение распределения скоростей (профиля скорости). Знание профиля скорости дает возможность вычислить сопротивление, которое возникает вследствие трения движущейся среды о поверхность тела, и, кроме того, решить уравнения (2.1.8) и (2.1.9).

Профиль скорости записывается в виде

$$\frac{u}{U_{\infty}} = \phi\left(\frac{y}{\delta}\right).$$

Карман и Польгаузен предложили функцию в виде полинома четвертой степени:

$$\frac{u}{U_{\infty}} = \frac{12 + \alpha}{6} \frac{y}{\delta} - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{4 - \alpha}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \frac{6 - \alpha}{6} \left(\frac{y}{\delta}\right)^4, \quad (2.1.10)$$

где $\alpha = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_{\infty}}{dx}$, для плоских поверхностей и поверхностей малой кривизны $\alpha = 0$.

Известный профиль скорости позволяет вычислить сопротивление трения. Для этого следует проинтегрировать касательное напряжение τ на стенке по всей поверхности тела. Касательное напряжение на стенке равно:

$$\tau_{\text{CT}} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (2.1.11)$$

Соппротивление трения на поверхности пластины равно:

$$W = b \int_{x=0}^L \tau_{\text{CT}} dx, \quad (2.1.12)$$

где b – ширина, L – длина пластины, м.

Из теоремы импульсов для безградиентного пограничного слоя для пластины, смоченной с одной стороны, известно выражение

$$W = b \int_0^x \tau_{\text{CT}}(x) = b\rho \int_0^{\delta(x)} u(U_\infty - u) dy. \quad (2.1.13)$$

Отсюда следует интегральное уравнение пограничного слоя:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u(U_\infty - u) dy = \tau_{\text{CT}} / \rho, \quad (2.1.14)$$

или с учетом градиента давления:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u(U_\infty - u) dy + \frac{dU_\infty}{dx} \int_0^{\delta} (U_\infty - u) dy = \tau_{\text{CT}} / \rho. \quad (2.1.15)$$

Безразмерное касательное напряжение (коэффициент сопротивления трения C_f) записывается в виде

$$\frac{C_{f_x}}{2} = \frac{\tau_{ст}(x)}{\rho U_\infty^2} = 0,332 \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}} = \frac{0,332}{\sqrt{Re_x}}. \quad (2.1.16)$$

Отсюда следует закон Блазиуса для полного сопротивления трения продольно обтекаемой пластины:

$$C_{f_L} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}}. \quad (2.1.17)$$

Выражение (2.1.17) применимо только для области ламинарного течения, т.е. чисел Рейнольдса

$$Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} < 5 \cdot 10^5 \div 10^6.$$

В области турбулентного течения ($Re_L > 10^6$) сопротивление пластин значительно возрастает.

При очень малых числах Re в выражении (2.1.17) используется дополнительный член:

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}} + \frac{2,326}{Re_L}. \quad (2.1.18)$$

Толщина пограничного слоя не может быть определена точно, так как влияние трения в пограничном слое уменьшается по мере удаления от стенки асимптотически, т.е. составляющая скорости $u(y)$ приближается к U_∞ . Чаще всего за условную толщину δ принимают расстояние от стенки, на которой скорость $u = 0,99U_\infty$. Тогда

приближенно значение коэффициента пропорциональности в выражении (2.1.2) $b \approx 5,0$.

В теории пограничного слоя также используются понятия толщины вытеснения и толщины потери импульса.

Под толщиной вытеснения понимается то расстояние, на котором потенциальное течение оттесняется наружу вследствие уменьшения скорости в пограничном слое:

$$\delta^* = \frac{\int_0^{\delta} (U_{\infty} - u) dy}{U_{\infty}} = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}} \right) dy, \quad (2.1.19)$$

или

$$\delta^* = 1,721 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}. \quad (2.1.20)$$

Толщина потери импульса записывается в виде

$$\delta^{**} = \frac{\int_0^{\delta} u(U_{\infty} - u) dy}{U_{\infty}^2} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}} \right) dy, \quad (2.1.21)$$

или

$$\delta^{**} = 0,664 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}. \quad (2.1.22)$$

Интегральное уравнение пограничного слоя (2.1.15) можно получить, сложив почленно уравнение движения (2.1.6) с уравнением неразрывности (2.1.7), умноженным на $(u - U_\infty)$, а затем прибавить и вычесть $u \partial U_\infty / \partial x$ в правой части полученного соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x} [u(u - U_\infty)] + u \frac{\partial U_\infty}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} [v(u - U_\infty)] = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (2.1.23)$$

После интегрирования в пределах пограничного слоя от 0 до δ с учетом граничных условий следует

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u(U_\infty - u) dy + \frac{dU_\infty}{dx} \int_0^\delta (U_\infty - u) dy = \tau_{CT} / \rho. \quad (2.1.24)$$

Для пограничных слоев с умеренным градиентом давления данное выражение запишется в виде

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u(U_\infty - u) dy = \tau_{ГР} / \rho. \quad (2.1.25)$$

Аналогичные выражения следуют для пограничного слоя с тепло- и массообменом

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u(T_\infty - T) dy = q_{ГР} / \rho c_p, \quad (2.1.26)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u(C_{\infty} - C) dy = j_{\text{Гр}}, \quad (2.1.27)$$

где $q_{\text{Гр}}$, $j_{\text{Гр}}$ – плотности потоков теплоты и массы.

Следует отметить, что вышеприведенные зависимости представляют собой характеристики ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости (газа). Газ можно считать несжимаемым, если $0,5 \text{ Ma}^2 \ll 1$, где число Маха – $\text{Ma} = U_{\infty} / a$, a – скорость звука, т.е. для воздуха при атмосферном давлении это примерно $U_{\infty} \leq 100 \text{ м/с}$ (при скорости звука $a = 330 \text{ м/с}$). Таким образом, даже при относительно больших скоростях движения газ можно рассматривать как несжимаемую жидкость, т.е. практически при всех режимах работы тепло- и массообменных аппаратов.

2.2. Коэффициенты переноса в однофазном потоке

Пусть стационарный однофазный ламинарный поток с постоянными физическими свойствами обтекает плоскую пластину. На пластине существует ламинарный пограничный слой, скорость жидкости в котором изменяется от нулевого значения на поверхности (условие прилипания) до скорости внешнего потока U_{∞} . С поверхности пластины происходит диффузия вещества, однако интенсивность диффузии такова, что пластину можно считать непроницаемой. Кроме того, пластина и жидкость имеют различную температуру, т.е. происходит процесс теплообмена.

В результате точного решения уравнений ламинарного пограничного слоя для расчета коэффициентов массо- и теплоотдачи и коэффициента трения получены формулы

$$\text{Sh}_x = 0,332\sqrt{\text{Re}_x} \text{Sc}^{\frac{1}{3}}, \quad (2.2.1)$$

$$\text{Nu}_x = 0,332\sqrt{\text{Re}_x} \text{Pr}^{\frac{1}{3}},$$

$$C_{fx} = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad \text{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu}, \quad (2.2.2)$$

где Sh_x , Nu_x – критерии Шервуда и Нуссельта; Sc , Pr – числа Шмидта и Прандтля.

Отсюда установим связь между коэффициентами массо- и теплоотдачи и коэффициентом трения

$$\frac{\text{Sh}_x}{\text{Re}_x \text{Sc}} = \frac{0,332}{\text{Sc}^{\frac{2}{3}} \sqrt{\text{Re}_x}} = \text{St}_D, \quad \frac{\text{Nu}_x}{\text{Re}_x \text{Pr}} = \frac{0,332}{\text{Pr}^{\frac{2}{3}} \sqrt{\text{Re}_x}} = \text{St}_T. \quad (2.2.3)$$

Из уравнений (2.2.2), (2.2.3) имеем

$$\text{St}_T = \frac{q}{U_\infty \rho c_p (T_\infty - T_{\text{гр}})} = \frac{C_f}{2 \text{Pr}^{\frac{m-1}{m}}}, \quad \text{St}_D = \frac{j}{\rho (C_\infty - C_{\text{гр}}) U_\infty} = \frac{C_f}{2 \text{Sc}^{\frac{m-1}{m}}}, \quad (2.2.4)$$

где для пластины $m=3$; St – числа Стантона.

Из соотношений (2.2.4) следует подобие процессов переноса импульса, массы и тепла, которое получило название гидродинамической аналогии и широко используется при расчетах массо- и теплообменных процессов (аналогия Рейнольдса, аналогия Чилтона – Кольборна и др.). Аналогичные соотношения также устанавливаются и для турбулентного пограничного слоя на пластине, если использовать уравнения $Nu = 0,037 Re^{0,8} Pr^{1/3}$, $C_f = 0,074 Re^{-0,2}$.

В числах Стантона отношения потоков к движущей силе есть коэффициенты теплоотдачи α и массоотдачи β .

Аналогично определяется коэффициент скорости переноса импульса

$$\frac{\tau_{ст}}{\rho U_{\infty}} = \gamma.$$

Связь между коэффициентами переноса γ , α и β на основе соотношений (2.2.4) получится в виде

$$\gamma = \beta Sc^{\frac{m-1}{m}} = \alpha Pr^{\frac{m-1}{m}} (\rho c_p)^{-1}. \quad (2.2.5)$$

Размерность γ и β – м/с, а α – Вт/(м²·°С), c_p – Дж/(кг·°С).

Примем известное допущение Прандтля о том, что потоки импульса, массы и теплоты поперек пограничного слоя имеют постоянные значения. Действительно, профиль продольной скорости в ламинарном пограничном слое – плавная кривая, близкая к прямой при

малых абсциссах и асимптотически переходящая в горизонтальную прямую при $U/U_\infty = 1$. Поэтому можно записать поток импульса в виде

$$\tau \approx \nu \rho \frac{U_\infty}{\delta_1}, \quad (2.2.6)$$

где δ_1 – толщина пограничного слоя с профилем скорости, аппроксимированным прямой, м.

Используя коэффициент трения $C_f = 2\tau/\rho U_\infty^2$ из выражения (2.2.6), получим

$$\delta_1 = \frac{2\nu}{C_f U_\infty}. \quad (2.2.7)$$

Локальный коэффициент трения на пластине определяется по уравнению (2.2.2).

Тогда из выражений (2.2.2), (2.2.7) найдем

$$\delta_1 = \frac{2}{0,664} \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \approx 3 \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (2.2.8)$$

В результате получили так называемую приведенную толщину ламинарного пограничного слоя, которая определяется точкой пересечения касательной к профилю скорости при $y=0$ и линии $U = U_\infty$.

В пределах приведенной толщины пограничного слоя параболический профиль скорости аппроксимируется с погрешностью $\pm 5\%$ (рис. 2.1), а значение безразмерной скорости $U/U_\infty \approx 0,9$.

Следовательно, допущение о постоянстве потока импульса поперек ламинарного пограничного слоя справедливо с погрешностью около 10 – 15 %, что находится в пределах погрешности экспериментальных исследований тепломассообмена в двухфазных системах.

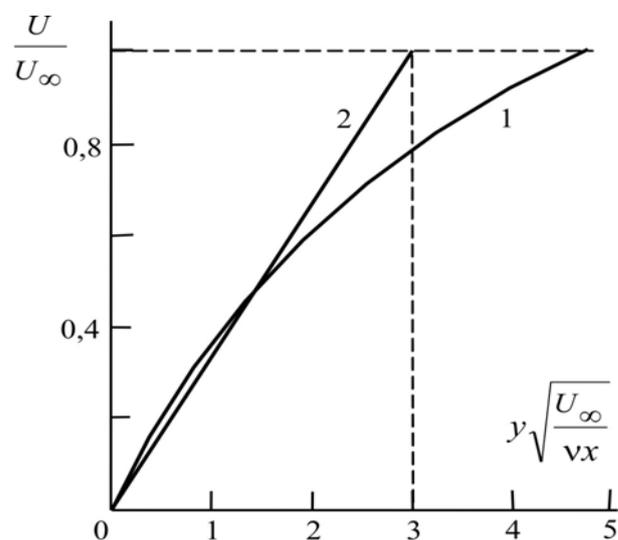


Рис. 2.1. Аппроксимация профиля скорости:
 1 – параболическое распределение;
 2 – аппроксимация профиля скорости в пределах приведенной толщины пограничного слоя.

В пределах данной погрешности потоки импульса, массы и теплоты можно представить в следующей форме:

$$\tau = \nu \rho \frac{U_{\infty}}{\delta_1} = \gamma \rho U_{\infty}, \quad (2.2.9)$$

$$j = D \frac{\Delta C}{\delta_D} = \beta (C_{\infty} - C_{\text{гр}}), \quad (2.2.10)$$

$$q = \rho c_p a \frac{\Delta T}{\delta_T} = \alpha (T_{\infty} - T_{\text{гр}}), \quad (2.2.11)$$

где $\delta_1, \delta_D, \delta_T$ – значения скоростного, диффузионного и теплового подслоя с линейным распределением соответствующих полей в пределах принятой погрешности.

Применяя гидродинамическую аналогию (2.2.5), из выражений (2.2.9) – (2.2.11) следуют известные соотношения

$$\delta_D = \frac{\delta_1}{Sc^m}, \quad \delta_T = \frac{\delta_1}{Pr^m}, \quad (2.2.12)$$

которые для ламинарного пограничного слоя на пластине при $m=3$ справедливы с точностью $\pm 2\%$.

Из уравнений (2.1.10) – (2.1.12) можно записать выражения для коэффициентов массо – и теплоотдачи

$$\beta = \frac{v}{\delta_1 Sc^m}, \quad (2.2.13)$$

$$\alpha = \rho c_p \frac{v}{\delta_1 Pr^m}. \quad (2.2.14)$$

Подставляя в данные выражения значение δ_1 (2.2.8), получим известные уравнения (2.2.1) для определения локальных коэффициентов массо – и теплоотдачи на пластине ($m=3$):

$$\beta_x = 0,332 \sqrt{\frac{vU_\infty}{x}} Sc^{-\frac{m-1}{m}}, \quad (2.2.15)$$

$$\alpha_x = 0,332 \rho c_p \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} \text{Pr}^{-\frac{m-1}{m}} \quad (2.2.16)$$

или в критериальной форме:

$$\text{Sh}_x = 0,332 \text{Re}_x^{0,5} \text{Sc}^{0,33},$$

$$\text{Nu}_x = 0,332 \text{Re}_x^{0,5} \text{Pr}^{0,33}.$$

Контрольные вопросы

1. Запишите уравнение уравнений Навье – Стокса.
2. Сущность гидродинамической аналогии.
3. Запишите уравнение безразмерного касательного напряжения.
4. Запишите уравнения для коэффициентов тепло и массоотдачи.

ГЛАВА 3

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

3.1. Основные характеристики турбулентности

Ламинарное течение, как показывает опыт, устойчиво только при некоторых условиях, определяемых значением критического числа Рейнольдса. Так, например, для трубы при $Re > 2320$ ламинарное течение становится неустойчивым и переходит в турбулентное. Этот переход связан с возникновением в потоке незатухающих возмущений. Значение критического числа Рейнольдса существенно зависит от условий входа потока в трубу. Явление изменения характера течения при повышении скорости потока или уменьшения вязкости впервые было установлено в опытах Хагена (1839 г.). Однако закон перехода от ламинарного течения в турбулентное был сформулирован Рейнольдсом значительно позднее, в 1883 г. Им же было введено понятие об осредненном и пульсационном движении. Течение в пограничном слое так-же может быть либо ламинарным, либо турбулентным. При турбулентном течении скорость, давление и температура не остаются постоянными во времени, а очень часто и неравномерно изменяются. Такие изменения называют пульсациями, они являются наиболее характерными признаками турбулентности. Для математического моделирования турбулентного течения выполняется его разложение на осредненное движение и на пульсационное движение. Осредненное по времени значение составляющей скорости u обозначают \bar{u} , а пульсационной скорости – u' . Тогда для составляющей скорости, давления и температуры записывают:

$$u = \bar{u} + u'; \quad v = \bar{v} + v'; \quad P = \bar{P} + P'; \quad T = \bar{T} + T'.$$

Уравнение движения, аналогичное уравнению (2.1.3), только для турбулентного пограничного слоя имеет вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - u'v' \right). \quad (3.1.1)$$

Уравнение неразрывности записывается аналогично (2.1.7). Уравнение (3.1.1) отличается от уравнения ламинарного пограничного слоя (2.1.3) наличием дополнительных касательных напряжений.

Отсутствие достаточных теоретических предпосылок для замыкания системы уравнений движения Рейнольдса привело к возникновению различных полуэмпирических теорий, содержащих эмпирические константы турбулентности (от двух до пяти - шести).

Приближенные методы расчета турбулентного пограничного слоя часто основываются на теореме импульсов, используемой и для расчета ламинарного пограничного слоя на пластине. Продольное обтекание пластины характеризуется тем, что для него градиент давления вдоль стенки равен нулю, и поэтому скорость вне пограничного слоя остается постоянной. Закономерности пограничного слоя на плоской пластине являются основой для расчета сопротивления всех тел, у которых при обтекании не возникает резко выраженного отрыва.

Механизм турбулентного течения в упрощенном виде представлен Прандтлем. Для этого вводится понятие пути перемешивания l , аналогичный пути свободного пробега молекул в кинетической теории газов. Разница заключается лишь в том, что там происходит микроскопическое движение молекул, а здесь –

макроскопическое движение турбулентных объемов. Осредненное по времени значение $\overline{u'v'}$ по теории Прандтля записывается в виде:

$$\overline{u'v'} = -l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (3.1.2)$$

Для описания процесса переноса импульса Буссинеск предположил, что турбулентное касательное напряжение τ_T определяется аналогичной формулой закона трения Ньютона:

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy}.$$

Тогда для турбулентного течения:

$$\tau_T = -\rho \overline{u'v'} = -\mu_T \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (3.1.3)$$

где вместо истинной скорости u входит осредненная скорость \bar{u} , а вместо коэффициента молекулярной вязкости μ – коэффициент турбулентного обмена μ_T или $\nu_T = \mu_T / \rho$. Коэффициент μ_T не является физической константой и в первую очередь зависит от распределения скорости \bar{u} .

С учетом выражения (3.1.3) уравнение движения (3.1.1) запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right]. \quad (3.1.4)$$

Здесь и далее черта над осредненными параметрами опускается.

Гипотеза Прандтля о пути перемешивания позволяет выполнять практические расчеты турбулентных течений в промышленных аппаратах.

Для тепло- и массообменных процессов вводятся аналогичные коэффициенты турбулентного обмена массой D_T и энергией λ_T (или $a_T = \lambda_T / (\rho c_p)$ – турбулентной температуропроводности).

Коэффициенты ν_T , D_T и a_T имеют одинаковую размерность – $\text{м}^2/\text{с}$.

Уравнения тепло- и массопереноса для пограничного слоя, записанные с коэффициентами турбулентного обмена, имеют форму:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(a + a_T) \frac{\partial T}{\partial y} \right], \quad (3.1.5)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(D + D_T) \frac{\partial C}{\partial y} \right], \quad (3.1.6)$$

где T – температура; C – концентрация компонента в потоке.

Граничные условия системы уравнений (3.1.4) – (3.1.6) имеют такой же вид, как и для ламинарного пограничного слоя. Для решения данной системы уравнений, кроме уравнения состояния и зависимостей коэффициентов ν , a и D от температуры, необходимо иметь значения коэффициентов турбулентного обмена ν_T , a_T и D_T . Ввиду отсутствия в настоящее время законченной теории

турбулентности определение этих коэффициентов носит полуэмпирический характер и основывается на ряде гипотез.

Из гипотез Прандтля и Буссинеска следует, что коэффициент турбулентной вязкости равен

$$\nu_T = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (3.1.7)$$

Длина пути перемешивания l зависит от координат и характеризует средний размер турбулентных возмущений (масштаб турбулентности) в данной точке.

Для турбулентного движения среды вдоль твердой стенки путь перемешивания l записывают в виде

$$l = \chi y, \quad (3.1.8)$$

где χ – безразмерный коэффициент, по Прандтлю $\chi = 0,4$ и за пределами вязкого подслоя и буферной области используется линейная зависимость

$$\nu_T \approx \chi u_* y = \chi y \sqrt{\frac{\tau_{CT}}{\rho}}. \quad (3.1.9)$$

Из выражений (3.1.3), (3.1.8) и (3.1.9) записывают

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{\chi y}. \quad (3.1.10)$$

Отсюда следует логарифмический профиль средней скорости

$$u = \frac{u_*}{\chi} \ln y + B, \quad (3.1.11)$$

где B – постоянная интегрирования.

Универсальный закон распределения, полученный для течения вдоль плоской стенки, справедлив для течения жидкости в круглой трубе.

Соотношение (3.1.11) можно записать в следующем безразмерном виде

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{u_* y}{\nu} + B_1. \quad (3.1.12)$$

Согласно опытным данным Никурадзе для труб $B_1=5,5$.

Следует отметить, что логарифмический закон распределения скоростей получен при предположении, что в основной области турбулентного пограничного слоя $\nu_T \gg \nu$. Такое допущение справедливо при очень больших числах Рейнольдса, т.е. при развитом турбулентном режиме.

При числах $4 \cdot 10^3 < Re < 3,2 \cdot 10^6$ в трубах широко используется степенная зависимость:

$$\frac{u}{U_{\max}} = \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (3.1.13)$$

где $n = 6$ при $Re = 4 \cdot 10^3$; $n = 7$ при $Re = 10^5$; $n = 10$ при $Re = 3,2 \cdot 10^6$.

Для плоской пластины степенной закон имеет вид

$$\frac{u}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (3.1.14)$$

причем n слабо зависит от числа Рейнольдса.

При $Re_x = 10^6 \div 10^8$ принимают $n = 7$ (закон корня одной седьмой).

Применяется также зависимость для безразмерного профиля скорости в виде

$$\frac{u}{u_*} = C_{(n)} \left(\frac{yu_*}{\nu} \right)^{\frac{1}{n}} = C_{(n)} (y^+)^{\frac{1}{n}}, \quad (3.1.15)$$

где при $40 < y^+ < 700$; $C = 8,74$; $n = 7$; при $70 < y^+ < 1100$; $C = 9,6$; $n = 8$.

Для турбулентного пограничного слоя также используются понятия толщины вытеснения (3.1.14) и толщины потери импульса (3.1.15).

Известны соотношения

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}, \quad \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{n+1}, \quad (3.1.16)$$

где $n = 7$, а толщина пограничного слоя на пластине вычисляется по формуле

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,37}{\text{Re}_x^{0,2}}. \quad (3.1.17)$$

Из решения уравнения (3.1.15) при $C=8,74$ и $n=7$ следует

$$u_* = 0,15u^{\frac{7}{8}} \left(\frac{v}{y} \right)^{\frac{1}{8}}. \quad (3.1.18)$$

Отсюда касательное напряжение на стенке равно

$$\tau_{\text{ст}} = \rho u_*^2 = 0,0225\rho u^{1,75} \left(\frac{v}{\delta} \right)^{0,25}. \quad (3.1.19)$$

Из выражений (3.1.17) и (3.1.19) локальный и средний коэффициенты трения пластины имеют вид

$$C_{fx} = \frac{2\tau_x}{\rho U_\infty^2} = \frac{0,058}{\text{Re}_x^{0,2}}, \quad C_f = \frac{2\tau}{\rho U_\infty^2} = \frac{0,073}{\text{Re}_L^{0,2}}. \quad (3.1.20)$$

Эти формулы дают согласование с экспериментом до $\text{Re} \approx 10^7$.

Шлихтинг предложил интерполяционную формулу для более широкого интервала чисел Рейнольдса

$$C_f = \frac{0,445}{(\lg \text{Re}_L)^{2,58}}, \quad (3.1.21)$$

или с учетом участка ламинарного течения около передней кромки пластины:

$$C_f = \frac{0,445}{(\lg Re_L)^{2,58}} - \frac{A}{Re_L}, \quad (3.1.22)$$

где коэффициент A зависит от положения точки перехода ламинарной формы течения в турбулентную.

$Re_{x_{кр}}$	$3 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	10^6	$3 \cdot 10^6$
A	1050	1700	3300	8700

Выражение (3.1.22) называется законом Прандтля – Шлихтинга для сопротивления гладкой плоской пластины при ее продольном обтекании. Он применим при числах $Re \leq 10^9$.

Турбулентная вязкость

Для решения уравнений пограничного слоя (3.1.4)–(3.1.6) необходимы функциональные зависимости для расчета коэффициентов турбулентного обмена. С этой целью используются различные модели.

В турбулентном потоке крупномасштабные пульсации (с большими амплитудами) являются источником мелкомасштабных пульсаций (с малыми амплитудами). Поскольку энергия, переносимая при пульсационном движении, пропорциональна произведению амплитуды на их частоту, то, согласно механизму переноса энергии в турбулентном потоке, частота пульсаций должна возрастать с уменьшением масштаба пульсаций. Это вытекает из закона сохранения энергии. Поэтому крупномасштабные пульсации происходят с низкими частотами, а мелкомасштабные – с высокими. Так как энергия, диссипируемая в самых мелкомасштабных пульсациях, передается им пульсациями более крупного масштаба, то величина ϵ для данного турбулентного потока постоянна и независима от масштаба пульсаций.

Поэтому ее можно выразить через пульсационную скорость v' и длину пути смешения (масштаб пульсационного движения) l :

$$\varepsilon \approx \frac{(v')^3}{l} \approx v_T \left(\frac{v'}{l} \right)^2, \quad (3.1.23)$$

где ε – скорость диссипации кинетической энергии в турбулентном потоке, $\text{м}^2/\text{с}^3$. Используется также значение среднеобъемной диссипации энергии $\bar{\varepsilon} = N/V$, где N – мощность, Вт; V – объем среды, м^3 . В ряде случаев можно использовать связь $\varepsilon = \bar{\varepsilon} / \rho$.

Выражение (3.1.23) в различных вариантах используется для расчета характеристик турбулентности.

В литературе известен целый ряд двух- трех- и даже четырехслойных моделей пограничного слоя. Причем в каждой области используются различные функции коэффициентов турбулентного обмена.

В работах Клаузера рассматривается двухслойная модель турбулентного пограничного слоя. Внешняя подобласть турбулентного пограничного слоя располагается между внешней границей «пристенной» подобласти и внешней границей (в номинальном ее понимании как конечной величины) пограничного слоя. В этой области движение жидкости определяется «законом следа», главной особенностью которого, в соответствии с гипотезой Клаузера, является постоянство (независимость от y) коэффициента турбулентной длины – размер крупных вихрей, заполняющих внешнюю область пограничного слоя, пропорциональный толщине пограничного слоя, введенной им как Δ . Это привело Клаузера к формуле для кинематического

коэффициента вязкости ν_T поперек пограничного слоя. Действительный характер изменения ν_T вдоль этой области определяется «модифицированной гипотезой Клаузера», предложенной Ю.В. Лапиным и М.Х.Стрельцом. С развитием турбулентного пограничного слоя и переходом течения в диффузорную часть весь пограничный слой и его «внешняя» подобласть утолщаются, а при приближении к точке отрыва «внешняя» подобласть стремится полностью занять все сечение пограничного слоя.

Клаузеру принадлежит также модель «закона следа». В основе ее лежит допущение о постоянстве кинематического коэффициента турбулентной вязкости ν_T во внешней части сечений пограничного слоя при возможном изменении его от сечения к сечению. Опыты не оправдывают это допущение. Как свидетельствуют современные данные, отношение $\nu_T / (U\delta^*)$ в функции от безразмерной координаты y/δ , построенное для трех значений $\beta=0; 0,9$ и $5,4$ (последнее значение β соответствует значительной диффузорности), при приближении к внешней границе пограничного слоя при всех значениях β убывает. Но, как отмечает Брэдшоу, «терпимое приближение к профилю осредненной скорости было получено в предположении о постоянстве этой величины» (подразумевается ν_T). Это предположение с теми или другими поправками широко используется в современных методах расчета турбулентных пограничных слоев.

Заметив, что размерность ν_T определяется произведением скорости на длину, Клаузер принял за характерную скорость динамическую скорость и выражение для ν_T записал в виде

$$\nu_T = k u_* \Delta, \quad (3.1.24)$$

или

$$v_T = kU\delta^* = k \int_0^{\infty} (U - u) dy, \quad (3.1.25)$$

где коэффициент пропорциональности k может быть функцией параметра β . Обработка имевшихся к тому времени опытов выявила ошибку этой зависимости, и Клаузер предложил на всем протяжении пограничного слоя считать k постоянной величиной, равной в среднем $k=0,018$. Современные авторы, пользующиеся допущением о постоянстве k , принимают k , равным 0,0168.

На основе сопряжения логарифмического профиля скорости с линейным для ламинарного (вязкого) подслоя известна формула:

$$v_T = v \frac{\exp(-1/\chi\eta)}{1 - \exp(-1/\chi\eta)}, \quad (3.1.26)$$

при значении $\eta = u/u_*$, начиная от границы ламинарного подслоя $\chi = 0,4$.

Ландау и Левич ввели теорию вязкого подслоя, где происходит постепенное затухание турбулентности. По этой теории в пределах вязкого подслоя принимают степенную зависимость $v_T(y)$ от расстояния до поверхности. Из теоретических соображений закон затухания $v_T(y)$ в вязком подслое пропорционален четвертой степени. Однако экспериментальные данные различных исследователей дают значительный разброс показателя степени от 2 до 4.

В табл. 3.1 приведены наиболее известные выражения для коэффициентов турбулентной вязкости.

Характер функции $v_T(y)$ значительно зависит от гидродинамических условий движения потока и в меньшей степени от чисел Pr и Sc , а для пограничного слоя на поверхности раздела двухфазных сред, кроме того, от наличия ПАВ, волнообразования, межфазной конвекции и ряда других факторов.

Таблица 3.1

№	Формула
1.	$\frac{v_T}{\nu} = 0,01\chi^4 (y^+)^4, \quad y^+ < 5$
2.	$\frac{v_T}{\nu} = DR; \quad D = \left[1 - \exp(-y^+ / A_*)^2 \right], \quad \text{где } A_* = 26;$ $R = \chi^2 (y^+)^2, \quad y^+ = u_* y / \nu$
3.	$v_T = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \text{ («}k - \varepsilon\text{» – модель)}$
4.	$\frac{v_T}{\nu} = 0,124^2 u_+ y_+ [1 - \exp(-0,124 u_+ y_+)]$ $y_+ = y / y_*; \quad u_+ = u / u_*; \quad y_* = \nu / u_*$
5.	$\frac{v_T}{\nu} = \left(\frac{y^+}{14,5} \right)^3, \quad 0 < y^+ < 5$ $\frac{v_T}{\nu} = 0,2y^+ - 0,959, \quad 5 < y^+ \leq 30$
6.	$\frac{v_T}{\nu} = 0,001 (y^+)^3, \quad 0 < y^+ \leq 5$ $\frac{v_T}{\nu} = 0,012 (y^+ - 1,6)^2, \quad 5 < y^+ \leq 20$ $\frac{v_T}{\nu} = 0,4 (y^+ - 10), \quad y^+ > 20$

7.	$\frac{v_T}{v} = (y^+)^a \left[1000 \left(2,5 \cdot 10^7 / \text{Re} \right)^b \right]^{-1}$ $a = 400 - (y^+)^{0,08}, \quad b = y^+ / (400 + y^+)$
8.	$\frac{v_T}{v} = b (y^+)^4; \quad b = y^+ / (400 + y^+), \quad 0 < y^+ < 6$

Турбулентные пограничные слои с градиентом давления и консервативные свойства

Турбулентные течения с понижением или повышением давления часто встречаются в тепло- и массообменных аппаратах. В качестве примеров можно привести течения в сужающихся и расширяющихся каналах, обтекание различных профилей с кривизной поверхности и т.д.

Все способы расчета градиентных турбулентных пограничных слоев представляют собой приближенные методы. Они также основаны на теореме импульсов и теореме энергии для пограничного слоя. Общими особенностями этих способов являются: в качестве характерной толщины пограничного слоя используется толщина потери импульса; для характеристики профиля скоростей, сильно зависящего от градиента давления, вводятся формпараметры профиля скоростей. Например, в качестве формпараметра может использоваться отношение толщины вытеснения δ^* к толщине потери импульса δ^{**} , а расчет толщины потери импульса вычисляется при помощи теоремы импульсов. Для расчета касательного напряжения на стенке используется закон сопротивления продольно обтекаемой плоской

пластины, но взамен постоянной скорости U_∞ внешнего течения подставляется переменная скорость $U(x)$. Все эти способы основаны на использовании консервативных свойств пограничного слоя.

Наиболее важными из этих свойств по исследованиям С.С. Кутателадзе являются:

1. Консервативность длины пути смещения в окрестности стенки (но вне вязкого подслоя) относительно градиента давления и сжимаемости.

2. Вырождение вязкого подслоя и пульсаций плотности при $Re \rightarrow \infty$ и, как следствие этого, существование предельных относительных законов трения, в общем виде не зависящих от интегральных констант турбулентности.

3. Заполненность профилей скоростей и температур при больших числах Re .

4. Значительная консервативность безразмерной толщины вязкого подслоя на непроницаемой поверхности.

Эти принципы используются при решении разнообразных задач при турбулентном переносе.

3.2. Модель диффузионного пограничного слоя Ландау – Левича

Перенос массы и теплоты

Рассматриваются две основные гипотезы о затухании турбулентности в пограничном слое:

1) гипотеза Прандтля–Тейлора о полном прекращении турбулентности в вязком подслое,

2) гипотеза Ландау–Левича о постепенном затухании турбулентности.

Однако по вопросу о законе затухания единой точки зрения не существует.

Наряду с гипотезой о законе затухания турбулентных пульсаций выдвигалось предположение о сохранении закона $l \sim y$ в пределах вязкого подслоя. Это предположение приводит к выражению:

$$D_T \sim \frac{v_0 y^3}{\delta_1^2},$$

где v_0 – характерная скорость турбулентных пульсаций, м/с.

Коэффициент турбулентной диффузии D_T в вязком подслое быстро, как y^3 , убывает с уменьшением расстояния до стенки. Поэтому на некотором расстоянии до стенки, равном δ_D , коэффициент турбулентной диффузии станет столь мал, что будет иметь место равенство

$$D_T(\delta) = b v_0 \frac{\delta_1^4}{\delta_D^3} = D,$$

где b – численный коэффициент.

При $y < \delta_D$ коэффициент турбулентной диффузии должен быть меньше коэффициента молекулярной диффузии, но теоретически $D_T = 0$. Соответственно при $y < \delta_D$ механизмом переноса вещества является молекулярная диффузия.

Таким образом, получается, что турбулентный поток имеет четырехслойную структуру.

Вдали от поверхности тела имеется область развитой турбулентности, являющаяся областью постоянной концентрации. Ближе к телу, в турбулентном пограничном слое, происходит медленное, подчиняющееся логарифмическому закону уменьшение средней скорости и концентрации. В этой области молекулярная вязкость и диффузия не играют заметной роли. Импульс и вещество переносятся турбулентными пульсациями. Еще ближе к стенке, в вязком подслое, турбулентные пульсации становятся столь малыми, что импульс, переносимый молекулярной вязкостью, оказывается большим, чем импульс, переносимый турбулентными пульсациями. Поскольку, однако, коэффициент диффузии D в жидкостях в тысячу раз меньше, чем кинематическая вязкость, затухающие турбулентные пульсации переносят все же гораздо больше вещества, чем молекулярная диффузия. Только в самой глубине вязкого подслоя, при $y < \delta_D$, молекулярный механизм диффузии начинает преобладать над турбулентным.

Как и в модели Прандтля, при $Sc \gg 1$ основное диффузионное сопротивление оказывается сосредоточенным в диффузионном подслое δ_D , в котором перенос вещества осуществляется диффузией. Однако в диффузионном процессе диффузионный поток j оказывается пропорциональным $D^{\frac{3}{4}}$, а не D , как в схеме Прандтля. Более низкая степень при коэффициенте диффузии имеет определенный смысл: чем меньше коэффициент диффузии D , тем на меньшем расстоянии от стенки перенос вещества турбулентными пульсациями преобладает над молекулярной диффузией. Поскольку турбулентный перенос является

более эффективным, чем молекулярный, можно сказать, что в данной схеме учитывается частичная компенсация уменьшения D возрастанием роли турбулентного переноса. Аналогичные рассуждения справедливы и для процессов переноса теплоты.

Для определения коэффициентов массо- и теплоотдачи на основе использования модели диффузионного пограничного слоя записываются выражения для потока массы и теплоты с учетом молекулярного и турбулентного переноса:

$$j = -(D + D_T) \frac{dC}{dy}, \quad (3.2.1)$$

$$q = -(a + a_T) \frac{dT}{dy}. \quad (3.2.2)$$

На основе этих выражений записываются интегралы:

$$C_\infty - C_{\text{Гр}} = \int_0^{y_\infty} \frac{j dy}{D + D_T(y)}, \quad (3.2.3)$$

$$T_\infty - T_{\text{Гр}} = \int_0^{y_\infty} \frac{q dy}{a + a_T(y)}. \quad (3.2.4)$$

Из выражений (3.3.3), (3.3.4), если ввести коэффициенты массоотдачи

$$\beta = \frac{j}{C_\infty - C_{\text{Гр}}}, \quad (3.2.5)$$

и теплоотдачи

$$\alpha = \frac{q}{T_{\infty} - T_{\text{гр}}}, \quad (3.2.6)$$

можно получить:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{C_{\infty} - C_{\text{гр}}}{j} = \int_0^{\delta} \frac{F(y) dy}{D + D_{\text{T}}}, \quad (3.2.7)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{T_{\infty} - T_{\text{гр}}}{q} = \int_0^{\delta} \frac{F(y) dy}{\rho c_p (a + a_{\text{T}})}, \quad (3.2.8)$$

где геометрический фактор $F(y) = 1$, при условии, что значение δ значительно меньше характерного размера обтекаемого тела, т.е. $\delta/L \ll 1$.

Согласно модели диффузионного пограничного слоя, если $Sc \gg 1$ и $Pr \gg 1$, то основное сопротивление переносу субстанции локализовано внутри вязкого подслоя, поэтому выражения (3.2.7) и (3.2.8) примут форму

$$\frac{1}{\beta} = \int_0^{\delta_1} \frac{dy}{D + D_{\text{T}}}, \quad (3.2.9)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \int_0^{\delta_1} \frac{dy}{\rho c_p (a + a_{\text{T}})}, \quad (3.2.10)$$

где коэффициенты турбулентного обмена определяются законом затухания турбулентных пульсаций по толщине вязкого подслоя $D_T = D_T(y)$, и $a_T = a_T(y)$ в первую очередь зависят от гидродинамики потока. Следует отметить, что все эти зависимости имеют полуэмпирический характер и ограниченную область применения (см. табл. 3.1). Например, по данным ряда исследователей, коэффициент турбулентной вязкости в вязком подслое пропорционален расстоянию от стенки в четвертой степени

$$\nu_T = b\nu \left(\frac{u_* y}{\nu} \right)^4, \quad (3.2.11)$$

где коэффициент пропорциональности b находится различными экспериментальными методами.

Согласно экспериментам, выполненным двумя независимыми методами в широком диапазоне изменения чисел Прандтля (до $Pr=1,2 \cdot 10^6$), получено значение $b \approx 2,7 \cdot 10^{-4}$.

Контрольные вопросы

1. Что такое пульсации и масштаб турбулентности?
2. Назовите две основные гипотезы о затухании турбулентности в пограничном слое?
3. Какое течение может быть в пограничном слое?
4. Запишите уравнение для пульсационного движения.
5. Поясните модель диффузионного пограничного слоя.
6. Как определяются коэффициенты тепло- и массоотдачи?

ГЛАВА 4
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И РАСЧЕТ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОГРАНИЧНОГО
СЛОЯ

4.1 Определение касательного напряжения трения

Для расчета коэффициентов переноса в тепло- и массообменных аппаратах различных конструкций необходимо определить среднее значение касательного напряжения на стенке $\tau_{ст}$ (или динамической скорости $u_* = \sqrt{\tau_{ст}/\rho}$), где ρ – плотность среды, кг/м³.

Рассмотрим общий метод определения касательного напряжения трения (локального потока импульса) на стенке – поверхности обтекаемого тела. Пусть ось Oy направлена по нормали к стенке. В этом случае касательное напряжение на ось Oy в любой точке пограничного слоя будет определяться по известному выражению с учетом молекулярного и турбулентного переноса

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy} - \mu_T(y) \frac{du}{dy} = -\rho(\nu + \nu_T) \frac{du}{dy}, \quad (4.1.1)$$

где μ , μ_T – динамическая молекулярная и турбулентная вязкость, Па·с; ν , ν_T – коэффициенты кинематической молекулярной и турбулентной вязкости, м²/с; du/dy – градиент скорости.

Касательное напряжение на стенке, то есть при $y = 0$, может быть выражено, используя уравнение импульсоотдачи (потока импульса) в виде:

$$\tau_{\text{ст}} = \rho\gamma(u_{\infty} - u_{\text{ст}}) = \rho\gamma u_{\infty}, \quad (4.1.2)$$

где γ – коэффициент переноса импульса (импульсоотдачи), м/с; $u_{\infty}, u_{\text{ст}}$ – скорость в ядре потока и на стенке, м/с. В уравнении (4.1.2) учитывая условие прилипания, имеем $u_{\text{ст}} = 0$.

В литературе γ имеет размерность кг/(м²·с). Однако, как показано ниже удобнее использовать размерность γ – м/с, т.е. разделив на плотность.

Еще в середине XIX столетия изучением процесса трения в трубах занимались сначала Дарси, а потом Фаннинг, которые и ввели понятие о коэффициенте трения:

$$C_f = \frac{2\tau_{\text{ст}}}{\rho u_{\infty}^2} = \frac{2\gamma}{u_{\infty}}, \quad (4.1.3)$$

при $u_{\infty} = u_{\text{ср}}$, где $u_{\text{ср}}$ – средняя скорость потока, м/с.

Комплекс (4.1.3) соответствует критерию Стантона St_m для потока теплоты и критерию Стантона St_δ для потока компонента при массообмене.

Полный поток импульса (сила P_s) в единицу времени, который переходит от среды к стенке, записывается в виде:

$$P_s = J_p = \rho\gamma F u_{\infty}, \quad (4.1.4)$$

где F – площадь поверхности канала (тела), м².

Аналогично записываются потоки массы компонента и теплоты:

$$M = \beta F \Delta C, \quad (4.1.5)$$

$$Q = \alpha F \Delta T, \quad (4.1.6)$$

где α, β – коэффициенты массоотдачи и теплоотдачи; $\Delta C, \Delta T$ – движущие силы соответствующих процессов. Размерности α – Вт/(м²·К), а β зависит от способа выражения концентрации C компонента. Если C – кг/м³, то β – м/с. Чтобы получить размерность м/с, то α надо разделить на ρc_p , где c_p – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К).

При полной гидродинамической аналогии (аналогия Рейнольдса) коэффициенты переноса, приведенные к одинаковой размерности, равны

$$\alpha = \beta = \alpha / \rho c_p. \quad (4.1.7)$$

При $Sc \neq Pr \neq 1$ используются различные модификации гидродинамической аналогии, где Sc, Pr – числа Шмидта и Прандтля.

При использовании любых модификаций гидродинамической аналогии необходимо вычисление или экспериментальное определение коэффициента трения C_f (4.1.3), который связан с касательным напряжением τ_{ct} (или динамической скоростью трения u_*).

Например, для трубы динамическую скорость можно определить из уравнения баланса сил

$$\Delta p S = \tau_{ct} F, \quad (4.1.8)$$

$$u_* = \sqrt{\frac{\Delta p \cdot S}{\rho F}} = u_{\text{cp}} \sqrt{\lambda/8}, \quad (4.1.9)$$

где Δp – перепад давления канала, Па; S – площадь поперечного сечения, м^2 ; F – поверхность канала, м^2 ; λ – коэффициент гидравлического сопротивления; Δp записано в форме выражения Дарси-Вейсбаха.

Для пластины из выражения (4.1.3) имеем:

$$u_* = \bar{u}_{\infty} \sqrt{C_f/2}. \quad (4.1.10)$$

Из (4.1.9) и (4.1.10) следует связь $C_f = \lambda/4$.

Запишем значение динамической скорости, используя выражение (4.1.2)

$$u_* = \sqrt{\gamma u_{\infty}}. \quad (4.1.11)$$

Рассмотрим подход определения коэффициента переноса импульса.

Введем относительный поток импульса $\tau^*(y) = \tau(y)/\tau_{\text{ст}}$. Тогда из выражения (4.1.1) запишем

$$\frac{\rho \int_0^{u_{\text{ст}}} du}{\tau_{\text{ст}}} = \int_0^{\delta} \frac{\tau^*(y) dy}{\nu + \nu_T(y)}, \quad (4.1.12)$$

где δ – толщина гидродинамического пограничного слоя, м.

Сравнивая (4.1.12) и (4.1.2) приходим к следующему выражению для определения коэффициента импульсоотдачи

$$\gamma = \left[\int_0^{\delta} \frac{\tau^*(y) dy}{\nu + \nu_T(y)} \right]^{-1}. \quad (4.1.13)$$

Выражение (4.1.13) является достаточно общим и позволяет рассчитать коэффициент переноса импульса на основе известного коэффициента молекулярной вязкости, а также известного характера изменения коэффициента турбулентной вязкости $\nu_T(y)$ и относительного потока импульса $\tau^*(y)$ в пограничном слое. Применение выражения (4.1.13) рассмотрено ниже.

В тех случаях, когда значения C_f или λ неизвестны (например, в аппаратах с вводом внешней энергии в контактирующие фазы), находит применение подход вычисления динамической скорости, с использованием средней диссипируемой энергии в единице объема среды.

В общем случае для несжимаемой жидкости количество диссипирующейся энергии, т.е. количество механической энергии, превращающейся в тепловую, отнесенное к единице времени и единице объема, определяется по выражению:

$$\varepsilon = \mu \left\{ \begin{array}{l} 2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 \end{array} \right\}, \quad (4.1.14)$$

где μ - динамическая вязкость, Па·с; x, y, z – пространственные координаты, м; v_x, v_y, v_z – составляющие вектора скорости среды по соответствующим координатам, м/с.

Применение данного выражения для прикладных расчетов сопряжено со значительными трудностями, поэтому скорость диссипации энергии ε в жидкости, обусловленной вязкостью, при градиенте скорости du/dy записывают в виде

$$\varepsilon = \frac{de}{dy} = \tau \frac{du}{dy}, \quad (4.1.15)$$

где e – плотность потока энергии, $e = \tau u$; τ – касательное напряжение, Па; u – скорость среды, м/с; y – поперечная координата, м.

Ниже рассмотрены различные примеры применения выражения (4.1.15) для расчета касательного напряжения (и динамической скорости) при ламинарном и турбулентном режимах.

Ламинарный режим

Касательное напряжение (поток импульса) на стенке по уравнению Ньютона имеет следующий вид:

$$\tau_{\text{ст}} = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}. \quad (4.1.16)$$

Из (4.1.15), (4.1.16) следует уравнение, характеризующее диссипацию энергии для ε_0 для ламинарного подслоя:

$$\varepsilon_0 = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (4.1.17)$$

Исключив из уравнений (4.1.16) и (4.1.17) величину производной $\frac{du}{dy}$ и подставив найденное при этом значение

$$\tau_{\text{ст}} = (\mu \varepsilon_0)^{1/2} \quad (4.1.18)$$

записывают:

$$u_* = \sqrt{\tau_{\text{ст}} / \rho} = \left(\frac{\varepsilon_0 \nu}{\rho} \right)^{1/4}. \quad (4.1.19)$$

Первоначально рассмотрим ламинарное течение на пластине и в трубе.

Диссипация энергии на пластине:

$$\varepsilon = \frac{\tau_{\text{ст}} F u_\infty}{V_{\text{сл}}} = \frac{\tau_{\text{ст}} u_\infty}{\delta}, \quad (4.1.20)$$

и в трубе:

$$\varepsilon = \frac{\tau_{\text{ст}} F u_\infty}{V_{\text{сл}}} = \frac{4 \tau_{\text{ст}} u_\infty}{d}, \quad (4.1.21)$$

где $V_{\text{сл}}$ – объем пристенного слоя, м^3 ; d – диаметр трубы, м .

Отсюда на участке стабилизированного течения в трубе $\delta=0,25 d$.

Из (4.1.19)-(4.1.20) для пластины получим

$$u_* = \left(\frac{\tau u_\infty \nu}{\rho \delta} \right)^{0,25} = \left(\frac{u_\infty \nu}{\delta} \right)^{0,5}. \quad (4.1.22)$$

Локальная толщина пограничного слоя на пластине:

$$\delta \approx 5 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}, \quad (4.1.23)$$

где x – продольная координата пограничного слоя, м .

Из (4.1.22)-(4.1.23) значение динамической скорости по координате x :

$$u_*(x) = 0,447 u_\infty^{0,75} (\nu/x)^{0,25}. \quad (4.1.24)$$

Или используя выражение (4.1.10) с локальным коэффициентом трения:

$$u_*(x) = u_\infty \sqrt{C_{fx}/2} = 0,407 u_\infty^{0,75} (\nu/x)^{0,25}, \quad (4.1.25)$$

где $C_{fx} = \frac{0,332}{\sqrt{\text{Re}_x}}$, $\text{Re}_x = u_\infty x / \nu$ – число Рейнольдса.

Из выражений (4.1.23)-(4.1.25) следует, что полное совпадение уравнений (4.1.24) и (4.1.25) обеспечивается при толщине пограничного слоя (4.1.23) с численным коэффициентом 6,04.

Если в выражении (4.1.20) использовать среднее значение толщины пограничного слоя по длине пластины L :

$$\delta \approx \frac{5}{L} \int_0^L \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} dx = 3,33 \sqrt{\frac{\nu L}{u_\infty}}, \quad (4.1.26)$$

то из формулы (4.1.20) получим

$$u_* = 0,548 u_\infty^{0,75} (\nu/L)^{0,25}, \quad (4.1.27)$$

а из выражения (4.1.10) со средним коэффициентом трения пластины $C_f = 1,328 \text{Re}_L^{-0,5}$ следует

$$u_* = 0,576 u_\infty^{0,75} (\nu/L)^{0,25}. \quad (4.1.28)$$

Расхождение численных коэффициентов в (4.1.27) и (4.1.28) около 5%.

Для трубы из (4.1.21) запишем:

$$u_* = \left(\frac{4u_\infty \nu}{d} \right)^{0,5} \quad (4.1.29)$$

Или по выражению (4.1.9):

$$u_* = u_{\text{cp}} \sqrt{\lambda/8} = \left(\frac{8u_{\text{cp}} \nu}{d} \right)^{0,5}, \quad (4.1.30)$$

В ламинарном потоке $\lambda = 64/Re$; $Re = u_{cp}d/\nu$.

Учитывая, что для трубы $u_{\infty} = 2u_{cp}$, получаем полную идентичность выражений (4.1.29) и (4.1.30).

Приведенные выражения и сопоставления подтверждают справедливость уравнения (4.1.19) для ламинарного течения с погрешностью не более $\pm 5\%$.

Турбулентный режим

Получим значение динамической скорости на основе уравнения (4.1.15) и известного характера переноса импульса в турбулентном пограничном слое.

В уравнении (4.1.15) значение производной найдем из выражения:

$$\tau_{ст} = -\rho(\nu + \nu_T) \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{\tau_{ст}}{\rho(\nu + \nu_T)}, \quad (4.1.31)$$

где ν, ν_T – коэффициенты кинематической и турбулентной вязкости, m^2/s .

Из (4.1.15) и (4.1.31) получим:

$$\varepsilon = \frac{\tau_{ст}^2}{\rho(\nu + \nu_T)}, \quad \nu_T = \nu_T(y). \quad (4.1.32)$$

Среднее значение скорости диссипируемой энергии в пограничном слое толщиной δ запишем в виде:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\tau_{\text{CT}}^2}{\delta \rho} \int_0^{\delta} \frac{dy}{v + v_T(y)}, \quad (4.1.33)$$

где подинтегральная функция определяет сопротивление переносу импульса в турбулентном пограничном слое (4.1.13), и тогда уравнение (4.1.33) получит форму:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\tau_{\text{CT}}^2}{\delta \rho \gamma} = \frac{u_*^4 \rho}{\delta \gamma}, \quad (4.1.34)$$

Отсюда найдем среднее значение динамической скорости:

$$u_* = \left(\frac{\bar{\varepsilon} \delta \gamma}{\rho} \right)^{0,25}. \quad (4.1.35)$$

4.2 Турбулентная вязкость

В промышленных аппаратах химической технологии и энергетических установках движение газов (паров) и жидкостей практически всегда происходит при турбулентном режиме. Поэтому для поиска путей совершенствования технологического и энергетического оборудования важное значение имеет достоверный расчет турбулентных течений.

Первые фундаментальные исследования турбулентных течений были выполнены еще в 19 веке Г.Гагеном, О.Рейнольдсом, Ж.Буссинеском, Г.Лоренцем и в начале 20 века развиты многими учеными (Л.Прандтль, Т.Кармен, В.Экман, И.Бюргерс, А.Колмогоров,

Х.Драйден, Г.Клаузер, Дж.Тейлор, Г.Шлихтинг, Л.Лойцянский и др). Разработаны различные полуэмпирические теории пристенной турбулентности и отрывных течений. Осреднение по Рейнольдсу уравнений динамики вязкой жидкости приводит к системе уравнений Рейнольдса, называемые уравнениями для первых моментов. В общем случае проблема замыкания этих уравнений сводится к установлению связи тензора турбулентных напряжений с тензором осредненных скоростей деформаций.

Одна из первых попыток упростить расчет турбулентных течений принадлежит Буссинеску, который ввел понятие турбулентной вязкости. Далее эта гипотеза была развита Прандтлем и Карманом. При этом делались различные допущения о характере изменения коэффициента $\nu_T(y)$. Опытами было установлено, что ν_T изменяется по поперечному сечению потока, возрастая по мере удаления от стенки до некоторого максимума и затем убывая на оси потока. Часто с достаточной для практических расчетов принимают среднее значение $\nu_T \approx const$ в ядре потока, т.е. за пределами пристенного слоя.

Рассмотрим теоретический подход определения коэффициента турбулентной вязкости в ядре потока, связанный с диссипацией энергии.

Для энергии турбулентности ε изотропного движения за пределами пограничного слоя следует соотношение :

$$\varepsilon = \frac{15}{2} \nu \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2. \quad (4.2.1)$$

Используя приближенное соотношение

$$\left(\overline{\frac{\partial u'}{\partial y}}\right)^2 = \overline{\frac{\partial u'}{\partial y}} \cdot \overline{\frac{\partial u'}{\partial y}} \quad (4.2.2)$$

получим

$$\varepsilon = \frac{15}{2} \overline{v} \overline{\frac{\partial u'}{\partial y}} \cdot \overline{\frac{\partial u'}{\partial y}}. \quad (4.2.3.)$$

Принимая турбулентность в канале, близкой к изотропной, Таунсенд записал скорость диссипации энергии ($\text{м}^2/\text{с}^3$) в виде

$$\varepsilon \sim \frac{(v')^3}{l} \quad (4.2.4.)$$

где v' – пульсационная скорость, $\text{м}/\text{с}$; l – масштаб турбулентности, м .

По определению турбулентная вязкость записывается в виде $\nu_T = \overline{v'l}$, а касательное напряжение $\tau = \rho \overline{v'u'}$, где v' и u' – поперечная и продольная составляющие пульсационной скорости. При изотропной турбулентности имеем $\overline{v'} = \overline{u'} = u_*$. Тогда из выражений (4.2.1)-(4.2.4) получим среднее значение коэффициента турбулентной вязкости в ядре потока (т.е. при $y \geq \delta$):

$$\nu_T = 7,5 \frac{u_*^4}{\overline{\varepsilon}}, \quad (4.2.5)$$

где $\overline{\varepsilon}$ – средняя объемная диссипация энергии, $\text{м}^2/\text{с}^3$.

По модели Прандтля средняя турбулентная вязкость при $y \geq \delta$:

$$v_T = \chi u_* \delta. \quad (4.2.6.)$$

Рассмотрим применение выражений (4.2.5.) и (4.2.6.) для турбулентного потока в трубе.

Динамическую скорость в трубе вычислим по выражению (4.1.9).

Средняя скорость диссипации энергии в пристенном слое равна

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\tau u_{cp} F}{\rho F \delta} = \frac{u_{cp} u_*^2}{\delta} = \frac{u_{cp}^3 \lambda}{8 \delta}, \quad (4.2.7)$$

где F – площадь поверхности трубы, m^2 .

Среднюю толщину турбулентного пограничного слоя найдем, используя логарифмический профиль скорости в трубе:

$$\frac{u}{u_*} = 5,75 \ln \frac{yu_*}{\nu} + 5,5 = 2,5 \ln \frac{yu_*}{\nu} + 5,5. \quad (4.2.8)$$

Отсюда при $y = \delta$ и $u = u_{cp}$ получим

$$\delta = \frac{\nu}{u_*} \exp \left[\frac{1}{2,5} \left(\frac{u_{cp}}{u_*} - 5,5 \right) \right]. \quad (4.2.9)$$

Из (4.2.5.) с(4.2.7) получаем средние значения v_T при $y \geq \delta$

$$v_T = 0,93 u_{cp} \delta \lambda, \quad (4.2.10)$$

Из(4.2.6.) с u_* (4.1.9) запишется:

$$v_T = 0,14u_{cp}\delta\sqrt{\lambda}. \quad (4.2.11)$$

На рис. 4.1. представлены зависимости v_T от числа Re по формулам (4.2.10) и (4.2.11).

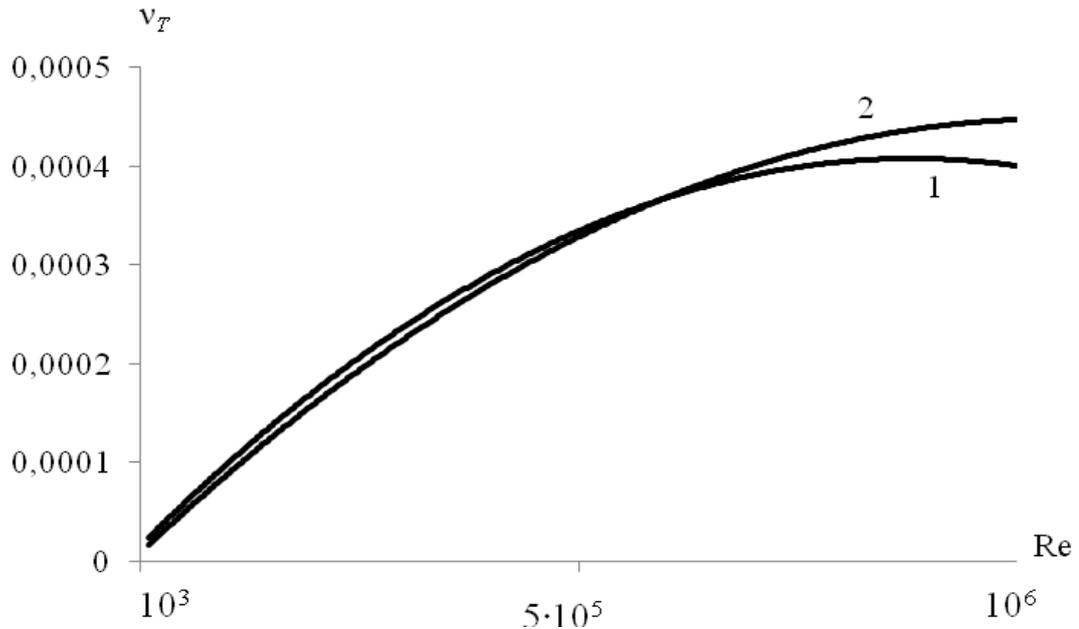


Рис. 4.1. Зависимость средней турбулентной вязкости в трубе от числа Рейнольдса. 1 - расчет по формуле (4.2.10); 2 - расчет по формуле(4.2.11).

Из представленных расчетов видно удовлетворительное согласование результатов расчета средних v_T в ядре потока с использованием теории изотропной турбулентности и модели пограничного слоя Прандтля.

4.3 Коэффициенты переноса импульса

Ламинарный режим

Для плоского ламинарного пограничного слоя значение γ можно определить из выражения (4.1.3) с локальным или полным сопротивлением пластины

$$C_{f_x} = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}}; \quad C_{f_L} = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_L}}. \quad (4.3.1)$$

Отсюда из (4.1.3) и (4.3.1) локальный и средний коэффициент переноса импульса

$$\gamma_x = 0,332 \sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}}, \quad \gamma = 0,664 \sqrt{\frac{\nu \bar{u}_\infty}{L}}. \quad (4.3.2)$$

Данные выражения справедливы для плоского ламинарного пограничного слоя без возмущений. Рассмотрим подход, определения γ для градиентных течений.

В прикладной аэрогазовой динамике получил применение метод «эффективной длины». В этом случае влияние градиента давления учитывается соответствующим подбором эффективной длины при условии равенства толщины потери энергии пограничного слоя. При известной эффективной длине характеристики пограничного слоя рассчитываются с помощью соответствующих формул для пластины. Следовательно, чтобы получить выражение для γ , воспользуемся известными свойствами консервативности законов трения к различным

возмущениям. Для этого осредним параметры градиентного потока по длине обтекаемого тела и приведем их к плоскому пограничному слою без гидродинамических возмущений.

Предположим, что средний поток импульса на поверхности тела известен. Тогда в рамках плоского ламинарного пограничного слоя запишем:

$$\tau_{\text{сг}} = \nu \rho \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \nu \rho \frac{3}{2} \frac{\bar{u}_{\infty}}{\delta}, \quad (4.3.3)$$

где

$$\delta = \frac{4,64}{L} \int_0^L \sqrt{\frac{\nu x}{\bar{u}_{\infty}}} dx = 3,09 \sqrt{\frac{\nu L}{\bar{u}_{\infty}}}.$$

Из данных выражений найдем осредненную скорость \bar{u}_{∞} , приведенную к плоскому безградиентному пограничному слою:

$$\bar{u}_{\infty} = 1,62 (\tau_{\text{сг}} / \rho)^{2/3} (L / \nu)^{1/3}. \quad (4.3.4)$$

В данном случае эквивалентными параметрами градиентного и безградиентного потоков являются касательное напряжение $\tau_{\text{сг}}$ и характерный размер тела L , а влияние градиента давления учитывается путем расчета эффективной скорости \bar{u}_{∞} , на основе известного коэффициента трения плоской поверхности, т.е. удовлетворяя балансу импульса.

Это дает возможность применить выражение (4.1.3)

$$\gamma = \frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho \bar{u}_{\infty}}. \quad (4.3.5)$$

Отсюда с учетом (4.3.4) запишем

$$\gamma = 0,62 \left(\frac{\tau_{\text{ст}} V}{\rho L} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.3.6)$$

Выражение(4.3.6) (52) является достаточно общим для ламинарных течений и в частном случае из него следует уравнение(4.3.2) с $\tau_{\text{ст}} = u_*^2 \rho$ (4.1.10) и C_f (4.3.1.) .

Турбулентный режим

Для турбулентного пограничного слоя на плоской пластине коэффициенты импульсоотдачи найдем аналогично, как для ламинарного течения, только с локальным и средним коэффициентом трения при турбулентном режиме:

$$C_{f_x} = \frac{0,058}{\text{Re}_x^{0,2}}; \quad C_f = \frac{0,074}{\text{Re}_L}. \quad (4.3.7.)$$

Из (4.1.3) с C_{f_x} и C_f (4.3.7) , получим

$$\gamma_x = 0,029 \bar{u}_{\infty}^{0,8} (\nu / x)^{0,2}, \quad (4.3.8)$$

$$\gamma = 0,037 \bar{u}_{\infty}^{0,8} (\nu / L)^{0,2}. \quad (4.3.9)$$

В общем случае в выражении (4.1.35) коэффициент переноса импульса определим путем интегрирования зависимости (4.1.13):

$$\frac{1}{\gamma} = \int_0^{\delta} \frac{\tau^*(y) dy}{\nu + \nu_T(y)}. \quad (4.3.10)$$

Для наглядности получим формулу для γ на основе применения двухслойной модели пограничного слоя Прандтля. Запишем интеграл (4.3.10) в виде сопротивлений переносу импульса в вязком подслое ($\nu_T = 0$) и турбулентной области ($\nu_T = \chi u_* y$):

$$\frac{1}{\gamma} = \int_0^{\delta_1} \frac{dy}{\nu} + \int_{\delta_1}^{\delta} \frac{dy}{\chi u_* y} \quad (4.3.11)$$

получим

$$\gamma = \frac{u_*}{R_1 + \frac{1}{\chi} \ln(R_\delta / R_1)}, \quad (4.3.12)$$

где $R_\delta = u_* \delta / \nu$ – безразмерная толщина турбулентного пограничного слоя; $R_1 = u_* \delta_1 / \nu = 11,6$ – безразмерная толщина вязкого подслоя на пластине; $\chi = 0,4$ – константа Прандтля.

Результаты расчета γ для пластины по (4.3.9) и (4.3.12) согласуются с расхождением $\pm 7\%$.

Далее с применением трехслойной модели Кармана выражение (4.3.10) получит вид:

$$\frac{1}{\gamma} = \int_0^{\delta_1} \frac{dy}{\nu} + 5 \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{dy}{u_* y} + 2,5 \int_{\delta_2}^{\delta} \frac{dy}{u_* y}, \quad (4.3.13)$$

где $\delta_1 = 5\nu/u_*$; $\delta_2 = 30\nu/u_*$.

Первое слагаемое в выражении (4.3.13) определяет сопротивление переносу импульса в вязком подслое толщиной δ_1 , второе – в переходной (буферной) области толщиной $(\delta_2 - \delta_1)$, а третье – в турбулентной области толщиной $(\delta - \delta_2)$.

Для удобства далее используем безразмерные числа

$$\tilde{R}_1 = \frac{u_* \delta_1}{\nu}; \quad \tilde{R}_2 = \frac{u_* \delta_2}{\nu},$$

где согласно модели Кармана $\tilde{R}_1 = 5$; $\tilde{R}_2 = 30$.

После интегрирования (4.3.13) получим

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\tilde{R}_1}{u_*} + \frac{\tilde{R}_1}{u_*} \ln 6 + \frac{2,5}{u_*} \ln(R_\delta / \tilde{R}_2) \quad (4.3.14)$$

или

$$\gamma = \frac{u_*}{2,792\tilde{R}_1 + 2,5 \ln(R_\delta / \tilde{R}_2)}. \quad (4.3.15)$$

Как известно, в моделях Прандтля и Кармана в вязком подслое $\nu_T = 0$.

Согласно теории Ландау и Левича, подтвержденной Дайслером, турбулентность в вязком подслое описывается функцией

$$\frac{v_T}{v} = (0,124y^+)^4, \text{ при } y^+ \leq 6, \quad (4.3.16)$$

тогда после интегрирования аналогичного выражения (4.3.13) с $v_T(y)$ (4.3.16) получим

$$\gamma = \frac{u_*}{2,288\tilde{R}_1 + 2,5 \ln(R_\delta / \tilde{R}_2)}, \quad (4.3.17)$$

где $\tilde{R}_1 = 6$, для плоского пограничного слоя.

Как следует из расчета по выражениям (4.3.15) и (4.3.17) учет затухания турбулентных пульсаций в вязком подслое в модели Кармана практически слабо влияет на значение коэффициента переноса импульса. Наиболее значительное влияние наблюдается для двухфазных сред.

Выполнено интегрирование выражения (4.1.13) с различными функциями турбулентной вязкости в пограничном слое. Например, с функциями $v_T(y)$ Owen P. получено:

$$\gamma = \frac{u_*}{11,73 + 2,5 \ln \left[(0,4u_*\delta - 3\nu) / (5\nu) \right]}. \quad (4.3.18)$$

Или с функциями Дайсслера и Ханратти

$$\gamma = \frac{u_*}{5,309 + 2,5 \ln R_\delta}. \quad (4.3.19)$$

Ниже показано, что использование полученных выражений для коэффициента импульсоотдачи позволяют получать в явном виде ряд важных характеристик турбулентного пограничного слоя.

Толщина пограничного слоя

Локальная и средняя толщина турбулентного пограничного слоя на пластине имеет вид:

$$\delta_x = \frac{0,37x}{\text{Re}_x^{0,2}}, \quad \delta = \frac{1}{L} \int_0^l \frac{0,37x dx}{\text{Re}_x^{0,2}} = \frac{0,205L}{\text{Re}_l^{0,2}}, \quad (4.3.20)$$

где L – длина пластины, м; x – продольная координата; числа Рейнольдса $\text{Re}_x = u_\infty x / \nu$; $\text{Re}_l = u_\infty L / \nu$.

С применением выражения для γ , толщину пограничного слоя найдем из потокового соотношения (4.1.2):

$$\tau_{\text{ст}} = u_*^2 \rho = \rho \gamma \Delta \bar{u}_\infty, \quad (4.3.21)$$

где $\Delta \bar{u}_\infty$ – средняя движущая сила переноса импульса:

$$\Delta \bar{u}_\infty = \bar{u}_\infty \pm \bar{u}_{\text{гр}},$$

где \bar{u}_∞ – скорость на оси потока, м/с; $\bar{u}_{\text{гр}}$ – скорость на границе раздела, м/с. Для твердых поверхностей $\bar{u}_{\text{гр}} = 0$.

На основе (4.3.21) с учетом коэффициента переноса импульса (4.3.19) получено:

$$R_\delta = \exp \left[0,4 \left(\frac{u_\infty}{u_*} - 5,309 \right) \right]. \quad (4.3.22)$$

Аналогичные выражения для δ или R_δ можно получить из (4.3.21) с коэффициентами γ (4.3.12) и (4.3.15):

$$R_\delta = R_1 \exp \left[0,4 \left(\frac{u_\infty}{u_*} - R_1 \right) \right], \quad (4.3.23)$$

$$R_\delta = \tilde{R}_2 \exp \left[0,4 \left(\frac{u_\infty}{u_*} - 2,792 \tilde{R}_1 \right) \right], \quad (4.3.24)$$

где $\tilde{R}_1 = 5$; $\tilde{R}_2 = 30$; $R_1 = 11,6$.

При использовании вышеприведенных выражений для каналов необходимо учитывать, что скорость на оси потока:

$$u_\infty \approx 1,15 u_{cp} \text{ или } u_\infty = u_{cp} + 3,75 u_*.$$

В итоге уравнение (4.1.35) решается итерационным методом с одним из выражений для δ . Результатом решения являются средние значения динамической скорости и толщины турбулентного пограничного слоя.

Для проверки полученных уравнений выполнены сравнения результатов расчета толщины пограничного слоя для пластины (рис.4.2, 4.3).

На рис. 4.2 представлена зависимость толщины пограничного слоя на пластине от продольной координаты x .

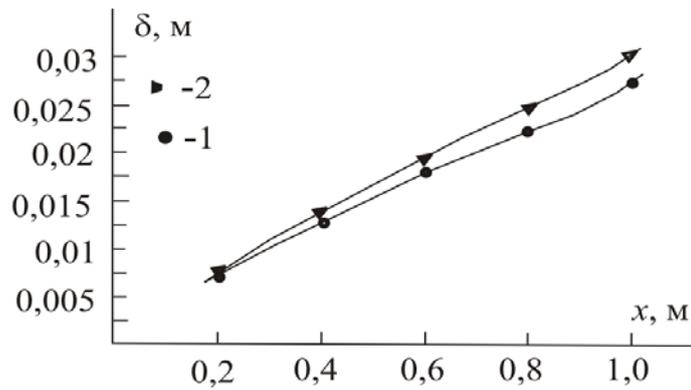


Рис. 4.2. Зависимость толщины пограничного слоя на пластине от продольной координаты. Рабочая среда – воздух; $u_{cp}=7,5$ м/с; 1 – расчет по уравнению(4.3.22); 2 – расчет по уравнению (4.3.20) .

Толщина пограничного слоя вычислялась по уравнению (4.3.20) и выражению (4.3.22) .

В уравнении (4.3.22) динамическая скорость определена по уравнению (4.1.10), где локальный коэффициент трения на пластине $C_{f_x} = 0,058 / Re_x^{0,2}$.

На рис. 4.3 представлены зависимости толщин пограничного слоя на пластине от числа Рейнольдса.

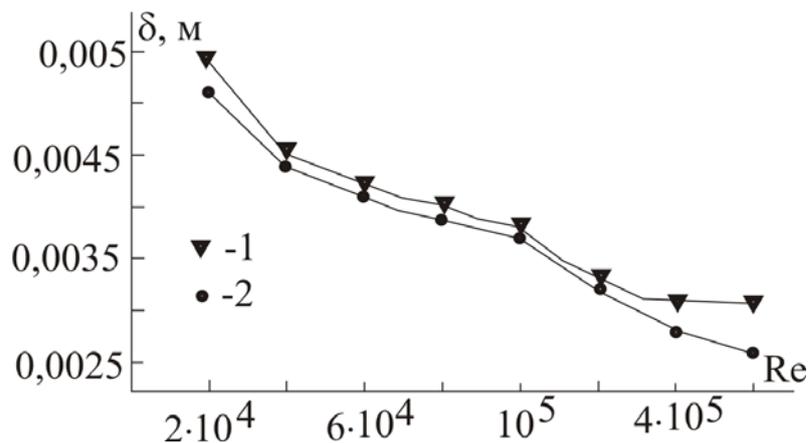


Рис.4.3. Зависимость толщины пограничного слоя на пластине от числа Рейнольдса. Рабочая среда – воздух; $x=0,1$ м; 1 – расчет по уравнению (4.3.20); 2 – расчет по уравнению (4.3.22) .

В результате проверки уравнения (4.3.22) получены удовлетворительные согласования с известными выражениями. Аналогичные результаты дают и уравнения (4.3.21) и (4.3.23) .

Т.к. полученные выражения (4.3.21)-(4.3.23) дают близкие результаты (± 5), то для вычислений удобнее пользоваться более компактной формулой (4.3.22), полученной на основе применения модели Прандтля.

4.4. Расчет динамической скорости

В качестве примера найдем по выражению (4.1.35) значение u_* для турбулентного потока на пластине.

Средняя диссипация энергии на пластине:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\tau_{ст} F u_\infty}{V_\delta} = \frac{u_*^2 \rho u_\infty}{\delta}, \quad (4.4.1)$$

где F – площадь поверхности пластины, m^2 ; $V_\delta = \delta F$ – объем пограничного слоя, m^3 .

Из (4.1.35) и (4.4.1) следует выражение (4.1.11).

Сравнение результатов расчета значения u_* для пластины по выражениям (4.1.10) и (4.1.11) с γ (4.3.12) , (4.3.15) или (4.3.19) показывает их согласование с расхождением не более 5-7%.

Аналогичную проверку сделаем для потока в трубе, где средняя диссипация энергии имеет вид (4.2.7). Тогда получим:

$$u_* = \left(\frac{u_{cp}^3 \lambda \gamma}{8} \right)^{0,25} \quad (4.4.2)$$

На рис. 4.4 представлена графическая зависимость динамической скорости от числа Рейнольдса в трубе.

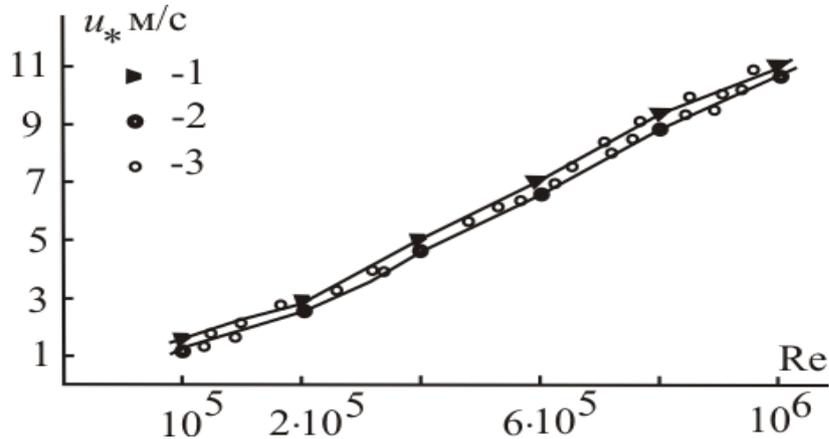


Рис. 4.4. Зависимость динамической скорости от числа Рейнольдса в трубе. Рабочая среда – воздух; $d_s=0,05$ м; 1 – расчет по (4.1.9), 2 – расчет по (4.4.2); 3 – известные экспериментальные данные.

Динамическая скорость определяется решением системы уравнений (4.4.2) с γ (4.3.22) – кривая 2 и известного уравнения (4.1.10) (кривая 1), где коэффициент сопротивления определяется по формуле Блазиуса.

Далее рассмотрим выражение для коэффициентов импульсоотдачи (4.3.12) , (4.3.15),(4.3.17) и (4.3.19). Например, из выражения (4.3.12) следует, что сопротивление переносу импульса сосредотачивается в вязком подслое $\frac{R_1}{u_*}$ и в турбулентной области

пограничного слоя $\left(\frac{2,5 \ln(R_\delta / R_1)}{u_*} \right)$.

Многочисленные расчеты γ показывают, что сумма слагаемых в знаменателе выражения (4.3.12) примерно составляет $R_1 + 2,5 \ln(R_\delta / R_1) = 15 \div 18$. Если приближенно взять среднее значение, то получим $\gamma \approx u_* / 16,5$. Аналогичная оценка следует и из выражений (4.3.15), (4.3.17) и (4.3.19). Тогда в формуле (4.4.2) можно записать:

$$u_* \approx \left(\frac{u_{cp}^3 \lambda u_*}{132} \right)^{0,25} = 0,196 u_{cp} \lambda^{0,333}. \quad (4.4.3)$$

Как показывают расчеты значений u_* по (4.4.3) данное выражение дает удовлетворительные результаты (± 20) для различных контактных устройств при турбулентном режиме движения потоков.

Полуэмпирические методы. Турбулентный режим

Значение динамической скорости можно получить из решения системы уравнений (4.1.35) с γ по (4.3.12), (4.3.15) или (4.3.19) и δ по (4.3.22) или (4.3.24). Для сокращения времени расчета рассмотрим полуэмпирический подход определения динамической скорости на основе использования средней диссипируемой энергии.

Для турбулентного движения потоков используют соотношение:

$$\varepsilon_0 = k^4 \bar{\varepsilon}, \quad (4.4.4)$$

где k – эмпирический коэффициент пропорциональности.

Тогда выражение для динамической скорости представляют в виде:

$$u_* = k \left(\frac{\bar{\varepsilon} \nu}{\rho} \right)^{0,25}, \quad (4.4.5)$$

где коэффициент k находят экспериментальным путем для каждой конструкции аппарата [11,23].

Далее рассмотрим турбулентный режим движения среды на пластине и в трубе.

Выражение (4.4.5) для динамической скорости справедливо с коэффициентом пропорциональности k .

Для пластины из (4.4.1) и(4.4.5) получим:

$$u_* = k \left(\frac{u_*^2 \nu u_\infty}{\delta} \right)^{0,25}. \quad (4.4.6)$$

Отсюда запишем коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{\sqrt{u_*}}{(\nu u_\infty / \delta)^{0,25}} = \left(\frac{u_\infty C_f \delta}{2\nu} \right)^{0,25} = (R_\delta C_f / 2)^{0,25}, \quad (4.4.7)$$

где $R_\delta = u_\infty \delta / \nu$ – безразмерная толщина пограничного слоя.

При средних значениях для пластины (4.3.19) $\delta = 0,205L / \text{Re}^{0,2}$ и $C_f = 0,074 / \text{Re}^{0,2}$ из (4.4.7) получим $k = 0,34 \text{Re}^{0,2}$.

В трубе:

$$k = \frac{u_{\infty} \sqrt{\lambda/8}}{(\lambda u_{\infty}^3 \nu / 2d)^{0,25}} = 0,42(\text{Re}\lambda)^{0,25}. \quad (4.4.8)$$

При $\lambda = 0,316/\text{Re}^{0,25}$ из (4.4.8) следует $k = 0,31\text{Re}^{0,187}$.

Полученные выражения для коэффициента пропорциональности $k = f(\text{Re}^n)$, ($n = 0,187$ и $n = 0,2$) в зависимости (4.4.5) объясняют полученные экспериментальным путем значения $k = 1,6 \div 2,7$ для аппаратов различных конструкций.

Для определения коэффициента k в (4.4.5) теоретическим путем запишем поток импульса (4.3.21) с динамической скоростью (4.4.5). Получим

$$\gamma \Delta u_{\infty} = k^2 \left(\frac{\bar{\varepsilon} \nu}{\rho} \right)^{0,5}. \quad (4.4.9)$$

Отсюда найдем коэффициент

$$k = (\gamma \Delta \bar{u}_{\infty})^{0,5} \left(\frac{\bar{\varepsilon} \nu}{\rho} \right)^{-0,25}. \quad (4.4.10)$$

Из (4.4.5) с коэффициентом (4.4.10) получаем динамическую скорость, аналогичную (4.1.11). Таким образом, используя различные подходы, приходим к единой формуле для расчета u_* в виде (4.1.11).

Коэффициенты трения

Рассмотрим применение выражений для коэффициентов импульсоотдачи в форме коэффициентов трения.

Из (4.1.11) с γ (4.3.12) получим динамическую скорость в виде:

$$u_* = \frac{u_\infty}{R_1 + \frac{1}{\chi} \ln(R_\delta / R_1)}. \quad (4.4.11)$$

Выражение (4.4.11) связывает динамическую скорость трения u_* с характеристиками турбулентного пограничного слоя в двухслойной модели Прандтля – R_δ, R_1, χ . Расчет u_* по (4.4.11) удовлетворительно согласуется с u_* , полученному по выражению (10) $u_* = f(C_f)$.

С использованием выражения (4.4.11) можно записать коэффициент трения

$$C_f = 2 \left[R_1 + \frac{1}{\chi} \ln(R_\delta / R_1) \right]^{-2}. \quad (4.4.12)$$

Аналогично с выражением (4.3.15)

$$C_f = 2 \left[2,792 \tilde{R}_1 + 2,5 \ln(R_\delta / \tilde{R}_2) \right]^{-2} \quad (4.4.13)$$

и с формулой (4.3.18)

$$C_f = 2[5,309 + 2,5 \ln R_\delta]^{-2} . \quad (4.4.14)$$

Полученные выражения для коэффициента трения (4.4.12)-(4.4.14) позволяют исследовать влияние толщины вязкого подслоя (R_1 или \tilde{R}_1), буферной области \tilde{R}_2 и всего пограничного слоя R_δ на перенос импульса с учетом различных возмущений.

Так, например, на шероховатой поверхности с выступами, соизмеримыми с толщиной вязкого подслоя, выражение (4.4.12) получит вид

$$C_f = 2 \left(R_{1w} + \frac{1}{\chi} \ln \frac{R_\delta}{R_{1w}} \right)^{-2} , \quad (4.4.15)$$

где R_{1w} – толщина вязкого подслоя с учетом шероховатостей, $R_{1w} = (\delta_1 - h)u_* / \nu$, h – высота выступов шероховатостей, м (при $h < \delta_1$).

Из выражения(4.4.15) следует, что при увеличении h коэффициент трения возрастает, что соответствует известным экспериментальным данным.

4.5. Зернистые и насадочные слои

Рассмотрим применение полученных выражений для u_* , γ и ν_T при движении газов или жидкостей в насадочных или зернистых слоях.

Насадочные слои тепломассообменных аппаратов подразделяются на регулярные и нерегулярные (засыпанные внавал). Нерегулярные насадки состоят из элементов с размерами 50мм и менее

и имеют различную форму. Турбулентность в таких слоях возникает значительно раньше, чем в гладких трубах и границе ламинарного режима соответствует значению $Re = 15 - 40$. Полностью развитый турбулентный режим наступает при значениях Re от $2 \cdot 10^3$ до $6 \cdot 10^3$, где $Re = u_{cp} d_э / \nu$. При обычно встречающихся на практике значениях Re от 40 до $2 \cdot 10^3$ соответствует переходному режиму.

Для ламинарного режима движения газа или жидкости ($Re < 40$) динамическую скорость найдем, используя выражение (4.1.19). Тогда из (4.1.19), (4.5.1) и (4.4.17) получим

$$u_* = \left(\frac{\Delta p u_{cp} \nu}{\rho H} \right)^{1/4} = \left(\frac{\lambda u_{cp}^3 \nu a_V}{8 \varepsilon_{св}^3} \right)^{1/4}. \quad (4.5.1)$$

где, H – высота насадочного слоя, м; a_V - удельная поверхность насадки, m^2/m^3 ; $\varepsilon_{св}$ – удельный свободный объем; $d_э = 4\varepsilon_{св} / a_V$.

Коэффициент гидравлического сопротивления насадочного или зернистого слоя находится экспериментально для каждого типа элемента (засыпки) и обычно дается в виде функции $\lambda = f(Re)$.

Коэффициент переноса импульса для ламинарного режима в насадке запишем из выражения (4.3.6) и (4.5.3)

$$\gamma = 0,62 \left(\frac{\lambda u_{cp}^3 \nu a_V}{8 \varepsilon_{св}^3} \right)^{3/4} \left(\frac{\nu}{L} \right)^{1/3}. \quad (4.5.2)$$

Современные насадки, которые по форме значительно отличаются от колец и седел, способствуют развитию интенсивной

турбулентности в ядре потока. Однако, элементы насадок, образованными изогнутыми полосами металлической ленты шириной 3-5мм, имеют особенности по формированию пограничного слоя. Известно, что при контакте турбулентного потока с обтекаемой поверхностью на передней кромке образуется ламинарный пограничный слой. При достижении некоторого критического размера ламинарное движение в пограничном слое становится неустойчивым и развивается турбулентность. Для элементов насадок, расположенных далее первого ряда, начальный участок ламинарного слоя подвержен турбулентным воздействиям из ядра потока. Такой пограничный слой классифицируется как псевдоламинарный. В первом приближении среднюю толщину псевдоламинарного пограничного слоя можно вычислить по выражению (4.1.26), а затем уточнить с учетом воздействия турбулентных пульсаций. Тогда турбулентную вязкость при $y \geq \delta$ найдем с использованием модели локальной изотропной турбулентности по уравнениям (4.2.5) , (4.2.7), получим

$$v_T = 7,5\delta \frac{u_*^2}{u_{cp}}, \quad (4.5.3)$$

где динамическую скорость для насадочного слоя можно записать, используя приближенное выражение (4.4.3), тогда получим

$$u_* = 0,196u_{cp}\lambda^{0,333} = 0,196u_{cp} \left(\frac{\Delta p}{H} \left(\frac{\rho u_{cp}^2}{2d_s} \right)^{-1} \right)^{0,333}, \quad (4.5.4)$$

где коэффициент сопротивления записан в известной форме для насадочного слоя, используя перепад давления.

Выражение (4.5.3) с динамической скоростью (4.5.4) запишется в виде:

$$v_T = 0,288\delta u_{cp} \lambda^{0,666}. \quad (4.5.5)$$

В неупорядоченных насадочных слоях, образованных из металлических насадок, развивается высокая интенсивность турбулентности ($Re > 2 \cdot 10^3$), что дает возможность использовать модель локальной изотропной турбулентности со средней объемной скоростью диссипации энергии выражение (4.2.5), где $\bar{\varepsilon}$ запишем в виде:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta p S u_{cp}}{\rho V_{сл} \varepsilon_{св}} = \frac{\Delta p u_{cp}}{\rho H \varepsilon_{св}} = \frac{\lambda u_{cp}^3}{2 d_э \varepsilon_{св}}, \quad (4.5.6)$$

где $V_{сл}$ – объем слоя, m^3 ; S – площадь поперечного сечения, m^2 ; H – высота слоя, m .

Перепад давления слоя насадки в выражении (4.5.6) записан, используя аналог выражения Дарси-Вейсбаха

$$\Delta p = \lambda \frac{H}{d_э} \frac{\rho u_{cp}^2}{2}, \quad (4.5.7)$$

где $d_э = 4\varepsilon_{св} / a_V$ – эквивалентный диаметр насадки, m .

Из выражения (4.2.5) с u_* (4.5.4) и $\bar{\varepsilon}$ (4.5.6) получим:

$$v_T = \frac{7,5(0,196u_{cp}\lambda^{0,333})^4}{\Delta p u_{cp} / (H \varepsilon_{св} \rho)} = 7,5 d_э 2 \varepsilon_{св} 0,196^4 u_{cp} \lambda^{0,333} = 0,113 u_* d_э \varepsilon_{св} \quad (4.5.8)$$

или

$$\frac{v_T}{\nu} = 0,022 \operatorname{Re} \varepsilon_{св} \lambda^{0,333} \quad (4.5.9)$$

В итоге из (4.5.7) (93) следует аналог выражения Прандтля (4.2.6), где $\delta \approx 0,113 d_э \varepsilon_{св} / \chi$.

Динамическая скорость при турбулентном режиме в насадке находится из решения системы уравнений (4.2.1) и (4.3.12). Многочисленные расчеты для разных типов насадок показывают, что значение u_* можно вычислить по простой зависимости (4.4.5), где для насадочного слоя $k \approx 1,8-2,0$. Удовлетворительные результаты так же дает выражение (4.4.3) с коэффициентом сопротивления насадочного слоя.

4.6 Аппараты с механическим перемешиванием и гидроциклоны

Величину средней диссипируемой энергии в аппарате с мешалкой выразим в виде отношения мощности N , затрачиваемой на перемешивание, к объему жидкости в аппарате

$$\bar{\varepsilon} = \frac{4N}{\pi D^2 H_{ж}}, \quad (4.6.1)$$

где D – диаметр аппарата, м; $H_{ж}$ – высота уровня жидкости, м.

При известном значении ε динамическую скорость на стенке можно вычислить из решения системы уравнений (4.2.1), (4.3.12) и (4.3.22). Расчеты показывают с достаточной для прикладных расчетов точностью, что можно использовать выражение (4.4.5) с $k \approx 2,0$. Тогда получим

$$u_* = 2 \left(\frac{4Nv_{жс}}{\rho\pi D^2 H_{жс}} \right)^{0,25} \quad (4.6.2)$$

Аналогичное выражение получено для гидроциклона

$$u_* = 1,55 \left(\frac{\Delta p S u_{жс} v_{жс}}{\rho_{жс} V_{жс}} \right)^{0,25}, \quad (4.6.3)$$

где ΔP - перепад давления в гидроциклоне, Па; S - площадь входного патрубка, м²; $u_{жс}$ - скорость жидкости в патрубке, м/с; $V_{жс}$ - объем жидкости в гидроциклоне, м³.

4.7. Основные уравнения для расчета гидромеханических характеристик

Таблица 4. 1. Основные уравнения для расчета

№	<i>Динамическая скорость трения, м/с</i>
(4.1.11)	в общем виде: $u_* = \sqrt{\gamma u_\infty}$
(4.1.35)	$u_* = \left(\frac{\bar{\varepsilon} \delta \gamma}{\rho} \right)^{0,25}$.
(4.1.22)	на пластине (ламинарный режим) $u_* = \left(\frac{u_\infty v}{\delta} \right)^{0,5}$
(4.1.24)	$u_*(x) = 0,447 u_\infty^{0,75} (v/x)^{0,25}$
(4.1.27)	$u_* = 0,548 u_\infty^{0,75} (v/L)^{0,25}$

(4.1.29)	в трубе (ламинарный режим) $u_* = \left(\frac{4u_\infty v}{d}\right)^{0,5}$
(4.4.2)	в трубе (турбулентный режим) $u_* = \left(\frac{u_{cp}^3 \lambda \gamma}{8}\right)^{0,25}$
(4.4.3)	обобщенная приближенная формула $u_* = 0,196 u_{cp} \lambda^{0,333}$
(4.4.5)	<p>обобщенная формула (турбулентный режим)</p> $u_* = k \left(\frac{\bar{\epsilon} v}{\rho}\right)^{0,25}$ <p>Для трубы $k = 0,31 Re^{0,187}$</p> <p>Для пластины $k = 0,34 Re^{0,2}$</p> <p>Для насадочного слоя $k = 1,8 \div 2,0$</p> <p>В аппарате с мешалкой $k = 2,0$</p> <p>В гидроциклоне $k = 1,55$</p> <p>Шахматные и коридорные пучки труб $k = 2,0$</p>
(4.5.6)	<p>для насадочного слоя (ламинарный режим) $u_* = \left(\frac{\Delta p u_{cp} v}{\rho H}\right)^{0,25}$</p> <p>для насадочного слоя (турбулентный режим)</p> $u_* = 1,8 \left(\frac{\Delta p u_{cp} v}{\rho H}\right)^{0,25}$
(4.6.1)	$u_* \approx 0,196 u_{cp} \left(\frac{\Delta p}{H} \left(\frac{\rho u_{cp}^2}{2d_s}\right)^{-1}\right)^{0,333}$
(4.6.2)	аппарат с мешалкой $u_* = 2 \left(\frac{4N v_{жс}}{\rho \pi D^2 H_{жс}}\right)^{0,25}$
(4.6.3)	Гидроциклон $u_* = 1,55 \left(\frac{\Delta p S u_{жс} v_{жс}}{\rho_{жс} V_{жс}}\right)^{0,25}$
	Коэффициенты переноса импульса
(4.2.13)	<p>Ламинарный режим на пластине</p> $\gamma_x = 0,332 \sqrt{\frac{v u_\infty}{x}}, \quad \gamma = 0,664 \sqrt{\frac{v \bar{u}_\infty}{L}}$

(4.3.6)	<p>обобщенная формула для ламинарного режима</p> $\gamma = 0,62 \left(\frac{\tau_{ст} \nu}{\rho L} \right)^{0,333}$
(4.3.12)	<p>турбулентный режим $\gamma = \frac{u_*}{R_1 + \frac{1}{\chi} \ln(R_\delta / R_1)}$</p>
(4.3.15)	$\gamma = \frac{u_*}{2,792 \tilde{R}_1 + 2,5 \ln(R_\delta / \tilde{R}_2)}$
(4.4.3)	<p>Толщина пограничного слоя – турбулентный режим</p> $R_\delta = R_1 \exp \left[0,4 \left(\frac{u_\infty}{u_*} - R_1 \right) \right]$
(4.4.4)	$R_\delta = \tilde{R}_2 \exp \left[0,4 \left(\frac{u_\infty}{u_*} - 2,792 \tilde{R}_1 \right) \right]$
(4.29)	$R_\delta = \exp \left[0,4 \left(\frac{u_\infty}{u_*} - 5,5 \right) \right]$
	<p>Турбулентная вязкость</p>
(4.2.5)	<p>в общем виде $\nu_T = 7,5 \frac{u_*^4}{\varepsilon}$</p>
(4.2.10)	<p>для трубы $\nu_T = 0,93 u_{cp} \delta \lambda$</p>
(4.5.9)	<p>в насадочном слое $\nu_T = 7,5 \delta \frac{u_*^2}{u_{cp}}$, $40 < Re < 2 \cdot 10^3$</p>
(4.5.8)	$\nu_T = 0,022 u_{cp} d_p \varepsilon_{ce} \lambda^{0,333}, Re > 2 \cdot 10^3$
	<p>Коэффициенты трения (турбулентный режим)</p>
(4.5.1)	$C_f = 2 \left[R_1 + \frac{1}{\chi} \ln(R_\delta / R_1) \right]^{-2}$
(4.5.2)	$C_f = 2 \left[2,792 \tilde{R}_1 + 2,5 \ln(R_\delta / \tilde{R}_2) \right]^{-2}$
(4.5.5)	<p>на шероховатой поверхности</p> $C_f = 2 \left(R_{1ш} + \frac{1}{\chi} \ln \frac{R_\delta}{R_{1ш}} \right)^{-2}$

Контрольные вопросы

1. Кто ввел понятие турбулентной вязкости?
2. Понятия коэффициента переноса импульса?
3. Толщина пограничного слоя на пластине.
4. Запишите уравнение диссипация энергии на пластине и в трубе.
5. Что такое турбулентная вязкость.
6. Определение динамической скорости.
7. Понятие коэффициента трения.
8. Зернистые и насадочные слои. Классификация.

ГЛАВА 5

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОТДАЧИ

5.1 Формулы для расчета коэффициентов теплоотдачи

Уравнение аддитивности термических сопротивлений для плоской стенки:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_{ст}}{\lambda_{ст}} + \frac{1}{\alpha_2}, \quad (5.1.1)$$

где K – коэффициент теплопередачи, Вт/(м² град).

Для многослойной стенки и с учетом сопротивлений загрязнений на поверхности выражение (5.1.1) записывается в виде

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{ст_i}}{\lambda_{ст_i}} + \frac{1}{\alpha_2} + \sum r_i, \quad (5.1.2)$$

где r_i – термическое сопротивление загрязнений (накипи, ржавчины и т.д.).

Для случая теплообмена через чистую однослойную цилиндрическую стенку значение K , отнесенное к 1 метру длины трубы, имеет вид, Вт/(м град):

$$K = \left[\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_{ст}} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right]^{-1}. \quad (5.1.3.)$$

Используя коэффициенты теплопередачи (5.1.1) – (5.1.3), основное уравнение теплопередачи в интегральном виде запишем в форме

$$Q = KF\tau \Delta t_{\text{ср}}, \quad (5.1.4)$$

где $\Delta t_{\text{ср}}$ – средняя разность температур.

Ориентировочные значения коэффициентов теплоотдачи для различных видов конвективного теплообмена

Характеристика движения	Величина α , Вт/(м ² · К)
Свободная гравитационная конвекция в газах	5–30
Свободная конвекция воды	10 ² –10 ³
Вынужденная конвекция газов	10–500
Вынужденная конвекция воды	50–2·10 ⁴
Кипение воды	2·10 ³ –4·10 ⁴
Жидкие металлы	10 ² –3·10 ⁴
Пленочная конденсация водяных паров	4·10 ³ –1,5·10 ⁴
Капельная конденсация водяных паров	4·10 ⁴ –1,5·10 ⁵

Ниже приводятся различные выражения для расчета коэффициентов теплоотдачи.

Теплоотдача от пластины

Ламинарный режим ($Re < 5 \cdot 10^5$)

Локальная теплоотдача (критериальное выражение)

$$Nu_x = 0,332\sqrt{Re_x} Pr^{0,33}. \quad (5.1.5)$$

Средняя теплоотдача

$$Nu_f = 0,67 Re_L^{0,5} Pr^{0,33}. \quad (5.1.6)$$

Турбулентный режим

Критериальное выражение:

$$Nu_f = 0,037 Re^{0,8} Pr^{0,43} \left(\frac{Pr}{Pr_{ст}} \right)^{0,25}. \quad (5.1.7.)$$

Теоретические уравнения на основе (4.3.12) и (4.3.19):

$$Nu_f = \frac{Re \sqrt{C_f / 2} Pr^{0,43}}{R_1 + \frac{1}{\chi} \ln(R_8 / R_1)}, \quad (5.1.8)$$

$$Nu_f = \frac{Re \sqrt{C_f / 2} Pr^{0,43}}{5,309 + 2,5 \ln R_8}, \quad (5.1.9.)$$

где динамическая скорость $u_* = U_\infty \sqrt{C_f / 2}$; $C_f = 0,073 Re_L^{-0,2}$.

Средняя толщина пограничного слоя

$$\delta = 0,205 \frac{L}{\text{Re}_L^{0,2}}. \quad (5.1.10)$$

Уравнение гидродинамической аналогии Чилтона – Кольборна

$$\alpha = \rho c_p U_\infty \frac{C_f}{2 \text{Pr}^{2/3}}. \quad (5.1.11)$$

Обобщение гидродинамической аналогии

$$\frac{C_f / 2}{\text{St}_T} = K_1 + K_2 \sqrt{\frac{C_f}{2}} \left(\text{Pr}^{\frac{2}{3}} - 1 \right). \quad (5.1.12)$$

$$K_1 = 0,93; K_2 = 12,5.$$

Теплоотдача в трубе

Ламинарный режим

$$\text{При } \frac{\text{Pe} \cdot d_\varepsilon}{L} < 20$$

$$\text{Nu} = 1,4 \left(\text{Re} \frac{d_\varepsilon}{L} \right)^{0,4} \text{Pr}^{0,33}. \quad (5.1.13)$$

$$\text{При } 2300 < \text{Re} < 10^4$$

$$\text{Nu} = 0,08\text{Re}^{0,9}\text{Pr}^{0,43}(\text{Pr}/\text{Pr}_{\text{ст}})^{0,25}. \quad (5.1.14)$$

Турбулентный режим (Re > 10⁴)

$$\text{Nu} = 0,021\text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,43}, \quad (5.1.15)$$

где $u_* = U_\infty \sqrt{\xi/8}$, $\xi = (1,82 \lg \text{Re} - 1,64)^{-2}$, $\delta \approx 0,4R$. (5.1.16)

Обобщение опытных данных различными авторами

$$\text{Nu} = \frac{0,023 \text{Pr} \text{Re}^{0,8}}{1 + 2,14 \text{Re}^{-0,1} \left(\text{Pr}^{2/3} - 1 \right)}, \quad (5.1.17)$$

$$\text{Nu} = 0,021 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,43}, \quad (5.1.18)$$

$$\text{Nu} = \frac{\frac{\xi}{8} \text{Pr} \text{Re}}{K_1 + 12,7 \sqrt{\xi/8} \left(\text{Pr}^{2/3} - 1 \right)}, \quad (5.1.20)$$

где $K_1 = 1 + 900/\text{Re}$.

Так же можно использовать выражения (5.1.8) и (5.1.9), где $C_f = \xi/4$.

Теплоотдача в канале с элементами интенсификации

Турбулентный режим

$$\alpha = 0,158 \rho c_p (\tau/\rho)^{3/7} (v/d)^{1/7} \text{Pr}^{-0,66}, \quad (5.1.21)$$

где $\tau = \rho U_{\text{ср}}^2 \xi_{\text{ш}}/8$, $\xi_{\text{ш}}$ - коэффициент сопротивления шероховатого канала.

Закрученное движение однофазного потока в трубке при $10^4 < \text{Re} < 10^6$

$$\alpha = \rho \cdot c_p \cdot 0,4 \cdot \text{Re}^{0,1} \left(\frac{\varepsilon v}{\rho} \right)^{0,25} \text{Pr}^{-0,66}, \quad (5.1.22)$$

где $\varepsilon = \frac{\Delta p \cdot U_{\text{ср}}}{H \cdot \cos \theta}$, $\text{Re} = \frac{d \cdot U_{\text{ср}}}{v \cdot \cos \theta}$; θ – угол закрутки.

Теплоотдача от газожидкостных смесей к стенке

$$\alpha_{\text{ж}} = 0,159 \rho_{\text{ж}} c_{p\text{ж}} (\tau/\rho_{\text{ж}})^{4/9} (v_{\text{ж}}/l)^{1/9} \text{Pr}^{-0,66}, \quad (5.1.23)$$

где $u_* = \left[(\tau_{\text{ж}}/\rho)^2 + \chi^4 v_{\text{ж}} g u_{\text{от}} \varphi (1 - \varphi)^2 \right]^{0,25}$; $\tau = u_*^2 \rho$; $l = d_{\text{э}}$,

где φ – газосодержание; $u_{\text{от}}$ – относительная скорость фаз; $\chi = 1,9$.

Теплоотдача поперечно-обтекаемых пучков труб

Ламинарный режим ($Re < 2 \cdot 10^3$)

$$\alpha = 0,62 \rho c_p \left(\frac{2\tau v}{\pi \rho d} \right)^{1/3} Pr^{-0,66} \quad (5.1.24)$$

$$\tau \approx \Delta p / \pi.$$

Турбулентный режим

$$\alpha = \rho c_p \frac{0,37}{Re^m} \left(\frac{\bar{\varepsilon} v}{\rho} \right)^{0,25} Pr^{-0,66}, \quad (5.1.25)$$

где число Рейнольдса $Re = \bar{U}_m d / \nu$; m для гладкостенных шахматных пучков труб равно $m = 0,066$, а для коридорных - $m = 0,08$. Число Re вычисляется через среднюю скорость в узком сечении пучка \bar{U}_m и диаметр трубы.

Диссипация энергии в объеме пучка

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta p S_m \bar{U}_m}{V}, \quad (5.1.26)$$

где S_m – площадь узкого сечения пучка, m^2 ; V – объем жидкости в пучке труб, m^3 , $Q = S_m \bar{U}_m$ - расход жидкости, m^3/c .

Теплоотдача в насадочных и зернистых слоях

Ламинарный режим (Re < 40)

$$\alpha = 0,62 \rho c_p \left(\frac{\Delta p \varepsilon_{CB} v}{a_v H L \rho} \right)^{1/3} \text{Pr}^{-0,66}, \quad (5.1.27)$$

где $\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta p_{\Gamma} W_{\kappa}}{\varepsilon_{CB} H}$; $L = \pi \cdot d_{\text{э}} / 2$; $d_{\text{э}} = 4 \cdot \varepsilon_{CB} / a_v$. (5.1.28)

Турбулентный режим

$$\alpha = 0,159 \rho c_p (\tau / \rho)^{4/9} (v / L)^{1/9} \text{Pr}^{-0,66}, \quad (5.1.29)$$

$$L = \pi \cdot d_{\text{э}} / 2; u_* = \sqrt{\tau / \rho} = 1,8 (\bar{\varepsilon} v / \rho)^{0,25}$$

Обобщенное выражение

$$\alpha = 0,175 \rho c_p \left(\frac{\bar{\varepsilon} v}{\rho} \right)^{0,25} \text{Pr}^{-0,66}, \quad (5.1.30)$$

или в критериальном виде

$$Nu_{\text{э}} = 0,175 \text{Re}_{\text{э}}^{0,75} \text{Pr}^{0,33} (\xi / 2)^{0,25},$$

где $Nu_{\text{э}} = \alpha \cdot d_{\text{э}} / \lambda$, $\text{Re}_{\text{э}} = W_{\kappa} d_{\text{э}} / (v \cdot \varepsilon_{CB})$.

Теплоотдача к стенке в аппарате с мешалкой

Турбулентный режим

$$\alpha = 0,159 \rho c_p (\tau / \rho)^{4/9} (v / L)^{1/9} \text{Pr}^{-0,66}, \quad (5.1.31)$$

$$\text{где } u_* = \sqrt{\tau / \rho_{\text{ж}}} = 2 \left(\frac{\bar{\varepsilon} v_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}}} \right)^{0,25}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{4N}{\pi D_a^2 H_{\text{ж}}}.$$

Теплоотдача в пленочных аппаратах

Течение по плоской стенке

Турбулентный режим

$$\alpha_{\text{ж}} = \rho_{\text{ж}} c_p u_* \sqrt{\frac{u_* a \rho_{\text{ж}}}{\sigma}} \left(\text{arctg} \left(R_{1\text{ж}} v_{\text{ж}} \sqrt{\frac{\rho_{\text{ж}} u_*}{a \sigma}} \right) \right)^{-1}. \quad (5.1.32)$$

$$\text{где } R_{1\text{ж}} = \sqrt{\frac{\sigma}{v_{\text{ж}} \rho_{\text{ж}} u_*}} \text{tg} \left(\Delta \bar{U}_{\infty} \sqrt{\frac{v_{\text{ж}} \rho_{\text{ж}}}{u_* \sigma}} \right); \quad u_* = \sqrt{g \delta_0}, \quad \Delta \bar{U}_{\infty} = 1,15 \cdot U_{\text{ср}}.$$

Обобщение опытных данных Лабунцовым

$$\text{Nu}_{\text{пл}} = \frac{\alpha_{\text{ж}} \theta}{\lambda_{\text{ж}}} = 0,0325 \text{Re}_{\text{пл}}^{0,25} \text{Pr}^{0,5}, \quad (5.1.33)$$

где $Re_{пл} = q / v_{ж} = U_{ср} \delta_0 / v_{ж}$; $\theta = (v_{ж}^2 / g)^{1/3}$ – приведенная толщина пленки, м.

5.2. Пример расчета коэффициентов теплоотдачи при движении турбулентного потока вдоль плоской пластины

Пусть стационарный турбулентный ($Re > 10^5$) однофазный поток обтекает плоскую гладкую пластину. Требуется определить коэффициент теплоотдачи от потока к стенке пластины. Для этого воспользуемся уравнениями

$$Nu_f = \frac{Re \sqrt{C_f / 2} Pr^{0,49}}{R_1 + \frac{1}{\chi} \ln(R_\delta / R_1)} \quad (5.2.1.)$$

$$Nu = 0,037 Re^{0,8} Pr^{0,43}. \quad (5.2.2.)$$

$$\alpha = \rho c_p U_\infty \frac{C_f}{2}; \quad Nu_f = \frac{C_f}{2} Re Pr^{1/3}, \quad (5.2.3.)$$

$$2 Pr^3$$

где $u_* = U_\infty \sqrt{C_f / 2}$; $C_f = 0,074 Re_L^{-0,2}$; $Re_L = U_\infty L / \nu$.

Пример расчета

Пластина длиной $L=1,0$ м нагревается водой, имеющей среднюю скорость $U_\infty = 1$ м/с и температуру $t_\infty = 80$ °С.

Физические свойства воды при $t=80$ °С:

– плотность $\rho = 972$, кг/м³;

– коэффициент динамической вязкости $\mu = 0,355 \cdot 10^{-3}$, Па·с;

– коэффициент кинематической вязкости

$$\nu = \mu / \rho = 3,65 \cdot 10^{-7}, \text{ м}^2/\text{с};$$

– удельная теплоемкость $c_p = 4190$, Дж/(кг·К) ;

– коэффициент теплопроводности $\lambda = 67,5 \cdot 10^{-2}$, Вт/(м·К) ;

– коэффициент температуропроводности

$$a = \lambda / \rho c_p = 1,66 \cdot 10^{-7}, \text{ м}^2/\text{с}.$$

Расчет параметров:

– число Прандтля $Pr = \mu c_p / \lambda = \nu / a = 2,21$;

– число Рейнольдса $Re_L = U_\infty L / \nu = 2724796$;

– средняя толщина пограничного слоя $\delta = 0,2L / Re_L^{0,2} = 0,0103$, м;

– коэффициент сопротивления пластины

$$C_f = 0,073 / Re_L^{0,2} = 0,00377;$$

– динамическая скорость в пограничном слое

$$u_* = U_\infty \sqrt{C_f / 2} = 0,0434, \text{ м/с};$$

– коэффициент теплоотдачи, рассчитанный по уравнениям:

$$(5.2.3) - \alpha = 4523,9, \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}); (5.2.1) - \alpha = 4486,8, \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}); (5.2.20) - \alpha = 4941,5, \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Расхождение результатов расчета α , соответственно, составляет 0,82 % и 9,2 %.

В данном расчете принято $(Pr/Pr_{ст}) \approx 1$, что имеет место при небольшом градиенте температуры.

Теплоотдача турбулентного потока в трубе

По уравнению(5.1.8) запишем число Нуссельта при осевом турбулентном движении однофазного потока в трубе ($Re = U_{\infty} d / \nu \geq 10^4$).

Для трубы это уравнение имеет вид:

$$Nu_d = \frac{Re \sqrt{\xi/8} Pr^{0,43}}{11,6 + 2,5 \ln(0,0129 Re \sqrt{\xi/8})},$$

Для сравнения результатов расчета (табл. 5.1) числа Нуссельта используем следующие зависимости

$$Nu = \frac{0,023 Pr Re^{0,8}}{1 + 2,14 Re^{-0,1} \left(Pr^{\frac{2}{3}} - 1 \right)}, \quad (5.2.5.)$$

$$Nu = 0,021 Re^{0,8} Pr^{0,43}, \quad (5.2.6.)$$

$$Nu = \frac{1,8 \xi Pr Re}{K_1 + 12,7 \sqrt{\xi/8} \left(Pr^{\frac{2}{3}} - 1 \right)}, \quad (5.2.7.)$$

где $K_1 = 1 + 900/Re$.

Таблица 5.1

Результаты расчета числа Нуссельта для трубы

Число Прандтля, Pr					
1		10		100	
Число Рейнольдса, Re					
10^4	10^6	10^4	10^6	10^4	10^6
37,3	1404,5	100,4	3780,2	270,2	10168,6
37,6	1412,3	101,2	3801,2	272,2	10225,3
36,45	1451,20	88,85	4906,83	197,01	12049,68
33,28	1325,01	89,59	3566,31	241,11	9598,85
35,94	1446,35	98,32	5244,08	224,90	13247,05
39,5	1458,4	106,3	3925,3	286,1	10565,1

Из таблицы следует, что наилучшее согласование результатов расчета α по (5.2.1) имеется с формулой Михеева(5.2.6) .

5.3 Пример расчета коэффициентов теплоотдачи и теплопередачи в теплообменнике типа «труба в трубе»

Теплообменник «труба в трубе» состоит из двух горизонтальных, расположенных один в другом, элементов. Диаметр наружной трубы $d_H - 38 \times 2$ мм, внутренний $d_B - 18 \times 1$ мм. Рабочая длина труб $L - 2,88$ м. Направление движения теплоносителей прямоточное.

Скорости жидкостей в теплообменнике определяют из уравнения расхода $V = SU_\infty$, где V – объемный расход, S – площадь поперечного сечения канала, U_∞ – средняя скорость жидкости.

Для расчета коэффициентов теплоотдачи по уравнению (5.2.1) при турбулентном движении потока необходимо определить

коэффициент трения C_f или коэффициент гидравлического сопротивления трубы ξ .

Коэффициент гидравлического сопротивления вычисляется по уравнениям:

в переходной области ($2200 < Re < 4000$)

$$\xi \approx 6,3 \cdot 10^{-4} \sqrt{Re}, \quad (5.2.8)$$

в области $4 \cdot 10^3 < Re < 1 \cdot 10^5$

$$\xi = \frac{0,316}{Re^{0,25}}, \quad (5.2.9)$$

где $Re = U_\infty d_g / \nu$ – число Рейнольдса для трубы; d_g – эквивалентный диаметр трубы, м.

В случае ламинарного движения теплоносителя коэффициент теплоотдачи вычисляем по известным уравнениям:

при значениях $(Pe d_g / L) \geq 20$; $Pe = U_\infty d_g / a$ – число Пекле,

$$Nu = 3,66. \quad (5.2.10)$$

Если $(Pe d_g / L) < 20$,

$$Nu = 1,4 \left(Re \frac{d_g}{L} \right)^{0,4} Pr^{0,33}. \quad (5.2.11)$$

Для внутренней трубы $d_э = d''_в$; для наружной $d_э = d''_н - d_в$; $d''_н$ – внутренний диаметр наружной трубы, м; $d''_в$ – внутренний диаметр внутренней трубы, м.

При длине труб $L \gg d_н$ в качестве толщины пограничного слоя в уравнении (5.2.1) можно принять для внутренней трубы $\delta = 0,4d''_в$, а для наружной – $\delta = 0,2(d''_н - d_в)$.

Рассчитанный коэффициент теплоотдачи сравним с полученным по эмпирическому уравнению:

при $2300 < Re < 10000$,

$$Nu = 0,08 Re^{0,9} Pr^{0,43} (Pr/Pr_{ст})^{0,25}. \quad (5.2.12)$$

Пример расчета

Расход жидкости $V_в = 58 \cdot 10^{-6}$, м³/с; расход жидкости

$$V_н = 40 \cdot 10^{-6}, \text{ м}^3/\text{с}.$$

$$d_н = 38 \times 2 \cdot 10^{-3}, \text{ м}; \quad d_в = 18 \times 1 \cdot 10^{-3}, \text{ м}; \quad t_{вн} = 36,^{\circ} \text{ C}; \quad t_{вк} = 34,^{\circ} \text{ C};$$

$$t_{нн} = 11,^{\circ} \text{ C}; \quad t_{нк} = 14,^{\circ} \text{ C};$$

Индексы: «в» – внутренняя труба; «н» – наружная труба.

Расчет коэффициента теплоотдачи α_1 во внутренней трубе

Физические свойства воды при $t_{ср} = 35,^{\circ} \text{ C}$:

– плотность $\rho = 994,8$, кг/м³;

– коэффициент динамической вязкости $\mu = 0,730 \cdot 10^{-3}$, Па·с;

– коэффициент кинематической вязкости

$$\nu = \mu / \rho = 3,65 \cdot 10^{-7}, \quad \text{м}^2/\text{с};$$

– удельная теплоемкость $c_p = 4180, \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$;

– коэффициент теплопроводности $\lambda = 62,6 \cdot 10^{-2}, \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$;

– коэффициент температуропроводности $a = 1,51 \cdot 10^{-7}, \text{ м}^2/\text{с}$.

Расчет параметров:

– скорость жидкости $U_\infty = V / (\pi d_B^2 / 4) = 0,288, \text{ м}/\text{с}$;

– число Прандтля $Pr = 4,86$;

– число Рейнольдса $Re = 6289,6$;

– коэффициент сопротивления $\xi = 0,035$;

– коэффициент трения $C_f = \xi / 4 = 0,0089$;

– толщина пограничного слоя $\delta = 0,4 d_B = 0,004, \text{ м}$;

– динамическая скорость $u_\infty = U_\infty \sqrt{C_f / 2} = 0,019, \text{ м}/\text{с}$;

– коэффициент теплоотдачи, рассчитанный по уравнениям:

$$\alpha = \frac{\rho c_p u_*}{Pr^{0,57} 5 [1 + \ln 6 + 0,5 (\ln \delta - \ln 30 \nu / u_*)]} - \alpha_1 = 1899,3, \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К});$$

$$(5.2.10) - \alpha_1 = 1620,3, \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Расхождение результатов – 15 %.

Расчет коэффициента теплоотдачи α в наружной трубе

Физические свойства воды при $t_{\text{ср}} = 12,5, ^\circ \text{С}$:

– плотность $\rho = 1000, \text{ кг}/\text{м}^3$;

– коэффициент динамической вязкости $\mu = 1,217 \cdot 10^{-3}, \text{ Па} \cdot \text{с}$;

- удельная теплоемкость $c_p = 4190$, Дж/(кг·К);
- коэффициент теплопроводности $\lambda = 58,22 \cdot 10^{-2}$, Вт/(м·К);
- коэффициент температуропроводности $a = 1,39 \cdot 10^{-7}$, м²/с.

Расчет параметров:

- площадь поперечного сечения канала

$$S = \frac{\pi(d_H^2 - d_B^2)}{4} = 6,53 \cdot 10^{-4}, \text{ м}^2;$$

- скорость жидкости $U_\infty = V / S = 0,06$, м/с;

- число Прандтля $Pr = 8,75$;

- число Рейнольдса $Re = 805,2$;

- коэффициент теплоотдачи, рассчитанный по уравнению:

$$(5.2.11) - \alpha_2 = 143,2, \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К});$$

- термическое сопротивление стенки и загрязнений

$$\sum r_{ст} = \frac{1}{5800} + \frac{0,01}{93} + \frac{1}{5800} = 3,56 \cdot 10^{-4}, \text{ (м}^2 \cdot \text{К)}/\text{Вт};$$

- коэффициент теплопередачи

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum r_{ст} + \frac{1}{\alpha_2}} = 392,1, \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

В данном примере отношение $(Pr/Pr_{ст})^{0,25} \approx 1$ и физические свойства теплоносителя взяты при $t_\infty = t_{ср}$.

Расчет коэффициентов теплоотдачи в кожухотрубчатом теплообменнике

Среди многообразия компоновок теплообменных поверхностей из пучков труб основными являются коридорные и шахматные. Характерными геометрическими параметрами являются: $a_1 = S_1 / d$ – относительный поперечный шаг; $b = S_2 / d$ – относительный продольный шаг.

Для расчета коэффициентов теплоотдачи в межтрубном пространстве можно использовать обобщенное уравнение

$$\alpha = \rho c_p \frac{0,37}{\text{Re}^m} \left(\frac{\bar{\epsilon} v}{\rho} \right)^{0,25} \text{Pr}^{-\frac{2}{3}},$$
$$\alpha = b_2 \rho c_p (\epsilon v / \rho)^{0,25} \text{Pr}^{-\frac{2}{3}}, \quad (5.2.13)$$

где $b_2 = 0,37 / \text{Re}^m$; $m = 0,66$ – шахматных пучков труб; $m = 0,08$ – для коридорных; $\text{Re} = U_m d / v$; U_m – скорость в узком сечении пучка.

Диссипация энергии рассчитывается через перепад давления ΔP .

$$\epsilon = \frac{\Delta P S_m \bar{U}_m}{V}, \quad (5.2.14)$$

где $S_m = d(a_1 - 1)H$; $V = d^2 H(a_1 b - \pi/4)$; $a_1 = S_1 / d$; $b = S_2 / d$.

Перепад давления, обусловленный сопротивлением трения и формы трубы, определяется по выражению

$$\Delta P = \eta_{\phi} \eta_{\Delta} (\xi/\chi) \chi^{0,5} \rho \bar{U}_m^2 z/2, \text{ Па}, \quad (5.2.15)$$

где η_{ϕ} – коэффициент, учитывающий угол атаки ϕ пучка труб η_{Δ} и определяемый по рис. 5.1; η_{Δ} – коэффициент, учитывающий шероховатость (рассматриваются абсолютно гладкие трубы $\eta_{\Delta}=1$); χ – формпараметр, зависящий от a_1 и b ; отношение (ξ/χ) определяется по номограммам (рис. 5.2, 5.3.), множитель χ – по вспомогательному графику, не приведенному в данной работе, в зависимости от комплекса $(a_1 - 1)/(b - 1)$. В предлагаемом примере $a_1=b=2$, следовательно, $(a_1 - 1)/(b - 1)=1$; $\chi=1$ и $z=1$.

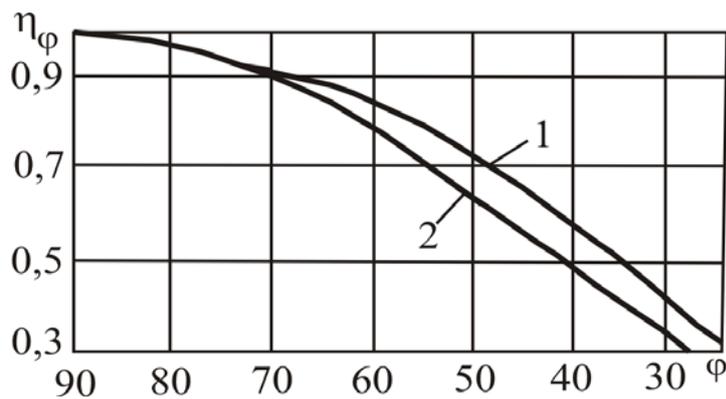


Рис. 5.1. Поправочный коэффициент η_{ϕ} для шахматных (1) и коридорных (2) пучков труб

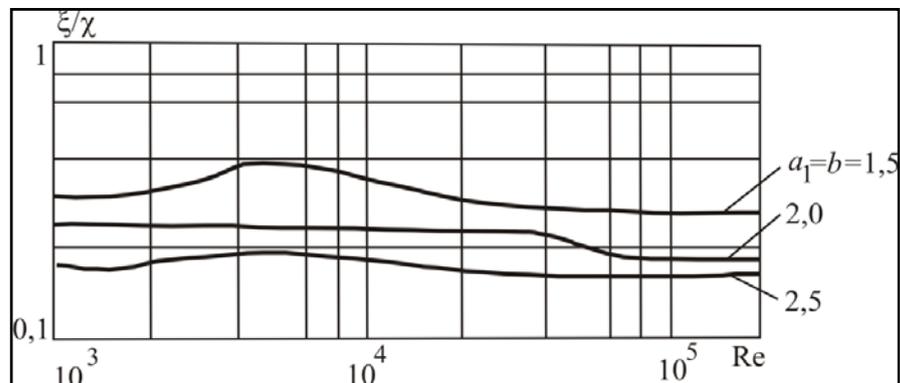


Рис. 5.2. Номограмма для определения коэффициента сопротивления коридорных пучков труб

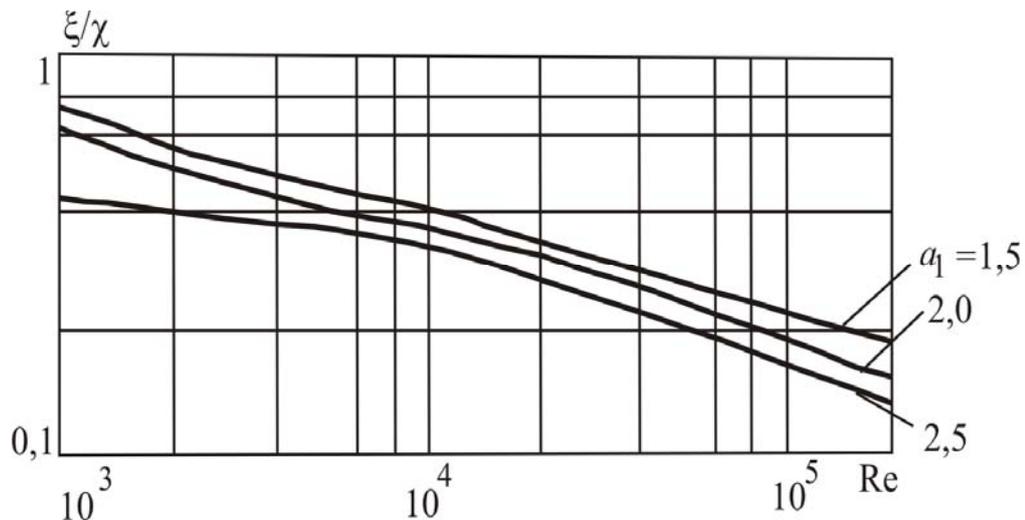


Рис. 5.3. Номограмма для определения коэффициента сопротивления шахматных пучков труб

Расчетный коэффициент теплоотдачи (5.2.11) сравним с полученным по эмпирическому уравнению:

при $Re > 1000$ для коридорных пучков:

$$Nu = 0,22\varepsilon_{\phi} Re^{0,65} Pr^{0,36} (Pr/Pr_{ст})^{0,25}, \quad (5.2.16)$$

для шахматных пучков:

$$Nu = 0,4\varepsilon_{\phi} Re^{0,6} Pr^{0,36} (Pr/Pr_{ст})^{0,25}, \quad (5.2.17)$$

где ε_{ϕ} – коэффициент, учитывающий угол атаки.

Совершенство теплообменных аппаратов можно охарактеризовать отношением теплового потока Q через данную поверхность теплообмена к мощности N , затраченной на прокачку теплоносителя

$$E = Q/N, \quad (5.2.18)$$

где N рассчитывается по формуле ($N = \Delta P S_m \bar{U}_m = \Delta P G/\rho$). По максимальному значению параметра E выбирают предпочтительное расположение пучков труб.

Пример расчета

Рассчитать теплообменный аппарат для охлаждения $G_1=6$ кг/с диэтилового эфира от $t_{1н}=+25$ °С до $t_{1к}=-10$ °С рассолом – раствором хлористого кальция, поступающим из холодильной камеры. Рассол нагревается от $t_{2н}=-15$ °С до $t_{2к}=-12$ °С, направлен в трубное пространство, эфир – в межтрубное.

Выбрать такую компоновку пучков труб, которая обеспечит наибольшее значение показателя E (5.2.18).

Индекс «1» для диэтилового эфира, «2» – для рассола.

Определение расхода теплоты и расхода рассола

– средняя температура рассола $t_2=0,5(-15+(-12))=-13,5$ °С;

– температурная схема:

$$+ 25 \quad \Rightarrow \quad -10$$

$$\underline{-12} \quad \Leftarrow \quad \underline{-15} \quad ;$$

$$\Delta t_{\bar{\theta}} = 37 \quad \Delta t_M = 5$$

– средняя разность температур $\Delta t_{ср} = \frac{\Delta t_{\bar{\theta}} - \Delta t_M}{\ln(\Delta t_{\bar{\theta}} / \Delta t_M)} = 16$ °С;

– средняя температура диэтилового эфира

$$t_1 = t_2 + \Delta t_{\text{ср}} = -13,5 + 16 = 2,5 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Физические свойства теплоносителей при средних температурах

– удельные теплоемкости: эфира – $c_{p1}=2140$ Дж/(кг·К); рассола – $c_{p2}=2900$ Дж/(кг·К);

– плотности: эфира – $\rho_1 = 733$ кг/м³; рассола – $\rho_2 = 1220$ кг/м³;

– динамическая вязкость: эфира – $\mu_1 = 0,28 \cdot 10^{-3}$ Па·с; рассола – $\mu_2 = 7,165 \cdot 10^{-3}$ Па·с;

– коэффициенты теплопроводности: эфира – $\lambda_1 = 0,136$ Вт/(м·К); рассола – $\lambda_2 = 0,473$ Вт/(м·К).

Расчет параметров:

– с учетом потерь холода в размере 5 % расход теплоты

$$Q = 1,05 G_1 c_{p1} (t_{1\text{н}} - t_{1\text{к}}) = 1,05 \cdot 6 \cdot 2140 (25 - (-10)) = 471870 \text{ Вт};$$

– расход рассола $G_2 = \frac{Q}{c_{p2}(t_{2\text{к}} - t_{2\text{н}})} = 54,2$ кг/с;

– объемные расходы эфира и рассола $V_1 = G_1 / \rho_1 = 8,19 \cdot 10^{-3}$ м³/с; $V_2 = G_2 / \rho_2 = 4,45 \cdot 10^{-2}$ м³/с.

Для обеспечения интенсивного теплообмена необходим турбулентный режим движения теплоносителей. В теплообменных трубах $d=25 \times 2$ мм холодильников по ГОСТ 15120-79 скорость течения рассола при $Re > 10000$ должна быть более

$$w'_2 = \frac{Re_2 \mu_2}{d_2 \rho_2} = \frac{10000 \cdot 7,165 \cdot 10^{-3}}{0,021 \cdot 1220} = 2,8 \text{ м/с};$$

проходное сечение трубного пространства при этом должно быть не менее

$$S'_2 = \frac{V_2}{w'_2} = 1,59 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$$

Выбираем одноходовой кожухотрубчатый теплообменник диаметром $D=273$ мм с трубами 25×2 мм, проходное сечение трубного пространства $S_2=0,013 \text{ м}^2$; межтрубного $S_1=0,011 \text{ м}^2$.

Определение коэффициента теплоотдачи для эфира

– скорость эфира в межтрубном пространстве

$$w_1 = \frac{V_1}{S_1} = \frac{8,19 \cdot 10^{-3}}{1,1 \cdot 10^{-2}} = 0,74 \text{ м/с};$$

– число Рейнольдса $Re_1 = \frac{w_1 d_1 \rho_1}{\mu} = \frac{0,74 \cdot 0,025 \cdot 733}{0,00028} = 48701,3$;

– число Прандтля $Pr_1=4,4$;

– перепад давления и коэффициенты теплоотдачи, рассчитанные по уравнениям (5.2.15), (5.2.13) и (5.2.16) при коридорном расположении пучков труб с $a \times b=2,0 \times 2,0$ и углом атаки $\varphi=25^\circ$, соответственно равны $\Delta P = 14,0 \text{ Па}$; $\alpha_1 = 1534,9 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$, $\alpha_1 = 1363,7 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$.

Расхождение результатов 11 %.

– перепад давления и коэффициенты теплоотдачи, рассчитанные по уравнениям(5.2.15), (5.2.13) и (5.2.17) при шахматном расположении пучков труб с $a_1 \times b = 2,0 \times 2,0$ и углом атаки $\varphi = 25^\circ$, равны $\Delta P = 13,4$ Па; $\alpha_1 = 1765,7$ Вт/(м²·К), $\alpha_1 = 1363,7$ Вт/(м²·К).

Расхождение результатов 22 %.

Определение коэффициента теплоотдачи для рассола

– скорость рассола $w_2 = \frac{V_2}{S_2} = 3,42$ м/с;

– число Рейнольдса $Re_2 = \frac{w_2 d_2 \rho_2}{\mu_2} = \frac{3,42 \cdot 0,021 \cdot 1220}{7,168 \cdot 10^{-3}} = 12223,1$;

– число Прандтля $Pr_2 = 43,49$;

– коэффициенты теплоотдачи, рассчитанные по уравнениям (5.2.1) $\alpha_2 = 4260,1$ Вт/(м²·К), (5.2.4) $\alpha_2 = 4457,7$ Вт/(м²·К).

Расхождение результатов 5 %.

В табл. 5.2. приведены результаты расчета гидравлических и теплообменных характеристик шахматного и коридорного расположения пучков труб.

Таблица 5.2.

Результаты расчета гидравлических и теплообменных характеристик шахматного и коридорного расположения пучков труб

шаг пучка $a_1 \times b$	ΔP по ур. (4.3.8)	N	K_t по ур. (1.1.4)	E по ур. (4.3.11)
коридорные пучки				
2,0×2,0	14,0	0,66	784,9	718788,3
шахматные пучки				
2,0×2,0	13,4	0,63	841,0	751450,0

Расчетную площадь *поверхности теплопередачи* находим из уравнения

$$F = Q / (K_t \Delta t), \text{ м}^2.$$

В случае коридорного пучка труб с учетом 10 % запаса $F_k=41,33$, м^2 ; при шахматном расположении – $F_{ш}=38,57$, м^2 .

Окончательный выбор лучшего из рассмотренных теплообменников должен быть сделан на основе технико-экономического анализа.

5.4 Пример расчета коэффициентов тепло и массоотдачи вентиляторной градирни с сетчатыми насадками

Рассчитать коэффициенты тепло и массоотдачи для градирни диаметром $D=0,21\text{м}$ с сетчатой насадкой $d_{нас} = 0,05\text{м}$, $H_{нас}=0,4\text{м}$; удельная поверхность насадки $a_{нас} = 140\text{м}^2 / \text{м}^3$, плотность орошение: $\rho=7.61 \text{ м}^3/\text{м}^2 \text{ ч} = 0,0021 \text{ м}^3/\text{м}^2 \text{ с}$, температура наружного воздуха $t_{воз} = 25^\circ\text{C}$, температура воды $t_{вод}=30^\circ\text{C}$. $w=0,71-1,07\text{м/с}$

Расчет

По табл. 10 в приложении найдем физико-химические характеристики воды при $t=30^\circ\text{C}$.

$$\mu \cdot 10^{-6} = 797.5 \text{ Па}\cdot\text{с}$$

$$\sigma \cdot 10^{-3} = 71.19 \text{ кг/с}^2$$

$$\rho = 995,61 \text{ кг/м}^3$$

$$\nu \cdot 10^{-6} = 0,801 \text{ м}^2/\text{с}$$

По табл. 11 в приложении найдем физико-химические характеристики воздуха при $t=25^{\circ}\text{C}$.

$$\rho = 1,18 \text{ кг}/\text{м}^3;$$

$$\nu \cdot 10^{-5} = 1,56 \text{ м}^2/\text{с};$$

$$D = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$$

$$\text{Pr} = \nu/D = 0,7$$

1. Определим плотность орошения к периметру пленочного течения

$$q = \frac{Q}{P} \text{ м}^3 / (\text{м} \cdot \text{час});$$

$$q = \frac{2,016}{18 \cdot 3,14 \cdot 0,05} = 0,7136 \text{ м}^3 / \text{ч} = 0,000198 \text{ м}^3 / (\text{м} \cdot \text{с})$$

где P - периметр, м^2 , Q -расход жидкости $\text{м}^3/(\text{м} \cdot \text{с})$.

2. Определим число Рейнольдса для пленки воды

$$\text{Re}_{\text{жс}} = \frac{4 \cdot q}{\nu_{\text{жс}}}$$

$$\text{Re}_{\text{жс}} = \frac{4 \cdot 0,000198}{0,801 \cdot 10^{-6}} = 989,94$$

3. Найдем приведенную толщину пленки жидкости, м

$$\theta = \left(\frac{\nu^2}{g} \right)^{1/3}, \text{ м.}$$

$$\theta = \left[\frac{(0,801 \cdot 10^{-6})^2}{9,81} \right]^{1/3} = 4 \cdot 10^{-5}, \text{ м.}$$

4. Определим толщина пленки, м.

$$\delta_{nl} = 0,0887 \cdot \theta \cdot \text{Re}^{0,635}, \text{ м.}$$

$$\delta_{nl} = 0,0887 \cdot 4 \cdot 10^{-5} \cdot 989,94^{0,635} = 0,000283, \text{ м.}$$

5. Найдем среднюю скорость в пленке, м/с.

$$u_{cp} = \frac{q}{\delta_{nl}}$$

$$u_{cp} = \frac{0,000198}{0,000283} = 0,7 \text{ м/с.}$$

6. Найдем коэффициент сопротивления насадки

$$\lambda_{op} = \frac{0,11 \cdot 0,9 \left(\frac{u_{cp} \cdot \mu_{жс}}{\sigma_{жс}} \right)^{2/3}}{\left[\frac{d_3 (w + u_{cp})}{v_{\Gamma}} \right]^{0,16}}$$
$$\lambda_{op} = \frac{0,11 \cdot 0,9 \frac{(0,7 \cdot 797,5 \cdot 10^{-6})}{71,19 \cdot 10^{-3}}}{\frac{0,05(0,72 + 0,7)}{1,56 \cdot 10^{-5}}} = 0,03766$$

где $d_3 = d_{нас} = 0,05 \text{ м.}$

7. Найдем динамическую скорость, м/с.

$$u_* = (w + u) \sqrt{\lambda_{op} / 8}$$

$$u_* = (0,72 + 0,7) \sqrt{0,03766 / 8} = 0,0974 \text{ м/с}$$

8. Безразмерная толщина пограничного слоя

$$R_{\delta} = \frac{0,2 \cdot d_3 \cdot u_*}{v_{\Gamma}}$$

$$R_{\sigma} = \frac{0,2 \cdot 0,05 \cdot 0,0974}{1,56 \cdot 10^{-5}} = 62,43$$

9. Определение коэффициента массоотдачи

$$\beta = \frac{u_*}{11,6 + 2,5 \ln(R_{\sigma}/11,6) \text{Pr}^{2/3}}$$

$$\beta = \frac{0,0974}{(11,6 + 2,5 \ln(62,43/11,6))0,7^{2/3}} \frac{0,0974}{15,806 \cdot 0,79} = 0,0078 \text{ м/с}$$

10. Идеальное вытеснение по воздуху

$$\eta = 1 - \exp(-N_{ог})$$

11. Число единиц переноса

$$N_{ог} = \frac{\beta F}{V_{г}} = \frac{\beta \cdot a_v \cdot H_{нас}}{W_{г}}$$

$$N_{ог} = \frac{0,0078 \cdot 140 \cdot 0,4}{0,72} = \frac{0,0431}{0,72} = 0,61$$

12. Идеальное вытеснение по воздуху

$$\eta = 1 - (\exp - 0,61) = 0,45 = 45\%$$

13. Идеальное перемешивание

$$\eta = \frac{N_{ог}}{N_{ог} + 1}$$

$$\eta = \frac{0,61}{0,61 + 1} = 0,38 = 38\%$$

14. Построить графики зависимость β от $W_{г}$ и КПД η от $W_{г}$.

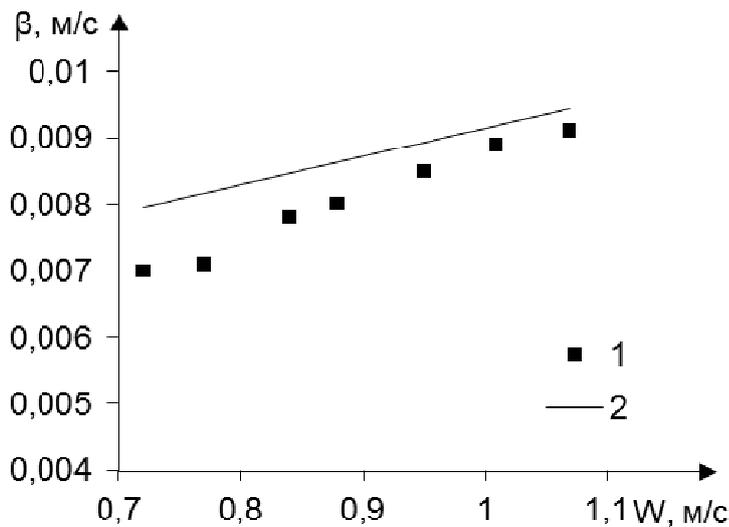


Рис. 5.4. Зависимость коэффициента массоотдачи β , м/с от скорости воздуха W , м/с: 1 – экспериментальные данные; 2 – расчеты данные.

5.5 Пример расчета теплоотдачи в турбулентной пленке

Рассчитать коэффициент теплоотдачи в турбулентной пленке если известно температура воды $t_{\text{воды}}=40^{\circ}\text{C}$. $Re=2300-14100$.

По табл. 10 приложения найдем физико-химические характеристики воды. $t_{\text{воды}}=40^{\circ}\text{C}$

$$\lambda=628,5 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/ (м К)};$$

$$\mu=653,1 \cdot 10^{-6};$$

$$\rho=991,18 \text{ кг/м}^3;$$

$$\nu=\mu/\rho=0,658 \cdot 10^{-6};$$

$$a=\lambda/(\rho c_p)=151 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с};$$

$$c_p=4,179 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)};$$

$$Pr=4,11.$$

Расчет

1. Найдем приведенную толщину пленки жидкости, м:

$$\theta = \left(\frac{v^2}{g} \right)^{1/3}, \text{ м.}$$

$$\theta = \left[\frac{(0,658 \cdot 10^{-6})^2}{9,81} \right]^{1/3} = 35,35 \cdot 10^{-6}, \text{ м.}$$

2. Определим толщина пленки при, м:

$$\delta_{nl} = 0,0887 \cdot \theta \cdot \text{Re}^{0,635}, \text{ м.}$$

$$\delta_{nl} = 0,0887 \cdot 35,35 \cdot 10^{-6} \cdot 2300^{0,635} = 0,000427, \text{ м.}$$

3. Найдем динамическую скорость на стенке канала, м/с:

$$u_* = \sqrt{g \delta_{nl}}$$

$$u_* = \sqrt{9,81 \cdot 0,000427} = 0,0646 \text{ м/с.}$$

4. Определим плотность орошения к периметру пленочного течения, м³/ (м с):

$$q = \frac{\text{Re} \cdot v}{4}$$

$$q = \frac{2300 \cdot 0,658 \cdot 10^{-6}}{4} = 0,000378 \text{ м}^3 / (\text{м с})$$

5. Найдем среднюю скорость в пленке, м/с:

$$u_{cp} = \frac{q}{\delta_{nl}}$$

$$u_{cp} = \frac{0,000378}{0,000427} = 0,885 \text{ м/с}$$

6. Найдем среднюю скорость на межфазной поверхности:

$$u_{\infty} = 1,15 \cdot u_{cp}$$

$$u_{\infty} = 1,15 \cdot 0,0885 = 1,018 \text{ м/с}$$

7. Найдем значение безразмерной толщины пограничного слоя:

$$R_{\delta} = \exp \left\langle \left[\left(\frac{u_{\infty}}{u_*} - 5,219 \right) / 2,5 \right] + 0,124 \right\rangle$$

$$R_{\delta} = \exp \left\langle \left[\left(\frac{1,018}{0,0646} - 5,219 \right) / 2,5 \right] + 0,124 \right\rangle = 75,58$$

8. Находим число Нуссельта для пленочного течения:

$$Nu = \frac{\theta \sqrt{g \delta_{nl}}}{Pr^{0,5} \cdot a \cdot (5,219 + 2,5 \ln(R_{\delta} - 0,124))}$$

$$Nu = \frac{35,35 \cdot 10^{-6} \sqrt{9,81 \cdot 0,000427}}{4,34^{0,5} \cdot 0,151 \cdot 10^{-6} \cdot (5,219 + 2,5 \ln(75,58 - 0,124))} = 0,45$$

9. Построить график зависимость числа Рейнольдса Re от плотности орошения q (числа Рейнольдса Re).

Контрольные вопросы

1. Запишите уравнение аддитивности термических сопротивлений для плоской стенки.
2. Запишите расчетную площадь поверхности теплопередачи.
3. По каким выражениям вычисляются коэффициенты теплоотдачи в трубе при ламинарном и турбулентном режимах?
4. Как вычислить эффективность (КПД) градирни?

ГЛАВА 6

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ АППАРАТОВ

6.1. Условия равновесия

Процессы массопередачи обычно обратимы. Причем направление перехода вещества определяется концентрациями вещества в фазах и условиями равновесия.

Для моделирования массо- и теплообмена прежде всего необходимо знание предельного состояния, т.е. состояния равновесия, к которому стремится каждая система. Поэтому рассмотрение процессов переноса начинают с термодинамики, фундаментальной теории, которая определяет поведение систем с большим числом частиц в состоянии равновесия.

Согласно второму закону термодинамики, все самопроизвольные процессы сопровождаются увеличением энтропии системы. В изолированной системе энтропия S достигает максимального значения, поэтому $dS = 0$. Кроме этого условия, формулируются математические условия равновесия, как равенство нулю полного дифференциала параметров состояния, определяющих свойства вещества

$$dp = 0; dT = 0; d\mu_i = 0, \quad (6.1.1)$$

где p – давление, T – температура, μ_i – химический потенциал i -го компонента в смеси.

Первое равенство характеризует механическое равновесие, второе – термическое, а третье – диффузионное, т. е. отсутствие массопередачи.

Для двухфазных систем газ-жидкость и пар-жидкость условия фазового равновесия можно выразить равенствами

$$T^I = T^{II}; \quad p^I = p^{II}; \quad \mu^I = \mu^{II}, \quad (6.1.2)$$

где индексами «I» и «II» обозначены величины, относящиеся к разным фазам.

Равновесие при массопередаче принято записывать, используя рабочие C и равновесные C^* концентрации в фазах:

$$C - C^* = 0. \quad (6.1.3)$$

Концентрации компонента в фазах обозначаются также x и y , где x относится к жидкой фазе, y – к газовой (паровой).

При отклонении системы от состояния равновесия возникает движущая сила процессов. При массопередаче появляется поток массы компонента (вещества) из одной фазы в другую, а при теплообмене – поток теплоты.

6.2. Законы сохранения

В реальных процессах разделения многокомпонентных смесей, в большинстве случаев происходит одновременный перенос массы, импульса и энергии. Поэтому анализ этих явлений представляет собой

сущность теоретического исследования любого массообменного процесса. Для математического описания этих процессов необходимо иметь общую систему уравнений, которая описывает все основные виды переноса и их взаимное влияние. Из общей системы уравнений всегда можно получить частные формы, когда преобладает один из механизмов переноса.

Закон сохранения импульса (уравнения движения)

Запишем уравнение сохранения импульса в движущейся несжимаемой (плотность $\rho = \text{const}$) однофазной среде

$$\frac{dV}{d\theta} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{\rho} \text{div } \tau + F \quad (6.2.1)$$

с уравнением неразрывности

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\theta} + \text{div } V = 0, \quad (6.2.2)$$

где V – трехмерный вектор осредненной скорости, компонентами которого являются его проекции на пространственные координатные оси Ox , Oy , Oz ; F – объемные силы; θ – время; τ – тензор напряжений; p – давление; ρ – плотность среды.

Уравнение осредненного турбулентного движения (6.2.1) содержит произведения пульсационных компонент скорости, что делает его незамкнутым. Буссинеск в 1877 году предложил ввести понятие «турбулентной вязкости», что привело к возникновению

различных полуэмпирических моделей, содержащих по меньшей мере две опытные «константы турбулентности». Развитие этого направления связано с работами Тейлора, Прандтля, Кармана, Колмогорова, Никурадзе и др.

На основе подхода, предложенного Буссинеском, потоки импульса в уравнении (6.2.1) записываются в форме закона Ньютона:

$$\tau_x = \rho(v + \nu_T) \frac{\partial V_x}{\partial x}; \quad \tau_y = \rho(v + \nu_T) \frac{\partial V_y}{\partial y}; \quad \tau_z = \rho(v + \nu_T) \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad (6.2.3)$$

где коэффициенты турбулентного обмена ν_T являются функциями пространственных координат и определяются механизмом турбулентности и принятой моделью.

Закон сохранения массы

Уравнение переноса массы компонентов смеси в однофазной среде имеет вид

$$\rho \frac{dC_i}{d\theta} + \operatorname{div} j_i = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.2.4)$$

где C_i – концентрация, j_i – диффузионный поток, r_i – скорость химической реакции i -го компонента.

Для описания переноса n компонентов в смеси необходимо $(n-1)$ независимых уравнений (6.2.4). Концентрация n -го компонента может быть определена по соотношению

$$\sum_i^n C_i = 1. \quad (6.2.5)$$

Если компоненты смеси не участвуют в химических превращениях, то источники химических реакций $r_i = 0$.

Диффузионные потоки компонентов в уравнениях (6.2.4) запишем в форме закона Фика с учетом молекулярного и турбулентного переноса:

$$j_{ix} = -\rho \sum_{i=1}^{n-1} (D_{ij} + \delta_{ij} D_T) \frac{\partial C_i}{\partial x}, \quad (6.2.6)$$

$$j_{iy} = -\rho \sum_{i=1}^{n-1} (D_{ij} + \delta_{ij} D_T) \frac{\partial C_i}{\partial y}, \quad (6.2.7)$$

$$j_{iz} = -\rho \sum_{i=1}^{n-1} (D_{ij} + \delta_{ij} D_T) \frac{\partial C_i}{\partial z}, \quad (6.2.8)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; D_{ij} – элементы квадратной матрицы коэффициентов молекулярной диффузии $[D]$ размерностью $(n-1) \times (n-1)$; D_T – коэффициент турбулентной диффузии.

Уравнение (6.2.2) с потоковыми соотношениями (6.2.6)–(6.2.8) можно записать в матрично-векторном виде:

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} + (V \nabla) C = \left\{ \left([D] + I \cdot D_T \right) \nabla C \right\}, \quad (6.2.9)$$

где C – вектор-столбец, содержащий мольные концентрации компонентов смеси; I – единичный вектор; V – трехмерный вектор скорости.

Закон сохранения энергии.

Уравнение переноса энергии записывается в форме

$$\rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial \theta} = \operatorname{div} q + \Phi, \quad (6.2.10)$$

где Φ – диссипативная энергия, q – тепловой поток; θ – время; T – температура; c_p – теплоемкость.

Величина диссипируемой энергии обычно невелика, поэтому в большинстве случаев принимается $\Phi = 0$.

Плотность тепловых потоков представим в виде закона Фурье:

$$q_x = \rho \cdot c_p (a + a_T) \frac{\partial T}{\partial x}; \quad q_y = \rho \cdot c_p (a + a_T) \frac{\partial T}{\partial y};$$
$$q_z = \rho \cdot c_p (a + a_T) \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (6.2.11.)$$

где a, a_T – коэффициенты молекулярной и турбулентной температуропроводности.

Система уравнений переноса.

Рассмотрим стационарное движение среды. Уравнения переноса импульса, массы и тепла (6.2.1)–(6.2.4), (6.2.10) запишем в векторной форме:

$$(V\nabla)V = -\frac{l}{\rho} \text{grad}p + \nabla[(v + v_T)\nabla V], \quad (6.2.12)$$

$$\text{div} V = 0, \quad (6.2.13)$$

$$(V\nabla)C = \nabla[(D) + I \cdot D_T)\nabla C], \quad (6.2.14)$$

$$(V\nabla)T = \nabla[(a + a_T)\nabla T]. \quad (6.2.15)$$

Система дифференциальных уравнений (6.2.12)–(6.2.15) записанная на основе законов сохранения, вместе с соответствующими краевыми условиями и условиями равновесия составляет теоретическую основу моделирования массотеплопереноса в промышленных аппаратах.

Очевидно, что теоретический метод решения задач проектирования аппаратов обладает преимуществами перед всеми остальными методами. Имея исходное описание в виде законов сохранения (6.2.12)–(6.2.15) и краевых условий можно теоретическим путем получить распределение полей V , C , T , рассчитать эффективность массотеплообменного процесса, выполнить проектирование аппарата.

Процессы разделения газовых, паровых или жидких смесей на компоненты происходят в двухфазных средах: газ–жидкость, пар–жидкость или жидкость–жидкость. При этом одна из фаз (дисперсная) распределяется в сплошной фазе. Интенсивность массотеплопереноса в двухфазной среде зависит от скорости относительного движения фаз, доли содержания дисперсной фазы, площади поверхности раздела и определяется конструкцией контактного устройства, режимными параметрами работы массообменного аппарата и физическими свойствами смесей.

Гидродинамические закономерности процессов переноса в двухфазных средах в большинстве случаев существенно отличаются от гидродинамики однофазных сред из-за наличия различных возмущающих факторов. Этими факторами могут быть: спонтанная межфазная конвекция (эффект Марангони), наличие поверхностно-активных веществ или химических реакций, процессы испарения и конденсации (тепловые эффекты) и т.д.

Спонтанная межфазная конвекция, возникающая в результате гидродинамической неустойчивости границы раздела фаз при межфазном переносе вещества, изменяет поверхностное натяжение и может существенно интенсифицировать массопередачу.

Наличие поверхностно-активных веществ приводит в ряде случаев к уменьшению скорости движения межфазной поверхности пузырей и капель, гашению ряби на поверхности пленки, что вызывает уменьшение скорости массопереноса. Степень влияния поверхностно-активных веществ существенно зависит от их типа и концентрации.

Влияние тепловых эффектов между фазами может вызывать как увеличение, так и снижение скорости диффузионных процессов.

Теоретическое описание процессов переноса в двухфазных средах связано с тем или иным упрощением реальной гидродинамической обстановки или идеализацией свойств среды.

Один из методов построения математического описания процессов переноса в двухфазных средах заключается в том, что уравнения переноса импульса, массы и энергии, а также условия термодинамического равновесия записываются отдельно для сплошной и дисперсной фаз, находящихся в элементарном объеме двухфазного потока. Структура среды считается известной. Такой подход при решении конкретных задач связан со значительными сложностями, т.к. элементы дисперсной фазы на промышленном контактном устройстве (КУ) имеют различные формы и размеры и случайным образом распределены в пространстве.

Известно, что в теории фильтрации фильтрующуюся жидкость принимают за сплошную среду, несмотря на то, что она находится в пористой среде. В работах Рахматуллина Х.А., Нигматуллина Р.И. выполнено обобщение теории фильтрации на тот случай, когда пористая среда подвижна. Фазы рассматриваются как два взаимопроникающих и взаимодействующих континуума, заполняющих один и тот же объем. Любая фаза в каждой точке данного объема имеет свои средние скорости, давление, концентрацию и другие параметры. Дифференциальные уравнения переноса импульса, массы и энергии записываются для элементарного объема среды отдельно для каждой фазы. В данной модели допускается нахождение в точке с заданными координатами одновременно нескольких фаз. Как отмечается авторами этой модели, с точки зрения формальной логики такое допущение абсурдно, но позволяет описать очень сложные явления при движении многокомпонентных многофазных сред. К сожалению, полученная

система уравнений для многих частных случаев является незамкнутой, так как содержит неизвестные функции, определение которых сопряжено со значительными трудностями.

6.3. Основы модели многоскоростного континуума

В дисперсных многофазных системах, встречающихся при осуществлении различных химико-технологических процессов, в сплошной фазе (жидкости или газе) находится значительное количество дисперсных включений – твердых частиц, жидких капель или газовых пузырей. Точное описание движения фаз такой системы на уровне отдельных дисперсных включений представляется невозможным вследствие большого числа этих включений. К тому же, точная информация о движении всех дисперсных включений и сплошной фазы между ними является ненужной, так как на практике интерес представляют только некоторые осредненные величины. Поэтому математическое описание осуществляется при помощи осредненных величин.

Обычно предполагается, что такие системы можно изучать, используя представления механики взаимопроникающих взаимодействующих сплошных сред (континуумов). Применение указанных представлений правомерно только в том случае, если для рассматриваемой многофазной системы существует физически бесконечно малый объем. Физически бесконечно малый объем – объем, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с характерным пространственным масштабом макроскопического течения (то есть масштабом, на котором осредненные параметры многофазной среды существенно изменяются). Данное условие позволяет считать, что

осредненные по физически бесконечно малому объему характеристики многофазной среды практически постоянны в пределах этого объема. Число дисперсных частиц, заключенных в физически бесконечно малом объеме, должно быть настолько большим, чтобы осредненные по этому объему характеристики многофазной системы были устойчивы по отношению к изменению объема.

Введение физически бесконечно малого объема позволяет использовать для описания движения фаз многофазной среды характеристики (доли объема, занимаемые каждой из фаз, скорости фаз и т.п.), осредненные по такому объему. Указанные осредненные величины непрерывно изменяются в пространстве, причем во всех точках пространства определены характеристики, относящиеся к каждой из фаз многофазной системы. Тем самым от описания движения фаз на уровне отдельных дисперсных включений можно перейти к осредненному описанию движения фаз многофазной системы. При этом осредненные по физически бесконечно малому объему величины представляют собой осредненные характеристики фаз реальной многофазной системы. Следовательно, введение физически бесконечно малого объема позволяет представить рассматриваемую многофазную среду как совокупность нескольких (по числу фаз) сплошных сред, обладающих физическими свойствами фаз реальной многофазной среды и непрерывно распределенных в пространстве, занимаемом многофазной средой.

Другое условие, которое обычно предполагается выполненным, заключается в том, что размер неоднородностей в рассматриваемой многофазной системе считается существенно превосходящим молекулярно-кинетические размеры (средние длины свободного пробега молекул, расстояния между молекулами и т.п.), то есть

неоднородности содержат очень большое число молекул. Выполнение этого условия позволяет использовать для описания движения отдельных дисперсных включений и окружающей их жидкости (газа) обычные уравнения и методы механики сплошной среды.

Для каждой из фаз, составляющих рассматриваемую многофазную среду (для каждой из взаимодействующих взаимопроникающих сплошных сред), можно определить параметры, характеризующие движение этой фазы – плотность фаз, скорости фаз и т.п.

Согласно этому понятию, дисперсная среда типа многофазной эмульсии в несущей жидкости представляется как совокупность непрерывных сред, заполняющих одновременно один и тот же объем и имеющих в каждой точке пространства свою собственную скорость. Для каждой фазы i вводится приведенная массовая плотность ρ_i , объемная доля α_i и скорость фазы V_i , которые могут меняться от точки к точке, что позволяет описывать изменение числа капель и их скорость движения. Если обычную массовую плотность вещества фазы i обозначить ρ_i^0 , то получим для N -фазной смеси

$$\rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, i = 1 \dots N, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, i = 1 \dots N, \quad (6.3.1)$$

(в дальнейшем будем считать, что индекс $i = 1$ относится к несущей, а $i = 2 \dots N$ – к дисперсным элементам).

Уравнение переноса импульса и массы i -й фазы записываются в виде

$$\rho_i \frac{d_i V_i}{dt} = \nabla \sigma_i + \rho_i \vec{F}_i + \sum_{j=1; j \neq i}^m (\vec{P}_{ji} - J_{ji} V_i), \quad (6.3.2)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla(\rho_i V_i) = \sum_{j=0; j \neq i}^m J_{ji} \quad (i=1, \dots, m), \quad (6.3.3)$$

где σ_i – тензор напряжения в i -той фазе; \vec{P}_{ji} – сила межфазного взаимодействия, отнесенная к единице объема смеси; V_i – вектор скорости; J_{ji} – поток массы из j фазы в i фазу за счет фазовых переходов; \vec{F}_i – массовые силы.

Система уравнений гидромеханики многофазных систем (6.3.1), (6.5.3) незамкнута. Ее необходимо дополнить выражениями для неизвестных величин J_{ij} , σ_i , \vec{P}_{ji} , \vec{F}_i . Обычно единственной внешней массовой силой является сила тяжести. Тогда $\vec{F}_i = \vec{g}$, где g – ускорение силы тяжести. Нахождение выражений для величин J_{ij} , σ_i , \vec{P}_{ji} представляет собой сложную проблему. Обычно выражения для указанных величин постулируются. Кроме того, часто используются какие-либо полуэмпирические выражения, полученные путем обобщения экспериментальных данных. Для некоторых конкретных многофазных систем имеются попытки нахождения замыкающих соотношений теоретическим путем. Отметим, что в некоторых случаях, наряду с уравнениями баланса массы и количества движения, необходимо рассматривать также уравнения баланса энергии.

6.4 Численное решение уравнений переноса

Эффективным инструментом исследования одно- и двухфазных потоков является численное решение уравнений турбулентного движения среды с привлечением программного комплекса PHOENICS.

Конструируя то или иное оборудование, конструктору еще до его изготовления важно знать, как будет действовать проектируемое им оборудование, и в этом неоценимую помощь ему оказывают расчеты. Создание расчетных методов является одной из основных задач специалистов, работающих в области прикладных наук.

Назначение разработанного метода состоит в предвычислении любых представляющих практический интерес характеристик или свойств сред на основе информации о заданных условиях эксперимента. Имеются самые разнообразные теории, их формы диктуются назначением. Некоторые теории описывают качественную сторону явлений, другие – количественную; в одних делается упор на описание, в других – на интерпретацию; целью некоторых теоретиков является определение различий между внешне подобными явлениями, другие же изучают их сходство. Теория авторов и разработчиков программного пакета PHOENICS создана для прогнозирования, поэтому она количественная.

Авторы программного комплекса делают упор на наиболее общие физические ситуации и избегают введения нетипичного, возможного лишь в каких-то особых случаях. Единая универсальная теория лучше множества частных теорий узкоспециального назначения. Важны экономичность метода и простота обращения с ним. Иначе трудоемкость подготовительных операций, либо дороговизна машинного времени вынуждают конструктора обращаться к

эксперименту. Научному работнику приходится в этом случае воздерживаться от исследований внутренней сущности своих гипотез в их полном виде. Эмпирические данные, используемые в расчете, относятся ли они к эффективной вязкости или к взаимосвязям между интегральными характеристиками, должны правильно отражать наиболее существенные черты и особенности турбулентного движения. Кроме того, вычислительный аппарат теории должен обеспечивать точные результаты, не внося дополнительных ошибок. Все эти требования были учтены авторами разработки методов расчетов, используемых в программном пакете PHOENICS. Многочисленные примеры, приведенные в последующих главах монографии, красноречиво доказывают правильность математических формулировок и надежность алгоритмов расчета, применяемых в программном комплексе PHOENICS.

Численное решение задач, связанных с турбулентным течением одно- и двухфазных смесей, можно начинать, когда законы, управляющие этими процессами, выражены в математической форме, обычно в виде дифференциальных уравнений. Каждое из дифференциальных уравнений выражает определенный закон сохранения. В каждом уравнении в качестве зависимой переменной используется некоторая физическая величина и отражается баланс между различными факторами, влияющими на эту переменную. Обычно зависимыми переменными в этих дифференциальных уравнениях являются удельные свойства, т.е. свойства, отнесенные к единице массы. Члены дифференциального уравнения такого типа выражают воздействия на единицу объема, а их сумма – баланс этих воздействий.

Программный комплекс PHOENICS использует вычислительные методы для расчета дифференциальных уравнений в частных производных переноса массы, импульса, энергии, химических и других субстанций, куда вводятся эмпирические данные для зависимостей «эффективных» коэффициентов переноса (вязкость, теплопроводность и т.д.) в турбулентно движущейся среде.

6.5. Обобщенные уравнения переноса субстанции

В программном комплексе PHOENICS численно решаются *обобщенные уравнения* переноса субстанции (массы, импульса, тепла, кинетической энергии турбулентности и пр.). Рассмотрение дифференциальных уравнений, описывающих тепломассообмен и гидродинамику одно- и двухфазных сред, показывает, что интересующие нас зависимые переменные подчиняются обобщенному закону сохранения. Введение единой формы записи используемых уравнений позволяет развить единый метод их решения, постепенно усложняя его по мере учета отдельных членов общего уравнения.

Если обозначить зависимую переменную через Φ , то обобщенное дифференциальное уравнение примет вид:

для однофазного потока

$$\partial(\rho \Phi) / dt + \text{div}(\rho u \Phi) = \text{div}(\mu \text{grad} \Phi) + F, \quad (6.5.1)$$

для многофазного потока обобщенное уравнение записывается как

$$\partial(\alpha_i \rho_i \Phi_i) / dt + \text{div}(\alpha_i \rho_i u_i \Phi_i - \alpha_i \mu_i \text{grad} \Phi_i) = \alpha_i F_{\alpha_i}. \quad (6.5.2)$$

Конкретный вид F зависит от смысла переменной Φ . Зависимая переменная Φ обозначает различные величины, такие как импульс единицы массы, энтальпия, массовая концентрация компоненты, удельная кинетическая энергия турбулентности и пр.

Кроме того, поле скорости должно удовлетворять дополнительному ограничению, а именно – закону сохранения массы или уравнению неразрывности, имеющему вид:

– для однофазного потока:

$$\partial \rho / dt + \text{div}(\rho u) = 0; \quad (6.5.3)$$

– для многофазного потока это уравнение переписывается как

$$\partial(\alpha_i \rho_i) / dt + \text{div}(\alpha_i \rho_i u_i) = 0, \quad (6.5.4)$$

где t , α_i , ρ_i , μ_i , u_i , F_i – время (с), объемная доля, плотность ($\text{кг}/\text{м}^3$), коэффициент переноса субстанции, вектор скорости (м/с), источник субстанции Φ , соответственно (i – номер фазы: 1 – сплошная, 2 – дисперсная).

Процедура записи дифференциальных уравнений, выражающих законы сохранения импульса, массы и энергии в обобщенном виде (6.5.1)–(6.5.4), заключается в их преобразовании до тех пор, пока нестационарный, диффузионный и источниковый члены уравнения для данной зависимой переменной не примут стандартный вид. Тогда в качестве выражения для μ берут коэффициент перед $\text{grad } \Phi$ в диффузионном члене, а все оставшиеся члены в правой части обозначают через источниковый член F .

6.6. Описание метода

Тот факт, что все интересующие нас дифференциальные уравнения, описывающие теплообмен, гидродинамику и турбулентность, можно рассматривать как частный случай обобщенного уравнения для Φ , позволяет ограничиться численным решением уравнения (6.5.1)–(6.5.4), которую можно применить для нахождения различных Φ при использовании соответствующих выражений для μ и F и, конечно, соответствующих начальных и граничных условий. Таким образом, концепция обобщенного уравнения позволяет сформулировать обобщенный численный метод.

Численное решение дифференциальных уравнений состоит из набора чисел, по которому можно построить распределение зависимой переменной Φ . В этом смысле численный метод подобен лабораторному эксперименту, где имеется возможность определить распределение измеряемой величины в рассматриваемой области по набору показаний приборов. И исследователи, применяющие численный анализ, и экспериментаторы должны довольствоваться результатом, состоящим из конечного числа значений, хотя их количество, в принципе, можно сделать достаточным для практических целей.

В качестве основных неизвестных в численном методе рассматриваются значения зависимой переменной в конечном числе точек. Метод включает в себя получение системы алгебраических уравнений для этих неизвестных и алгоритм решения этих уравнений.

Полагается, что в любом сечении на достаточно малом участке профили скоростей, температур и т.д. описываются простыми алгебраическими выражениями (например, полиномами относительно

расстояния от стенки), содержащими свободные параметры (например, коэффициенты полинома).

Дифференциальные уравнения в частных производных последовательно умножаются на некоторые функции зависимых и независимых или только независимых переменных, названных «весовыми функциями». Далее уравнения интегрируются по конечному объему вычислительной ячейки и конечному промежутку времени.

Подынтегральные функции аппроксимируются при помощи интерполяционных формул через их значения на границах ячейки. PHOENICS располагает широкой разновидностью интерполяционных формул, предлагаемых по умолчанию и на выбор.

В результате получается аппроксимирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений на всех границах вычислительной ячейки. Эта система замыкается граничными условиями, которые ставятся с помощью рядов фиктивных ячеек (чтобы каждую расчетную точку сделать внутренней и сохранить единый алгоритм для всех ячеек).

Расчеты могут проводиться в пространственно одно-, двух- и трехмерных областях на равномерных и неравномерных сетках как в прямоугольной, так и в криволинейных, в том числе неортогональных, системах координат.

Конечно-объемный метод распространен на многопараметрическом классе разностных схем расщепления, из которого можно выбрать оптимальные алгоритмы для вычислительных систем с различной архитектурой. С его помощью решаются системы уравнений Эйлера, Навье–Стокса, радиационной газовой динамики, упругопластичности, динамики плазмы, теории фильтрации, механики многофазных сред и т.д.

Для замыкания системы дифференциальных уравнений она должна быть снабжена дополнительными уравнениями. Дополнительные уравнения несут информацию о вспомогательных переменных и граничных условиях. Вспомогательной переменной может быть алгебраическая функция других вспомогательных и зависимых переменных. PHOENICS снабжен множеством формул для вспомогательных переменных. Пользователю также предоставляется возможность использовать свои вспомогательные переменные. Вспомогательные переменные отличаются от зависимых переменных тем, что они получены скорее из алгебраических уравнений, чем от дифференциальных. Примеры вспомогательных переменных:

1. Молекулярные свойства сред, такие, как молекулярная вязкость, коэффициент диффузии, числа Прандтля и т.д.;

2. Термодинамические свойства – плотность, энтальпия насыщения и т.д.;

3. Количественные характеристики турбулентности – масштаб длины, турбулентная кинематическая вязкость, скорость образования и т.д.;

4. Межфазно - транспортные параметры – коэффициент межфазной фрикции, теплообмена и т.д.

Если эти переменные заданы константами, то они представляются в PHOENICS как скаляры, если же они не являются константами, то они представляются как функции от большого количества заложенных в программу зависимых переменных.

При развитии турбулентном течении граничные условия для твердой стенки должны описывать пограничный слой пристеночными функциями, которые используют эмпирические формулы. В программном комплексе PHOENICS используются три типа

пристеночных функций: степенной закон Блазиуса, логарифмическая пристеночная функция и обобщенная пристеночная функция.

Основная идея конечно-объемного метода легко понятна и поддается прямой физической интерпретации. Расчетную область разбивают на некоторое число непересекающихся контрольных объемов таким образом, что каждая узловая точка содержится в одном контрольном объеме. Дифференциальное уравнение интегрируется по каждому контрольному объему. Для вычисления интегралов используют кусочные профили, которые описывают изменение Φ между узловыми точками. В результате находят дискретный аналог дифференциального уравнения, в который входят значения Φ в нескольких узловых точках.

Полученный подобным образом дискретный аналог выражает закон сохранения Φ для конечного контрольного объема точно так же, как дифференциальное уравнение выражает закон сохранения для бесконечно малого контрольного объема. Одним из важных свойств этого метода является то, что в нем заложено точное интегральное сохранение таких величин, как масса, количество движения и энергия на любой группе контрольных объемов и, следовательно, на всей расчетной области. Это свойство проявляется при любом числе узловых точек, а не только в предельном случае очень большого их числа. Таким образом, решение на грубой сетке удовлетворяет точным интегральным балансам.

Свобода выбора интерполяционных функций и профилей ведет к существованию множества способов получения дискретных аналогов уравнения. Предполагается, что при увеличении числа узловых точек решение всех дискретных аналогов исходного уравнения совпадает. Однако наложим дополнительное требование, которое приведет к

сужению числа подходящих формул. Потребуем, чтобы решение, полученное даже на грубой сетке, во-первых, всегда имело физически правдоподобный характер и, во-вторых, сохраняло полный баланс.

При разбивке на сетку часто желательно использовать неравномерную сетку, так как это позволяет эффективно загружать вычислительную машину. Сетка должна быть непосредственно связана с характером изменения зависимой переменной в расчетной области. Кроме того, нет общих правил, согласно которым максимальное (или минимальное) соотношение соседних сеточных интервалов должно быть одним и тем же. Число узловых точек, необходимое для требуемой точности и выбранного метода, должно распределяться в расчетной области в соответствии с природой решаемой задачи.

Исследование решений, использующих только несколько сеточных узлов, позволит судить о поведении решения. Ведь таким же образом поступают обычно в лабораторном эксперименте. Проводятся предварительные эксперименты или пробные опыты, и их результаты используются для определения числа и места расположения датчиков, необходимых для конечного эксперимента.

Трудность расчета поля скорости связана с неизвестным полем давления. Градиент давления составляет часть источникового члена в уравнении количества движения, при этом нет явного уравнения для определения давления. При заданном поле давления решение уравнений количества движения не представляет особой сложности. Однако способ нахождения поля давления не очевиден.

Поле давления определяется через уравнение неразрывности. Если правильное поле давления подставить в уравнение количества движения, то получаемое из них поле скорости будет удовлетворять уравнению неразрывности. Такой косвенный способ нахождения

давления не очень удобен для наших целей, если только не считать прямого решения всей системы уравнений, получаемой из дискретных аналогов уравнений количества движения и неразрывности.

Связанные с нахождением давления трудности привели к возникновению методов, основанных на решении уравнений, получаемых при исключении давления из системы определяющих уравнений. При этом, в случае двумерных задач, исключение давления из двух уравнений количества движения путем перекрестного дифференцирования каждого уравнения приводит к уравнению переноса вихря. Вместе с введением функции тока для стационарных задач двумерных течений этот метод является основой широко известного метода решения в переменных функция тока – вихрь. Однако при использовании этого метода задача оказывается сложнее, чем при использовании непосредственно трех составляющих скорости и давления.

Разработчиками программного комплекса PHOENICS была разработана методика, позволяющая преобразовывать косвенную информацию, заложенную в уравнение неразрывности в алгоритм прямого расчета давления. Процедура, разработанная для расчета поля давления, получила название SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations), что означает «полуявный метод для связанных с давлением уравнений». Разработанный алгоритм строит поле давления по заданному полю скорости.

Уравнения количества движения и для поправки давления решаются последовательно итерационной процедурой. Использование итераций во многом упрощает использование численного метода. С их помощью можно справиться с любой нелинейностью и взаимозависимостью. Конечно, имеет смысл лишь такой итерационный

метод, с помощью которого можно достигнуть сходимости. Итерационный процесс считается законченным, когда дальнейшие итерации не приводят к изменению зависимых переменных. Для каждой узловой точки рассчитывается невязка. Очевидно, что если дискретный аналог удовлетворяется точно, то невязка равна нулю. Удовлетворительным критерием сходимости является условие, что максимальное значение невязки должно быть меньше некоторого малого числа.

Граничные условия в программном комплексе PHOENICS интерпретируются как источники и рассматриваются в общих балансовых соотношениях сохранения импульса, массы и энергии и других субстанций. Действительно, вход потока в расчетную область – это источник массы, импульса, тепловой энергии; если поток является турбулентным, то это еще и источник турбулентной энергии, если рассматривается перенос скаляра, скажем, концентрации растворенного вещества, то это еще и входной поток этого скаляра. Выход потока также является источником, или точнее, стоком. Граничные условия на стенке также можно трактовать как источники: стенка вызывает торможение среды, то есть является источником импульса, если есть теплообмен через стенку, то это еще и источник тепловой энергии и т.д.

Граничные условия на стенке для турбулентного потока задаются либо с использованием пристеночных функций, либо демпферных функций. В первом случае предполагается, что внешняя сторона прилегающей к стенке ячейки находится в зоне полностью развитой турбулентности (или в ядре потока). Это позволяет поставить граничные условия на стенке путем задания пристеночных функций, выражающих логарифмический профиль скорости у стенки и включить соответствующие соотношения в итерационный процесс. Во втором

случае уравнения турбулентного движения распространяются на все ячейки, включая и ячейки, прилегающие к границе, но в этом случае закон затухания турбулентности у стенки задается путем введения демпферных функций. А собственно граничными условиями на стенке в этом случае является условие прилипания, то есть равенство скорости на стенке нулю. В этом случае густота расчетной сетки около стенки должна быть существенно гуще, чем при постановке граничных условий путем задания пристеночных функций, поэтому в данной работе использован первый вариант постановки граничных условий на стенке, то есть путем задания пристеночных функций.

6.7. Структура потоков

Исторически первыми попытками охарактеризовать гидродинамику и структуру потока в промышленном аппарате были модели идеального *смешения* и идеального *вытеснения*. В модели идеального вытеснения предполагается, что все элементы жидкости в аппарате имеют одно и то же время пребывания, что соответствует поршневому, или стержневому движению среды. При этом обеспечивается максимальная движущая сила тепломассообменных процессов и наиболее эффективный режим работы многих химико-технологических, нефтехимических и теплоэнергетических устройств. В дальнейшем отклонение структуры потока от модели идеального вытеснения стали характеризовать распределением по временам пребывания различных элементарных объемов жидкости. В связи с этим возникла необходимость экспериментального и теоретического определения функции распределения по временам пребывания (табл. 6.1).

Экспериментально функция распределения по временам пребывания может быть найдена по кривым отклика на ввод трассера. В частности, показано, что при импульсном вводе трассера на вход, кривая отклика на выходе после соответствующей нормировки и перехода к безразмерному времени как раз и дает функцию распределения по временам пребывания.

Теоретически первыми попытками использования кривых отклика для идентификации математических моделей структуры потоков стали вычисления коэффициентов продольного перемешивания D_L и D_R *диффузионной модели* структуры потоков. По этим же кривым также можно судить и о том, насколько точно диффузионная модель продольного перемешивания отражает реальную структуру потока, так как невозможно подобрать такой коэффициент, при котором теоретическая кривая точно совпадает с экспериментальной.

Таким образом, путем сравнения теоретических и экспериментальных кривых отклика можно делать выводы об адекватности модельных представлений.

В табл. 6.1. обозначения: C – концентрация; θ – время; x , R – продольная и радиальная координаты; ω – средняя скорость потока; V – объем аппарата; V_c – объемная скорость потока; n – число ячеек.

Конечно, сравнение теоретических и экспериментальных данных по полям скорости могло бы дать более полную информацию, чем сравнение кривых отклика. Современным стандартом определения поля скорости является метод лазерной доплеровской анемометрии. Однако преимущества сравнения кривых отклика для сопоставления

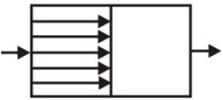
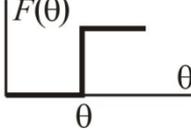
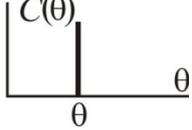
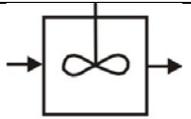
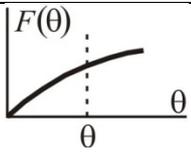
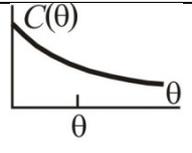
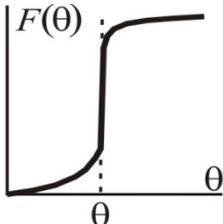
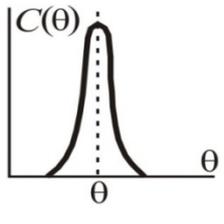
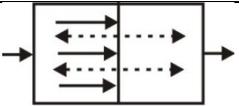
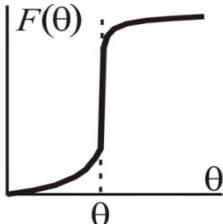
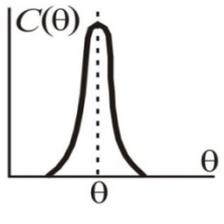
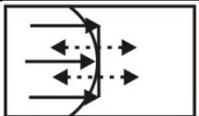
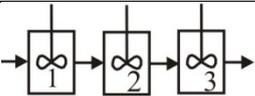
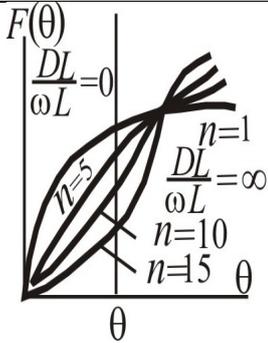
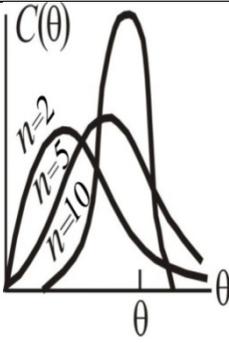
теоретических и экспериментальных данных по структуре потока вполне очевидны и состоят в следующем.

1. Снятие кривых отклика является достаточно дешевым способом экспериментального изучения структуры потока. Метод лазерной доплеровской анемометрии обходится на порядки дороже и требует привлечения сложного и дорогостоящего оборудования и специальных методов обработки данных.

2. Метод кривых отклика позволяет работать с аппаратами промышленного масштаба с непрозрачными стенками. Между тем, метод лазерной доплеровской анемометрии работает с прозрачными для лазерного луча сосудами лабораторного масштаба.

3. На практике часто интересуют не локальные параметры, а брутто-характеристики на выходе из аппарата. Например, если протекает химическая реакция и степень конверсии зависит от времени пребывания, то нас будет интересовать среднее время пребывания в аппарате и разброс во времени пребывания относительно этого среднего. То же самое касается многих процессов разделения – распределение по временам пребывания является хорошим интегральным показателем эффективности работы аппарата.

Таблица 6.1. Типовые модели структуры потоков в аппаратах химической технологии

Схема потока	Математическое описание	Характер отклика	
		Ступенчатое возмущение	Импульсное возмущение
1. Модель идеального вытеснения			
	$\frac{\partial C}{\partial \theta} = -\omega \frac{\partial C}{\partial x}$		
2. Модель идеального смешения			
	$\frac{\partial C}{\partial \theta} = \frac{V_c}{V} (C_{\text{вх}} - C)$		
3. Диффузионные модели			
а) однопараметрическая			
	$\frac{\partial C}{\partial \theta} = -\omega \frac{\partial C}{\partial x} + D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$		
б) двухпараметрическая			
	$\frac{\partial C}{\partial \theta} = -\omega \frac{\partial C}{\partial x} + D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{D_R}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial C}{\partial R} \right)$		
Ячеечная модель			
	$\frac{1}{n} \frac{dC}{d\theta} = \theta_n (C_{i-1} - C_i)$ $i = 1, 2, \dots, n$		

Для расчета эффективности промышленных массообменных аппаратов наибольшее применение получили одно или двухпараметрическая диффузионная модель, а также комбинированные модели, состоящие из диффузионной модели, ячеечной модели с учетом рецикла и байпаса потоков.

6.8. Стадии проектирования

Проектирование технологических установок складывается из трех стадий: составления проектного задания (технического задания), разработки технического проекта и выполнения рабочих чертежей. В некоторых случаях стадии проектирования могут совмещаться.

Проектное задание включает в сокращенном виде исходный материал для проектирования, например, техническое задание, содержащее принципиальные требования и пожелания к проекту, основные технологические чертежи, исходные условия и материалы для проектирования (географическая привязка, сырьевая база, источники энергии).

В соответствии с проектным заданием, проектируемый объект должен отвечать определенным технологическим и экономическим требованиям. По технологическим требованиям объект должен полностью соответствовать рабочим чертежам и техническим условиям выпуска заданной продукции. По экономическим требованиям сооружение объекта должно вестись с минимальными затратами труда и с минимальными издержками производства. Проектное задание получается наиболее полноценным, если в его составлении принимают участие специалисты, хорошо знакомые с современными аналогичными объектами и с общим направлением проектирования.

Задача проектирования технологических объектов характеризуется многовариантностью возможных решений. Из нескольких возможных вариантов выполнения проектного задания, равноценных с позиций технических требований, выбирается наиболее эффективный и рентабельный.

В техническом проекте дается окончательное техническое решение вопросов, поставленных в проектном задании, включающее основные элементы:

1. Принципиальные схемы технологического процесса, основные исходные технологические и энергетические параметры и схемы управления, контроля и автоматизации объекта;

2. Чертежи общих видов основных технологических агрегатов и нестандартного вспомогательного оборудования;

3. Компоновочные и строительные чертежи с необходимым количеством планов на различных отметках по высоте здания;

4. Развернутые схемы энерго-, водо- и газоснабжения;

5. Спецификации на все серийное и стандартное вспомогательное оборудование, контрольно-измерительные приборы и элементы схемы автоматизации и защиты;

6. Перечень особых требований по технике безопасности, противопожарной, грозовой, паводковой и других видов защиты объекта;

7. Сметы на оборудование, монтаж и наладку;

8. Сметы на пробную эксплуатацию смонтированного оборудования;

9. Пояснительную записку.

На основании технического проекта заказывают основное и вспомогательное оборудование, приборы контроля и автоматического

регулирования и определяют объем затрат на реализацию проекта. После рассмотрения специалистами и утверждения проекта приступают к выполнению рабочих чертежей и к составлению спецификации на строительные материалы, трубы, арматуру, кабели, монтажное оборудование и инструменты, вспомогательные материалы и средства механизации.

Комплект рабочих чертежей состоит из следующих частей:

1. Чертежей транспортных, энергетических и канализационных коммуникаций;
2. Строительных и монтажных чертежей;
3. Чертежей основного оборудования в сборе со всеми коммуникационными трубопроводами, лестницами и площадками обслуживания;
4. Чертежей узлов и отдельных элементов оборудования;
5. Чертежей монтажно-коммуникационных схем щитов, пультов управления и установки приборов контроля и регулирования;
6. Чертежей различных специальных конструкций.

При изготовлении рабочих чертежей следует широко применять разработанные проектными организациями типовые чертежи и только в виде исключения выполнять специальные рабочие чертежи. В ряде случаев, при наличии опытного монтажного персонала, объем рабочих чертежей можно существенно сократить.

6.9 Этапы проектирования

Существуют следующие этапы проектирования (САПР) нового объекта:

1. Техническое задание – начало проектирования.

2. Научно-исследовательская работа (НИР) – проведение расчетов, работа с литературой, архивами и выбор технических решений по объекту проектирования.

3. Эскизное проектирование – определение внешних ограничений, выбор методов, расчеты, эскизные чертежи.

4. Рабочее проектирование – разработка рабочих чертежей и полного комплекта документации по объекту.

5. Технологическая подготовка производства.

6. Изготовление – разработка графиков и запуск производства.

7. Техническое обслуживание.

Порядок выполнения этих видов деятельности не имеет значения, так как на практике они следуют в произвольной последовательности. САПР находит применение в большей мере там, где существуют единообразные виды деятельности. САПР использует ЭВМ для облегчения работы проектировщика.

Современный уровень программных и технических средств электронной вычислительной техники позволяет перейти от традиционных, ручных методов конструирования к новым информационным технологиям с использованием ЭВМ, создавать системы автоматизации разработки и выполнения конструкторской документации (АКД), удовлетворяющие стандартам ЕСКД как по качеству исполнения документов, так и по соблюдению требований стандартов.

6.10 Проблема масштабного перехода

Важной и сложной задачей в различных отраслях промышленности является проектирование новых и модернизации

действующих массо- и теплообменных аппаратов большой единичной мощности, значительную часть которых составляют колонные аппараты для разделения многокомпонентных смесей в системах газ (пар)-жидкость и жидкость-жидкость. При этом одной из основных проблем является снижение эффективности процессов разделения смесей в промышленных массообменных колоннах при увеличении их размеров, что получило название «масштабного эффекта». Установлено, что масштабный эффект имеет гидродинамическую природу и обусловлен увеличением неравномерности распределения фаз и полевых переменных на промышленном контактном устройстве по сравнению с его лабораторным макетом. Так, например, эффективность колпачковых и клапанных тарелок уменьшается примерно в два раза при увеличении их диаметра от одного до 3–4 метров.

Изучение масштабных эффектов показало, что они могут быть вызваны неравномерностями следующих четырех типов:

1. Входными неравномерностями – неоднородностями распределения потоков газа и жидкости на входе контактного устройства;
2. Неравномерностями, вызванными внутренними закономерностями двухфазного течения;
3. Неравномерностями, вызванными дефектами монтажа;
4. Неравномерностями, обусловленными дефектами конструкции.

Роль каждого из этих факторов существенно зависит от типа аппарата. Так, например, в тарельчатых колоннах с перекрестным движением фаз возникают как продольная, так и поперечная неравномерности в объемах газа и жидкости.

Применяемые в настоящее время способы подвода газовых (паровых) и газожидкостных потоков в колонных аппаратах без использования эффективных распределителей приводят к заметному снижению разделяющей способности не только насадочных и тарельчатых колонн, но и реакторов, отстойников и других аппаратов. Вследствие неравномерности профиля скорости, в поперечном сечении колонн возникают зоны со значительными локальными максимумами скорости газовых (паровых) фаз, в которых значение уноса превышает допустимое. Это приводит не только к снижению эффективности разделения за счет снижения движущей силы. В случае тарельчатой колонны это может привести к нарушению нормальной работы 2–3 тарелок, а для насадочной колонны, не только к потере разделяющей способности целой насадочной секции, но и к преждевременному захлебыванию колонны.

Аналогичная ситуация и со штуцерами для отвода газовой (паровой) фазы.

Как правило, подобные неравномерности невозможно установить на физической модели небольшого диаметра, поэтому эти недостатки обнаруживаются и устраняются только путем промышленного испытания или гидродинамического моделирования контактных устройств на стендах промышленного размера.

Наличие в математических моделях большого числа эмпирических коэффициентов, определяемых экспериментальным путем на установках различного масштаба, значительно увеличивает затраты, сроки проектирования и модернизации массообменных аппаратов. Такая система проектирования затягивает внедрение в промышленность научных разработок и обладает принципиальным дефектом – неоптимальностью выбранных конструкций.

Применение метода гидродинамического моделирования связано с исследованием гидродинамики потока в аппаратах натурального диаметра, но меньшей высоты. Этот метод предполагает проведение исследования эффективности и выбор конструкции контактного устройства в два этапа, исключая все промежуточные: на лабораторном аппарате и гидродинамическом стенде. Основные недостатки такого подхода заключаются в необходимости построения модели натурального масштаба и сложности проведения гидродинамических исследований, и, что особенно ограничивает широкое использование данного метода, – это невозможность анализа множества вариантов и выбора оптимальной конструкции аппарата.

6.11 Подходы к конструированию массообменных аппаратов

Теоретический путь конструирования промышленных аппаратов в первую очередь связан с определением эффективности разделения смесей и теплообмена на контактных устройствах. В большинстве случаев задачи замыкания математического описания процессов имеют полуэмпирический характер решения, который ограничен определенным интервалом работы и заданной конструкцией контактного устройства. Известно, что существенную роль в эффективности массообменного процесса играет структура потоков в аппарате. Как видно из многочисленных исследований и промышленной практики, при увеличении размера аппарата (например, с барботажными тарелками или насадкой) структура потоков значительно меняется, появляется большое число застойных зон, усиливается обратное перемешивание, снижается движущая сила процесса, это вызывает падение эффективности массообмена.

В общем виде КПД массообменного контактного устройства или эффективность по Мерффри определяют как отношение изменения концентраций компонента в фазе на контактном устройстве (КУ) относительно равновесной:

$$E = \frac{C_H - C_K}{C_H - C^*}, \quad (6.11.1)$$

где C_K – концентрация компонента в фазе на выходе с КУ, масс. д.; C_H – концентрация компонента в фазе на входе в КУ, масс. д.; C^* – равновесная концентрация компонента, масс. д.

Форма записи выражения (6.11.1) зависит от вида массообменного процесса и направления движущей силы.

Также в качестве интегральной характеристики эффективности массопередачи используется коэффициент извлечения φ . В общем виде для процесса абсорбции он записывается как

$$\varphi = \frac{C_H - C_K}{C_H} \cdot 100, \%. \quad (6.11.2)$$

Как известно, эффективность разделения смеси зависит от структуры потоков сплошной и дисперсной фаз на КУ, интенсивности тепло- и массообмена и площади межфазной поверхности. Используются разные модели для определения эффективности КУ в зависимости от принятой структуры потоков в аппарате (см. табл. 6.1):

1. Модель идеального смешения для обеих фаз.
2. Модель идеального смешения для сплошной и вытеснения для дисперсной фазы.

3. Модель идеального вытеснения для сплошной фазы и идеального смешения для дисперсной.

4. Ячеечная модель для сплошной и дисперсной фаз.

5. Диффузионная модель для одной из фаз и т.д.

Из вышеперечисленных моделей могут создаваться комбинированные модели, осложненные байпасом и рециклом. При этом число параметров, определяемых экспериментальным путем, увеличивается.

Такими параметрами являются: число ячеек полного перемешивания, коэффициент продольного (обратного) перемешивания, коэффициенты рецикла и байпаса. Эти параметры зависят как от режима работы аппарата, так и от его масштаба и конструкции. Актуальной является задача создания математической модели процессов переноса импульса, массы и тепла с минимальным привлечением экспериментальных данных.

При разработке новых или совершенствовании действующих промышленных аппаратов могут использоваться как априорные, так и структурно-конструктивные подходы.

Для физико-химических систем, созданных на априорной основе, характерно, как правило, сильное взаимодействие определяющих явлений, не выраженность механизмов их протекания, неопределенность связей между ними и масштабом аппарата. Такая не выраженность структуры системы является главным препятствием моделирования их на основе теории подобия, ограничивая области ее применения локальными актами массопередачи и простыми явлениями. В то же время в других областях техники постулируется возможность использования теории подобия для моделирования сложных систем.

Используется подход, который получил название гидродинамического моделирования и заключается в исследовании гидродинамики потока в промышленном аппарате натурального диаметра, но меньшей высоты. При этом по возможности устраняются неоднородности, которые появляются вследствие увеличения размера контактного устройства. На основе выполненных гидравлических исследований расчет эффективности массопередачи можно выполнить по математическим моделям. При этом можно уточнить влияние тех или иных факторов (масштабных эффектов) на эффективность разделения смеси без привлечения экспериментальных данных по массообмену.

6.12 Сопряженное физическое и математическое моделирование при проектировании аппаратов

Перспективным представляется направление совершенствования процедуры освоения априорных конструкций аппаратов, связанное с упрощением их структуры и сведением задачи моделирования ограниченного числа определяющих явлений или их совокупности.

Подход, позволяющий выполнить переход от математического описания процессов на макете контактного устройства к промышленному аппарату, получил название сопряженного физического и математического моделирования.

Сделан вывод, что оптимальный способ проектирования промышленных аппаратов, сокращающий затраты, сроки разработки и внедрения, возможен только на пути отказа от промежуточных этапов исследования. Отработку конструкции, исходя из требования технического задания, целесообразно проводить на лабораторных

макетах, а для масштабного перехода к промышленному аппарату использовать методы математического моделирования с использованием фундаментальных законов сохранения.

Концепция данного метода основана на представлении процессов, происходящих в промышленном аппарате, в виде иерархической системы взаимодействующих между собой элементарных явлений, что дает возможность исследовать эти явления на макете, а затем, при масштабном переходе, определить параметры модели вариационным методом с использованием локального потенциала на основе удовлетворения законам сохранения. При этом совсем не обязательно должно сохраняться подобие макета и промышленного аппарата.

Согласно системному анализу, позволившему сформулировать принцип иерархического существования явлений в промышленном аппарате, явления различных масштабов могут быть рассмотрены независимо, а затем учтено их взаимодействие. Этот подход привел к значительным упрощениям при построении математических моделей сложных химико-технологических объектов.

Исследование и описание полей в характерной области рабочей зоны аппарата может проводиться независимо от других областей вне аппарата на ее физической модели. На основе эксперимента устанавливаются базисные функции, которые описывают поля с заданной точностью. При масштабном переходе к промышленному аппарату конструктивные и режимные возмущения, в определенном интервале их значений, не изменяют структуру базисных функций, а влияют лишь на ее параметры. Подстройка параметров базисных функций, описывающих физические поля для заданного интервала режимных и конструктивных возмущений в промышленном аппарате,

выполняется на основе удовлетворения законам сохранения импульса, массы и энергии. Решение этой задачи осуществляется вариационным методом, учитывающим краевые условия различного вида. Вариационный метод заключается в построении функционала, минимизация которого приводит к уравнениям Эйлера–Лагранжа, совпадающим с законами сохранения импульса, массы и энергии.

Математическое описание характерной области имеет структуру базисной функции только для таких конструктивных и режимных возмущений, при которых отклонение значения функции от точного решения уравнений балансов не превышает заданную погрешность. Эта погрешность обычно находится в пределах погрешности экспериментальных исследований физической модели. В области возмущений, где отклонение превышает допустимую погрешность, структура базисной функции не сохраняется. В этом случае для описания процесса необходимо выбрать конкурирующую базисную функцию, параметры которой обеспечивают минимальное значение функционала и, следовательно, удовлетворяют уравнениям баланса.

Таким образом, метод сопряженного физического и математического моделирования позволяет установить распределение полей скоростей, концентраций и температур в рабочей зоне промышленного аппарата на основе базисных функций элементарных областей, полученных на макете с известной погрешностью.

При проектировании новых аппаратов, когда экспериментальные данные по физическим полям в характерных областях отсутствуют, базисные функции можно выбрать путем решения уравнения Эйлера–Лагранжа, записанных для характерных областей макета.

Разработанные методы позволяют на основе банка базисных функций характерных областей осуществлять в автоматизированном

режиме с помощью ЭВМ построение математической модели процесса в промышленном аппарате, выбор его оптимальной конструкции и режима работы без идентификации параметров на пилотных и промышленных образцах.

Контрольные вопросы

1. Как записываются законы сохранения импульса, массы и энергии?
2. Какие модели структуры потоков используются в расчетах аппаратов?
3. В чем заключается проблема масштабного перехода?
4. Численные методы расчета аппаратов.

Основная литература

1. Лаптев А.Г. Модели пограничного слоя и расчет тепломассобенных процессов. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2007. – 500с.
2. Лаптев А.Г., Николаев Н.А., Башаров М.М. Методы интенсификации и моделирования тепломассообменных процессов. – М.: Теплотехник, 2011. – 287с.
3. Лаптев А.Г., Фарахов М.И., Минеев Н.Г. Основы расчета и модернизация тепломассообменных установок в нефтехимии -Казань: Казан. гос. энер. ун.,2010,- 574с.
4. Ландау Л.Д. Теоретическая физика / Л.Д.Ландау, В.М. Лившиц: учеб. пособие: в 10 т. – Т.6. Гидродинамика. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2003. – 560с.
5. Лаптев А.Г. Теоретические основы и расчет аппаратов разделения гомогенных смесей: Учеб. пособие / А.Г.Лаптев, А.М. Конахин, Н.Г.Минеев. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2007.-424с.

Дополнительная литература

1. Лаптев А.Г. Математические модели и расчет гидродинамических характеристик пограничного слоя / А.Г. Лаптев, Т.М. Фарахов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №08(82). 710-744с. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/52.pdf>.

2. Лаптев А.Г. Модели переноса и эффективность жидкостной экстракции / А.Г. Лаптев. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2005. – 299 с.
3. Лаптев А.Г. Разделение гетерогенных систем в насадочных аппаратах / А.Г. Лаптев, М.И. Фарахов. – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2006. – 342с.
4. Башаров М.М., Лаптева Е.А., Хамидуллина Г.К. Модель теплоотдачи при турбулентном гравитационном пленочном течении / Изв. вузов Проблемы энергетики, 2012, № 9-10, стр. 40-45
5. Айнштейн В.Г. Общий курс процессов и аппаратов химической технологии: Учебник: в 2-х кн. / В.Г. Айнштейн, М.К.Захаров, Г.А.Носов и др.; под ред. В.Г. Айнштейна. – М.: Университетская книга; Логос; Физматкнига, 2006.
6. Гиргидов А.Д. Механика жидкости и газа (гидравлика): Учебник для вузов. – 2 изд., испр. и доп. / А.Д. Гиргидов. – СПб: Изд-во СПбГПУ, 2003.
7. Гортышов Ю.Ф. Теплогидравлический расчет и проектирование оборудования с интенсифицированным теплообменом / Ю.Ф. Гортышов, В.В.Олимпиев, Б.Е. Байгалиев. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2004.
8. Дзюбенко Б.В. Интенсификация тепло-и массообмена в энергетике / Б.В.Дзюбенко, Ю.А.Кузма-Кичта, А.М. Кутепов и др. – М.: ФГУП «ЦНИИАТОМ-ИНФОРМ», 2003.
9. Захарова А.А. Процессы и аппараты химической технологии: Учеб. пособие для вузов / А.А.Захарова, Л.Т. Бахтиева, Б.П.Кондауров и др.; под ред. А.А.Захаровой. – М.: Академия, 2006.

10. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии: Учебник для вузов. – 11-е изд. / А.Г.Касаткин. – М.: ООО ТИД «Альянс», 2005.
11. Лабунцов Д.А. Механика двухфазных систем: Учеб. пособ. для вузов / Д.А. Лабунцов, В.В. Ягов – М.: Издательский дом МЭИ, 2007.
12. Назмеев Ю.Г. Теплообменные аппараты ТЭС: – Учеб. пособие для вузов / Ю.Г. Назмеев, В.М. Лавыгин. – М.: Изд-во МЭИ, 2002.
13. Павлов К.Ф. Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии: Учеб. пособие для вузов. – 12-е изд. / К.Ф.Павлов, П.Г. Романков, А.А.Носков. – М.: Альянс, 2005.
14. Прандтль Л. Гидроаэромеханика / Л.Прандтль. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
15. Репик Е.У. Турбулентный пограничный слой. Методика и результаты экспериментальных исследований / Е.У. Репик, Ю.П. Соседко. – М.: Физматлит, 2007.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1. Физические свойства жидкостей

Жидкость	Химическая формула	Молярная масса, кг/кмоль	Температура кипения, °С	Молярный объем, см ³ /моль
Азотная кислота	HNO ₃	63,1	86,0	5,7
Аммиак	NH ₃	17	-33,4	25,8
Ацетон	CH ₃ COCH ₃	58,08	56	74,0
Бензол	C ₆ H ₆	78,11	80,2	96,0
Вода	H ₂ O	18,016	100	18,9
Изопропиловый спирт	C ₃ H ₇ OH	60,09	82,4	81,4
Метиловый спирт	CH ₃ OH	32,04	64,7	37,0
Серовуглерод	CS ₂	76,13	46,3	51,2
Толуол	C ₆ H ₅ CH ₃	92,13	110,8	133,2
Уксусная кислота	C ₂ H ₄ O ₂	60,05	118	68,4
Хлороформ	CHCl ₃	119,38	61,2	90,3
Четыреххлористый углерод	CCl ₄	153,84	76,7	113,2
Этилацетат	CH ₃ COOC ₂ H ₅	88,10	77,15	107,0
Этиловый спирт	C ₂ H ₅ OH	46,07	78,3	59,2

Таблица 2. Плотность жидких веществ и водных растворов

Вещество	Плотность, кг/м ³							
	при -20 °С	при 0 °С	при 20 °С	при 40 °С	при 60 °С	при 80 °С	при 100 °С	при 120 °С
Азотная кислота 50 %-ная	-	1334	1310	1287	1263	1238	1212	1186
100 %-ная	1582	1547	1513	1478	1443	1408	1373	1338
<i>Аммиак жидкий</i>	665	639	610	580	545	510	462	390
Ацетон	835	813	791	768	746	719	693	665
Бензол	-	900	879	858	836	815	793	769
Вода	-	1000	998	992	983	972	958	943
Изопропиловый спирт	817	801	785	768	752	735	718	700
Метиловый спирт 40 %-ный	-	946	935	924	913	902	891	880
100 %-ный	828	810	792	774	756	736	714	
<i>Сероуглерод</i>	1323	1293	1263	1233	1200	1165	1125	1082
<i>Толуол</i>	902	884	866	847	828	808	788	766
Уксусная кислота 50 %-ная	-	1074	1058	1042	1026	1010	994	978
100 %-ная	-	1072	1048	1027	1004	981	958	922
<i>Хлороформ</i>	1563	1526	1489	1450	1411	1380	1326	1280
Четыреххлористый углерод	1670	1633	1594	1556	1517	1471	1434	1390
<i>Этилацетат</i>	947	924	901	876	851	825	797	768
Этиловый спирт	823	806	789	772	754	735	716	693

Таблица 3. Удельная теплота испарения жидких веществ

Вещество	Теплота испарения, ккал/кг							
	0 °С	20 °С	40 °С	60 °С	80 °С	100 °С	120 °С	140 °С
Аммиак	302	284	263	238	208	169	113	-
Ацетон	135	132	128	124	118	113	107	100
Бензол	107	104	101	97,5	94,3	90,5	86,7	82,6
Вода	595	584,2	573,5	562,5	551,3	539,3	526,7	513,1
Изопропиловый спирт	185	179	173	167	160	152	144	133
Метиловый спирт	286	280	273	265	253	242	227	213
Сероуглерод	89,4	87,6	85,1	82,2	79,1	75,5	71,7	67,4
Толуол	99	97,3	95,1	92,8	90,5	88	85,2	82,1
Уксусная кислота	-	84,1	87,2	89,6	91,6	93,1	93,2	91,8
Хлороформ	64,8	62,8	61	59,1	57,2	55,2	53,2	51,2
Четыреххлористый углерод	52,1	51	49,7	48,2	46,2	44,3	42,3	40,1
Этилацетат	102	98,2	95,3	92,1	88,7	84,9	80,6	75,7
Этиловый спирт	220	218	215	210	203	194	182	170

Примечание: 1 ккал/кг=4,18 кДж/кг

Таблица 4. Удельная теплоемкость жидких веществ и водных растворов

Вещество	Удельная теплоемкость, ккал/кг·град							
	при -20 °С	при 0 °С	при 20 °С	при 40 °С	при 60 °С	при 80 °С	при 100 °С	при 120 °С
Азотная кислота	0,415	0,418	0,42	0,425	0,43	0,435	0,44	0,445
Аммиак жидкий	1,08	1,1	1,13	1,16	1,22	1,3	1,37	1,48
Ацетон	0,49	0,505	0,52	0,535	0,55	0,566	0,581	0,596
Бензол	-	0,39	0,413	0,436	0,46	0,483	0,506	0,52
Вода	-	1,01	0,999	0,998	1,0	1,0	1,01	1,02
Изопропиловый спирт	0,525	0,564	0,635	0,706	0,777	0,847	0,917	0,987
Метиловый спирт	0,569	0,589	0,613	0,637	0,66	0,684	0,708	0,732
Сероуглерод	0,232	0,235	0,238	0,242	0,245	0,248	0,252	0,255
Толуол	0,363	0,385	0,407	0,429	0,451	0,473	0,494	0,506
Уксусная кислота	-	0,45	0,476	0,502	0,527	0,553	0,579	0,605
Хлороформ	0,23	0,287	0,244	0,251	0,258	0,265	0,272	0,279
Четыреххлористый углерод	0,194	0,2	0,206	0,213	0,22	0,226	0,233	0,24
Этилацетат	0,424	0,441	0,458	0,475	0,493	0,51	0,527	0,544
Этиловый спирт	0,505	0,547	0,593	0,648	0,708	0,769	0,839	0,909

Примечание: 1 ккал/кг·град=4,18 кДж/кг/ кг·град

Таблица 5. Удельная теплота конденсации водяного пара, кДж/кг

Давление пара (абсолютное), кгс/см ²	Температура пара, °С	Удельная теплота конденсации, кДж/кг	Давление пара (абсолютное), кгс/см ²	Температура, °С	Удельная теплота конденсации, кДж/кг	Давление пара (абсолютное), кгс/см ²	Температура пара, °С	Удельная теплота конденсации, кДж/кг
1,0	99,1	2264	5,00	151,1	2117	13,00	190,7	1984
1,2	104,2	2249	6,00	158,1	2095	14,00	194,1	1968
1,4	108,7	2237	7,00	164,2	2075	15,00	197,4	1956
1,6	102,7	2227	8,00	169,6	2057	16,00	200,4	1943
1,8	116,3	2217	9,00	174,5	2040	17,00	203,4	1931
2,0	119,6	2208	10,00	179,0	2024	18,00	206,2	1920
3,0	132,9	2171	11,00	183,2	2009	19,00	208,8	1909
4,0	142,9	2141	12,00	187,1	1995	20,00	211,4	1898

Таблица 6. Вязкость жидких веществ и водных растворов

Вещество	Вязкость, сПз											
	При -20 °С	При -10 °С	При 0 °С	При 10 °С	При 20 °С	При 30 °С	При 40 °С	При 50 °С	При 60 °С	При 80 °С	При 100 °С	При 120 °С
Азотная кислота	1,49	1,24	1,05	0,92	0,8	0,72	0,64	0,57	0,5	0,39	0,35	0,31
Аммиак жидкий	0,258	0,251	0,244	0,235	0,226	0,217	0,208	0,199	0,19	-	-	-
Ацетон	0,5	0,442	0,395	0,356	0,322	0,293	0,268	0,246	0,23	0,2	0,17	0,15
Бензол	-	-	0,91	0,76	0,65	0,56	0,492	0,436	0,39	0,316	0,261	0,219
Вода	-	-	1,79	1,31	1,0	0,801	0,656	0,549	0,469	0,357	0,284	0,232
Изопропиловый спирт	10,1	6,8	4,6	3,26	2,39	1,76	1,33	1,03	0,8	0,52	0,38	0,29
Метиловый спирт	1,16	0,97	0,871	0,68	0,584	0,51	0,45	0,396	0,351	0,29	0,24	0,21
Серовуглерод	0,556	0,488	0,433	0,396	0,366	0,319	0,29	0,27	0,25	0,21	0,19	0,17
Толуол	1,06	0,9	0,768	0,667	0,586	0,522	0,466	0,42	0,381	0,319	0,271	0,231
Уксусная кислота	-	-	-	-	1,22	1,04	0,9	0,79	0,7	0,56	0,46	0,37
<i>Хлороформ</i>	0,9	0,79	0,7	0,63	0,57	0,51	0,466	0,426	0,39	0,33	0,29	0,26
Четыреххлористый углерод	1,9	1,68	1,35	1,13	0,97	0,84	0,74	0,65	0,59	0,472	0,387	0,323
<i>Этилацетат</i>	0,79	0,67	0,578	0,507	0,449	0,4	0,36	0,326	0,297	0,248	0,21	0,178
Этиловый спирт	0,38	2,23	1,78	1,46	1,19	1,0	0,825	0,701	0,591	0,435	0,326	0,248

Примечание: 1 сПз=1·10⁻³ Па·с

Таблица 7. Вязкость μ (сПз) пара

Вещество	Температура, °С								
	0	100	200	300	400	500	600	700	800
Аммиак	0,0091	0,0128	0,0165	0,0199	0,0234	0,0264	0,0293	0,0321	0,0348
Ацетон	0,0069	0,0094	0,0121	0,0147	0,0174	0,02	0,0228	-	-
Бензол	0,007	0,0092	0,0121	0,0146	0,0172	0,0198	0,0233	-	-
Водяной пар	0,0085	0,0123	0,0161	0,0198	0,0232	0,0266	0,0299	0,0331	0,0361
Изопропиловый спирт	0,0072	0,0099	0,0124	0,0176	0,0202	-	-	-	-
Метиловый спирт	0,0088	0,0123	0,0157	0,0191	0,0226	0,0261	0,0296	-	-
Серовуглерод	0,009	0,0127	0,0162	0,0198	0,0235	0,0271	0,0312	0,0348	0,0389
Толуол	0,0066	0,0089	0,011	0,0132	0,0154	0,0175	0,0196	-	-
Уксусная кислота	0,00725	0,0104	0,0135	0,0165	0,02	0,0232	0,0265	0,03	0,0332
Хлороформ	0,00104	0,0132	0,016	0,0185	0,0215	0,0235	0,0265	0,0288	0,0315
Четыреххлористый углерод	0,0092	0,0123	0,0153	0,0182	0,0212	0,024	0,0269	-	-
Этилацетат	0,0092	0,0101	0,0125	0,015	0,0173	0,0200	0,022	0,0244	0,0265
Этиловый спирт	0,0079	0,0108	0,0137	0,0167	0,0197	0,0226	0,0257	-	-

Примечание: $1 \text{ сПз} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$

Таблица 8. Поверхностное натяжение жидких веществ и водных растворов

Вещество	Поверхностное натяжение, Н\м · 10 ³							
	при -20 °С	при 0 °С	при 20 °С	при 40 °С	при 60 °С	при 80 °С	при 100 °С	при 120 °С
Азотная кислота	48,3	44,8	41,4	38,2	35,2	32,4	29,8	27,4
Аммиак жидкий	38	27	21,2	16,8	12,8	-	-	-
Ацетон	28,7	26,2	23,7	21,2	18,6	16,2	13,8	11,4
Бензол	-	31,7	29	26,3	23,7	21,3	18,8	16,4
<i>Вода</i>	-	75,6	72,8	69,6	66,2	62,6	58,9	54,9
Изопропиловый спирт	24,7	23,2	21,7	20,1	18,5	17	15,5	14
Метиловый спирт	26,6	24,5	22,6	20,9	19,3	17,6	15,7	13,6
Сероуглерод	38,3	35,3	32,3	29,4	26,5	23,6	20,7	17,8
Толуол	33	30,7	28,5	26,2	23,8	21,5	19,4	17,3
Уксусная кислота	-	29,7	27,8	25,8	23,8	21,8	19,8	18
<i>Хлороформ</i>	32,8	30	27,2	24,4	21,7	19	16,3	13,6
Четыреххлористый углерод								
Этилацетат	31	29,5	26,9	24,5	22	19,6	17,3	15,1
Этиловый спирт	29,5	26,9	24,3	21,7	19,2	16,8	14,4	12,1
	25,7	24	22,3	20,6	19	17,3	15,5	13,4

Таблица 9. Основные физические свойства некоторых газов

Название	Плотность при 0 °С и 760 мм рт. ст., кг/м ³	Молекулярная масса	Удельная теплота испарения при 760 мм рт. ст., кДж/кг	Вязкость μ_0 при 0 °С и $p_{абс}=1$ кгс/см ²	
				10 ⁶ Па · с	константа C уравнения
Азот	1,25	28	199,4	17	114
Аммиак	0,77	17	1374	9,18	626
Аргон	1,78	39,9	163	20,9	142
Ацетилен	1,171	26,0	830	9,35	198
Бензол	–	78,1	394	7,2	–
Бутан	2,673	58,1	387	8,1	377
Воздух	1,293	(29,0)	197	17,3	124
Водород	0,0899	2,02	455	8,42	73
Гелий	0,179	4,0	19,5	18,8	78
Диоксид азота	–	46,0	712	–	–
Диоксид серы	2,93	64,1	394	1,7	396
Диоксид углерода	1,98	44,0	574,0	13,7	254
Кислород	1,429	32	213	20,3	131
Метан	0,72	16,0	511	10,3	102
Оксид углерода	1,25	28,0	212	16,6	100
Пентан	–	72,2	360	8,74	–
Пропан	2,02	44,1	427	7,95 (18 °С)	278
Пропилен	1,91	42,1	440	8,35 (20 °С)	322
Сероводород	1,54	34,1	549	11,66	–
Хлор	3,22	70,9	306	12,9 (16 °С)	351
Хлористый метил	2,3	50,5	406	9,89	454
Этан	1,36	30,1	486	8,5	287
Этилен	1,26	28,1	482	9,85	241

Таблица 10. Физические свойства воды на линии насыщения

P , кгс/см ²	t , °C	ρ , кг/м ³	i , кДж/кг	c , кДж/(кг·K)	$\lambda \cdot 10^{-2}$, Вт/(м·K)	$a \cdot 10^{-7}$, м ² /с	$\mu \cdot 10^{-6}$, Па·с	$\nu \cdot 10^{-6}$, м ² /с	$\beta \cdot 10^{-4}$, K ⁻¹	$\sigma \cdot 10^{-4}$, кг/с ²	Pr
1,0	0	1000	0	4,23	55,1	1,31	1790	1,79	-0,63	756	13,7
1,0	10	1000	41,9	4,19	57,5	1,37	1310	1,31	+0,70	762	9,52
1,0	20	998	83,8	4,19	59,9	1,43	1000	1,01	1,82	727	7,02
1,0	30	996	126	4,18	61,8	1,49	804	0,81	3,21	712	5,42
1,0	40	992	168	4,18	63,4	1,53	657	0,66	3,87	697	4,31
1,0	50	988	210	4,18	64,8	1,57	549	0,556	4,49	677	3,54
1,0	60	983	251	4,18	65,9	1,61	470	0,478	5,11	662	2,98
1,0	70	978	293	4,19	66,8	1,63	406	0,415	5,70	643	2,55
1,0	80	972	335	4,19	67,5	1,66	355	0,365	6,32	626	2,21
1,0	90	965	377	4,19	68,0	1,68	315	0,326	6,95	607	1,95
1,03	100	958	419	4,23	68,3	1,69	282	0,295	7,5	589	1,75
1,46	110	951	461	4,23	68,5	1,69	256	0,268	8,0	569	1,58
2,02	120	943	503	4,23	68,6	1,72	231	0,244	8,6	549	1,43
2,75	130	935	545	4,27	68,6	1,72	212	0,226	9,2	529	1,32
3,68	140	926	587	4,27	68,5	1,72	196	0,212	9,7	507	1,23
4,85	150	917	629	4,32	68,4	1,72	185	0,202	10,3	487	1,17
6,30	160	907	671	4,36	68,3	1,72	174	0,191	10,8	466	1,10
8,08	170	897	713	4,40	67,9	1,72	163	0,181	11,5	444	1,05
10,23	180	887	755	4,44	67,5	1,72	153	0,173	12,2	424	1,01

Примечание: пересчет в СИ: 1 кгс/см² = 9,81·10⁴ Па

Таблица 11 Физические свойства сухого воздуха при атмосферном давлении

$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$C_p, \text{кДж/(кг К)}$	$\lambda, \text{Вт/(м К)}$	$\mu \cdot 10^{-6} \text{Па с}$	$\nu \cdot 10^{-6} \text{м}^2/\text{с}$	Pr
0	1,293	1,005	2,44	17,17	13,28	0,707
10	1,247	1,005	2,51	17,66	14,16	0,705
20	1,205	1,005	2,59	18,15	15,06	0,703
30	1,165	1,005	2,67	18,64	16,00	0,701
40	1,128	1,005	2,76	19,13	16,96	0,699
50	1,093	1,005	2,83	19,62	17,95	0,698
60	1,060	1,005	2,89	20,11	18,97	0,696
70	1,029	1,009	2,96	20,60	20,02	0,694

Таблица 12. Коэффициенты диффузии D_0 при 273 К и 1 ат и коэффициенты диффузии D при T К и давлении 1 ат в бинарных газовых системах

Система	$D_0 \cdot 10^4, \text{ м}^2/\text{с}$	$T, \text{ К}$	$D \cdot 10^4, \text{ м}^2/\text{с}$
1	2	3	4
Азот – аммиак	-	293	0,241
Азот – водород	-	288	0,743
Азот – воздух	0,122	-	-
Азот – двуокись углерода	-	298	0,158
Азот – кислород	0,181	285	0,203
Аммиак – водород	-	293	0,849
Аммиак – воздух	0,198	-	-
Аммиак – кислород	-	293	0,253
Бензол – водород	0,317	-	-
Бензол – воздух	0,077	298	0,0962
Бензол – двуокись углерода	0,0527	318	0,0715
Бензол – кислород	-	296	0,0939
Вода – воздух	0,220	298	0,260
Вода – двуокись углерода	-	298	0,164
Водород – воздух	0,610	-	-
Водород – двуокись углерода	0,55	291	0,605
Водород – кислород	0,697	287	0,775
Водород – метан	0,625	-	-
Водород – этан	0,439	-	-

Продолжение табл. 12.

1	2	3	4
Водород – этилен	-	298	0,420
Водород – этиловый спирт	-	340	0,578
Воздух – двуокись углерода	0,136	-	-
Воздух – кислород	0,175	-	-
Воздух – хлор	0,124	-	-
Воздух – этиловый спирт	0,101	298	0,132
Воздух – диэтиловый эфир	0,0778	293	0,0864
Двуокись углерода – кислород	0,139	-	-
Двуокись углерода – метан	0,153	-	-
Двуокись углерода – этиловый спирт	0,0693	-	-
Кислород – этилен	-	293	0,182

ЕЛЕНА АНАТОЛЬЕВНА ЛАПТЕВА

ТИМУР МАНСУРОВИЧ ФАРАХОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И РАСЧЕТ
ТЕПЛОМАССОБМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АППАРАТОВ**

Учебное пособие

Под редакцией А.Г. Лаптева

Компьютерный набор: А.В. Климентов и Е.А. Лаптева

Технический редактор Ю.В. Жиглий

Издательство «Отечество»
420111, г. Казань, ул. Лево-Булачная, 24

Сдано в набор 11.02.2013. Форм. бум. 60x80 1/16.
Печ. л. 11,4. Тираж 500. Заказ №1502/1.
Отпечатано с готового оригинала – макета
в типографии «Вестфалика» (ИП Колесов В.Н.)
420111, г. Казань, ул. Московская, 22. Тел.: 292-98-92

westfalika@inbox.ru
